Примерни решения на изпита-задачи по Дискретни Структури, Информатика, 30.06.2017 г.

Задача 1 Нека p, q и r са съждения. Докажете по два начина , че съставното съждение

$$((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r)$$

е тавтология:

- Докажете това чрез табличния метод.
- Докажете това чрез еквивалентни преобразувания. Еквивалентните преобразувания, които можете да ползвате наготово, са изучаваните на лекция закони на съждителната логика.

Решение. Чрез таблица:

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \land (q \to r)$	$p \to r$	$((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Чрез еквивалентни преобразувания:

$((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r) \equiv$ // свойства на импликацията
$\neg((\neg p \lor q) \land (\neg q \lor r)) \lor (\neg p \lor r) \equiv$ // закон на De Morgan
$(\neg(\neg p \lor q) \lor \neg(\neg q \lor r)) \lor (\neg p \lor r) \equiv$ // асоциативност на дизюнкцията
$\neg(\neg p \lor q) \lor \neg(\neg q \lor r) \lor \neg p \lor r \equiv$ // закон на De Morgan
$(\neg\neg p \land \neg q) \lor (\neg\neg q \land \neg r) \lor \neg p \lor r \equiv$ // закон за двойното отрицание
$(p \land \neg q) \lor (q \land \neg r) \lor \neg p \lor r \equiv$ // комутативност на дизюнкцията
$((p \land \neg q) \lor \neg p) \lor ((q \land \neg r) \lor r) \equiv$ // дистрибутивност на дизюнкцията спрямо конюнкцията
$((p \lor \neg p) \land (\neg q \lor \neg p)) \lor ((q \lor r) \land (\neg r \lor r)) \equiv$ // свойства на отрицанието
$(T \land (\neg q \lor \neg p)) \lor ((q \lor r) \land T) \equiv$ // свойства на константите
$(\neg q \lor \neg p) \lor (q \lor r) \equiv$ // асоциативност на дизюнкцията
$\neg q \lor \neg p \lor q \lor r \equiv$ // комутативност на дизюнкцията
$(\neg q \lor q) \lor (\neg p \lor r) \equiv$ // свойства на отрицанието
$T \lor (\neg p \lor r) \equiv$ // свойства на константите
T

□

Задача 2 Нека $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и $R \subseteq A \times A$. Казваме, че R е *квазинаредба* тогава и само тогава, когато R е рефлексивна и транзитивна. И релациите на еквивалентност, и релациите на частична наредба са квазинаредби: ако квазинаредба е симетрична, то тя е релация на еквивалентност; ако квазинаредба е антисиметрична, то тя е релация на частична наредба. На следващата страница е даден пример за квазинаредба, която не е нито симетрична, нито антисиметрична. Този пример не е съществен за решаването на задачата, но може да Ви е полезен.
Нека $\simeq_R$ е друга релация, такава че $\simeq_R \subseteq A \times A$. Нея дефинираме по следния начин

$$\forall a, b \in A : a \simeq_R b \leftrightarrow aRb \land bRa$$

Очевидно $\simeq_R$ е дефинирана спрямо R, поради което пишем "$\simeq_R$", а не просто "$\simeq$".

- Докажете, че $\simeq_R$ е релация на еквивалентност. Нека X е множеството от класовете на еквивалентност на $\simeq_R$ и нека името "X" се ползва с този смисъл в следващите подзадачи.
- В тази подзадача допуснете, че R е релация на еквивалентност. Опишете X чрез множеството от класовете на еквивалентност на R.
- В тази подзадача допуснете, че R е релация на частична наредба. Опишете X чрез A.
- В тази тази подзадача допуснете, че R е квазинаредба без други ограничения. Да разгледаме релацията $Q_R \subseteq X \times X$, дефинирана по следния начин.

  $$\forall Y, Z \in X \; ((Y, Z) \in Q_R \leftrightarrow \exists a \in Y \; \exists b \in Z : aRb)$$

  Докажете, че Q_R е релация на частична наредба.
- В тази тази подзадача допуснете, че $A = \{1, 2, \ldots, 300\}$. Колко са различните квазинаредби над $A \times A$, такива че за всяка от тях, да я наречем R', множеството от класовете на еквивалентност на $\simeq_{R'}$ е $\{\{1, 2, \ldots, 100\}, \{101, 102, \ldots, 200\}, \{201, 202, \ldots, 300\}\}$?

