Множеството на целите числа задоволява нуждите на събирането, изваждането и умножението, но не е достатъчно за нуждите на делението. Частното на две цели числа не винаги съществува, т.е. действието деление не винаги е изпълнимо в множеството на целите числа.

За да бъде действието деление винаги изпълнимо, трябва множеството на целите числа да се разшири.

При дефиницията на рационални числа се използват двойки от цели числа $\left((a,b) \rightarrow \frac{a}{b}\right)$.

Множеството на рационалните числа се означава с ***Q***

В случай, че двойката цели числа има частно, тя води до цяло рационално число $\left(\frac{6}{2}=3, \frac{5}{1}=5, \frac{0}{3}=0, \ldots\right)$, а когато двойката няма частно, тя води до дробно рационално число $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{9}{10}, \ldots\right)$.

За рационалните числа също може да се докаже, че са изпълнени комутативното, асоциативното и дистрибутивното свойства. Изпълнено е и свойството трихотомия на наредбата в множеството на рационалните числа.

В множеството на рационалните числа частното $\frac{a}{b}$ на две рационални числа a и b ($b \neq 0$) съществува и също е рационално число, т.е. **операцията деление е изпълнима.** Казано по друг начин уравнението

$a.x = b$, $a \neq 0$

има точно решение $x = \frac{b}{a}$ в множеството на рационалните числа.

Решението на уравнението $a.x = 1$ $(a \neq 0)$, т.е. числото $\frac{1}{a}$ се нарича **реципрочно число** на рационалното число *a*. Всяко рационално число, което е различно от 0, има реципрочно.

Това понятие липсва в множеството на целите числа.

В множеството на целите числа всяко число има съседни числа. В множеството на рационалните числа няма съседни числа. Които и две рационални числа a и b да вземем, между тях има и то безброй много други рационални числа – например $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a-b}{4}$, … Това свойство на рационалните числа се нарича **гъстота.**

Всяко рационално число може да се представи във вида $\frac{p}{q}$, където q е естествено число, а p – цяло число (положително, отрицателно или нула).

Рационалните числа могат да се представят и чрез десетични дроби. Но оказва се, че не всяка десетична дроб представя рационално число. Само крайните и безкрайните периодични десетични дроби представят рационални числа.

Рационалните числа се изобразяват с точки от числовата ос .

Оказва се, обаче че не всяка точка от числовата ос е “рационална”, т.е. е образ на рационално число. Например, решението на уравнението $x^2 = 2$.

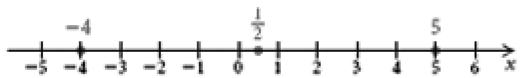
Доказва се, че не съществува рационално число, чиято втора степен е равна на 2. Ако нанесем на положителната посока на числовата ос, от началото O, отсечката OP, равна на диагонала на квадрат със страна 1, точката P отговаря на числото x, за което $x^2 = 2$. Тъй като такова рационално число не съществува, точката P не е “рационална” точка. Това показва, че върху числовата ос има точки, които не са “рационални”.

Някои неравенства включват рационални изрази или функции. Те се наричат **рационални неравенства**. За да решим рационални неравенства, е необходимо да внесем някои уточнения в предходния метод.

Пример 3 Решете: $x−3x+4≥x+2x−5x−3x+4≥x+2x−5$
Решение Прехвърляме $x+2x−5x+2x−5$ за да приведем в еквивалентно неравенство с 0 от едната страна:
$x−3x+4−x+2x−5≥0x−3x+4−x+2x−5≥0$