Решение. Ще докажем, че $\simeq_R$ е релация на еквивалентност. Първо, $\simeq_R$ е рефлексивна, което следва директно от рефлексивността на R. Второ, $\simeq_R$ е симетрична, което следва директно от дефиницията на $\simeq_R$. Трето, $\simeq_R$ е транзитивна, което следва директно от транзитивността на R.

Да допуснем, че самата R е релация на еквивалентност. Тогава множеството от нейните класове на еквивалентност съвпада с X.

Да допуснем, че R е релация на частична наредба. Тогава елементите на X са всички едноелементни множества, чиито единствен елемент е някой елемент на A. По-формално казано:

$$X = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_n\}\}$$

Ще покажем, че Q_R е релация на частична наредба. Първо, Q_R е рефлексивна, защото във всеки елемент-множество на X има поне един елемент a, такъв че aRa – това следва от рефлексивността на R и от факта, че елементите на X са непразни. Второ, Q_R е транзитивна, понеже за всеки три, не непременно различни, елементи-множества B, C и D на X:

- ако $(B, C) \in Q_R$, то има $b \in B$ и $c \in C$, такива че bRc,
- ако $(C, D) \in Q_R$, то има $c \in B$ и $d \in C$, такива че cRd,

така че ако $(B, C) \in Q_R$ и $(C, D) \in Q_R$, то bRc и cRd за някакви $a, b, c \in A$. От транзитивността на R следва, че bRd, така че $(B, D) \in Q_R$. Показахме, че $(B, C) \in Q_R$ и $(C, D) \in Q_R$ влече $(B, D) \in Q_R$. Следователно, Q_R е транзитивна. Трето, Q_R е антисиметрична. Наистина, ако допуснем, че за различни $Y, Z \in X$ е вярно, че $(Y, Z) \in Q_R$ и $(Z, Y) \in Q_R$, веднага заключаваме от дефиницията на X и от транзитивността на R, че Y и Z всъщност са едно и също множество, в противоречие с по-ранното допускане, че са различни.

Сега ще пресметнем броя на квазинаредбите в последната подзадача. Всяка квазинаредба се определя еднозначно от това, кои са класовете на еквивалентност на $\simeq_R$ и от това, каква е релацията на частична наредба Q_R над тях. Тук класовете на еквивалентност са три дадени множества – няма значение какво точно съдържа всяко от тях, важното е, че са три. Подзадачата се свежда до това, колко частични наредби има над множество с три елемента. На лекции сме доказали, че има точно 19 частични наредби над множество с три елемента. Това се доказва елементарно с диаграми на Hasse – има точно 5 неизоморфни диаграми на Hasse с три анонимни елемента, и различните начини да бъдат именувани елементите са 19.

Зад. 3 Докажете по два начина, че за всяко $n \geq 1$ е в сила $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$:

- Докажете твърдението по индукция.
- Докажете твърдението чрез метода с характеристичното уравнение. За целта, нека лявата страна на равенството, а именно $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$, бъде наречена $f(n)$. Сега задачата е да докажете, че $f(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

  Първо намерете разликата $f(n) - f(n-1)$. От нея можете да изразите $f(n)$ чрез $f(n-1)$ и още нещо. С добавяне на подходящи начални условия—какви?—можете да получите коректно рекурентно уравнение.

Решение. По индукция. Базата е за $n = 1$. Лявата страна е $1^3 = 1$. Дясната е $\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1$. ✓ Допускаме, че твърдението е вярно за стойност на аргумента n. Разглеждаме твърдението за стойност на аргумента $n+1$. Тогава твърдението е

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Ще преобразуваме лявата му страна до дясната чрез еквивалентни преобразувания:

$$\begin{aligned}
&1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \qquad \text{// съгласно индуктивното предположение}\\
&\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 =\\
&\frac{n^2(n+1)^2}{4} + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 =\\
&\frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} + \frac{4n^3 + 12n^2 + 12n + 4}{4} =\\
&\frac{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}{4} =\\
&\frac{n^4 + 3n^3 + 2n^2 + 3n^3 + 9n^2 + 6n + 2n^2 + 6n + 4}{4} =\\
&\frac{n^2(n^2 + 3n + 2) + 3n(n^2 + 3n + 2) + 2(n^2 + 3n + 2)}{4} =\\
&\frac{(n^2 + 3n + 2)^2}{4} =\\
&\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 \checkmark
\end{aligned}$$