Алгебрично решение

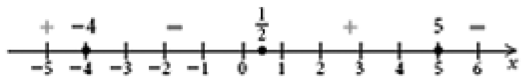
Търсим всички стойности на x, за които съответната функция
$f(x)=x−3x+4−x+2x−5f(x)=x−3x+4−x+2x−5$
не е дефинирана или е 0. Те се наричат **критични стойности**.
Функцията не е дефинирана за x = -4 и x = 5. След това решаваме f(x) = 0:
$x−3x+4−x+2x−5=0x−3x+4−x+2x−5=0$
$(x+4)(x−5)[x−3x+4−x+2x−5]=(x+4)(x−5).0(x+4)(x−5)[x−3x+4−x+2x−5]=(x+4)(x−5).0$
$(x - 5)(x - 3) - (x + 4)(x + 2) = 0$
$(x^2 - 8x + 15) - (x^2 + 6x + 8) = 0$
$-14x + 7 = 0$
$x = 1/2$.
Критичните стойности са -4, 1/2 и 5. Тези стойности разделят оста x на четири интервала:
$(-\infty; -4)$, $(-4; 1/2)$, $(1/2; 5)$,   и $(5; \infty)$.



След това задаваме стойности на x, за да определим знака на f(x) във всеки един от интервалите.

X	Y1	
−5	7.7	
−2	−2.5	
3	2.5	
6	−7.7	

X =

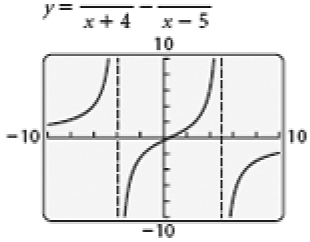


Функцията е положителна в интервалите (-∞; -4) и (1/2; 5). Тъй като f(1/2) = 0 и знакът за неравенство е ≥, трябва да включим 1/2 в множеството от решения. Ще отбележим, че тъй като f не е дефинирана нито за -4 , нито за 5, те не се включват в множеството от решения. Следователно множеството от решения е: (-∞ -4) ∪ [1/2; 5).

Графично решение

Чертаем графиката на
y=x−3x+4−x+2x−5y=x−3x+4−x+2x−5
След това проверяваме за кои стойности на x, функцията не е дефинирана. Чрез изследване на знаменателите x + 4 and x - 5, виждаме че не е дефинирана x = -4 и x = 5
Критичните стойности(стойностите, за които функцията не е дефинирана или е нула) са: -4, 0,5 и 5.
Тъй като знакът на неравенството е ≥, x=0.5 трябва да се включи към решенията.
Следователно множеството от решения е:

$$y = \frac{x-3}{x+4} - \frac{x+2}{x-5}$$



Виждаме, че 0,5 е корен.
След това проверяваме за кои стойности на x, функцията не е дефинирана. Чрез изследване на знаменателите x + 4 и x - 5, виждаме че не е дефинирана x = -4 и x = 5

Критичните стойности(стойностите, за които функцията не е дефинирана или е нула) са у -4, 0,5 и 5.
От графиката определяме къде функцията е положителна или отрицателна. Тъй като за x=-4 и x= 5 функцията не е дефинирана, те не принадлежат на множеството от решения.Понеже знакът за неравенство е ≥ и x=0,5 трябва да се включи към решенията.
Следователно множеството от решения е
(-∞; -4) ∪ [0,5; 5).

Метод за решаване на рационални неравенства

За да решим рационално неравенство:

1. Преобразува се в еквивалентно неравенство, като всички неизвестни се прехвърлят от едната страна, а от другата остава 0.
2. Решава се съответното уравнение.
3. Намираме стойностите на x, за които съответната рационална функция не е дефинирана.
4. Стойностите намерени в стъпки (2) и (3) се наричат критични стойности.Така получените стойности се нанасят на оста x, разделяйки я на интервали. След това се избира произволна стойност за всеки един интервал и се определя знакът на уравнението в интервала.
5. Определяме интервалите, за които неравенството е удовлетворено. Ако знакът за неравенство е ≤ или ≥, то корените получени в стъпка (2) трябва да се включат в множеството от решения. Стойностите на x, намерени в стъпка (3), никога не се включват в множеството от решения.

Използването едновременно на алгебрични и графични методи за решаване на неравенства от по-висок ред и рационални неравенства, ни позволява да определим точния брой на критичните стойности и да видим на графиката кои интервали удовлетворяват неравенството.