Чрез метода с характеристичното уравнение. Нека $f(n) = 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3$ за $n \geq 1$. Тогава $f(n-1) = 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3$ за $n \geq 2$. Тогава $f(n) - f(n-1) = n^3$ за $n \geq 2$. Тоест, $f(n) = f(n-1) + n^3$ за $n \geq 2$. Очевидно $f(1) = 1$, така че цялото рекурентно уравнение е

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 1 \\ f(n-1) + n^3, & \text{ако } n > 1 \end{cases}$$

Разглеждаме хомогенната част. Характеристичното уравнение е $x - 1 = 0$ с мултимножество от корени $\{1\}_M$.

Сега разглеждаме нехомогенната част. Можем да я запишем като $1^n \times n^3$. Полиномът е от трета степен, така че към мултимножеството $\{1\}_M$ добавяме четири единици и получаваме мултимножеството $\{1, 1, 1, 1, 1\}_M$. Тогава общото решение е

$$f(n) = A1^n + Bn1^n + Cn^2 1^n + Dn^3 1^n + En^4 1^n = A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + En^4$$

за някакви константи A, B, C, D, E.

Ако се интересуваме само от общото решение, може да спрем тук. Ако искаме пълното решение, трябва да намерим петте константи. За да намерим петте константи ни трябват пет уравнения, а ние разполагаме само с едно начално условие. Добавяме още четири начални условия:

$$\begin{aligned}
f(2) &= 1^3 + 2^3 = 9\\
f(3) &= 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36\\
f(4) &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100\\
f(5) &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225
\end{aligned}$$

Тогава

$$\left|\begin{array}{ll}
A + B + C + D + E & = 1\\
A + 2B + 4C + 8D + 16E & = 9\\
A + 3B + 9C + 27D + 81E & = 36\\
A + 4B + 16C + 64D + 256E & = 100\\
A + 5B + 25C + 125D + 625E & = 225
\end{array}\right.$$

Тази система има решение $(A, B, C, D, E) = (0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Тогава $f(n) = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Зад. 4 Нека $G = (V, E)$ е граф.

- Докажете, че ако G е двуделен граф с дялове V_1 и V_2, то $\displaystyle\sum_{u \in V_1} d(u) = \sum_{u \in V_2} d(u)$.
- Докажете, че ако следните две условия са изпълнени:
  - $\exists p \in \mathbb{N} : |V| = 2p + 1$,
  - $\exists p \in \mathbb{N}^+ \ \forall u \in V : d(u) = p$,

  то G не е двуделен.

Решение. Ще решим първата подзадача. Нека графът има m ребра. Знаем, че степента на връх е броят на ребрата, инцидентни с него. Тогава сумата всички степени на върхове от V_1 е равна на броя на всички ребра, инцидентни с някой връх от V_1. От дефиницията на "двуделен граф" знаем, че на всяко ребро единият край е във V_1. Тогава ребрата, инцидентни с някой връх от V_1, всъщност са всички ребра на графа. Тогава $m = \sum_{u \in V_1} d(u)$. С напълно аналогична аргументация извеждаме, че $m = \sum_{u \in V_2} d(u)$. Следователно, $\sum_{u \in V_1} d(u) = \sum_{u \in V_2} d(u)$.

Ще решим втората подзадача. Двете условия казват, че броят на върховете е нечетен и че всички върхове са от една и съща степен.

> Сега ще докажем едно помощно твърдение: ако в двуделен граф всички върхове са от една и съща степен, то дяловете имат една и съща мощност. Нека дяловете са V_1 и V_2. Ще използваме вече изведеното равенство $\sum_{u \in V_1} d(u) = \sum_{u \in V_2} d(u)$. Нека всички върхове са от една и съща степен p. Тогава $\sum_{u \in V_1} d(u) = p|V_1|$. Но също така $\sum_{u \in V_1} d(u) = p|V_2|$. Следователно, $p|V_1| = p|V_2|$, откъдето следва, че $|V_1| = |V_2|$.

И така, ако даденият граф е двуделен и всички върхове имат една и съща степен, то дяловете са с еднаква мощност. Тогава броят на върховете е четно число. Но това противоречи на условието, че броят на върховете е нечетен. Следователно, графът не е двуделен.

Зад. 5 Нека p и q са цели числа, по-големи от 2. Нека

$$
\begin{aligned}
V &= \{u_1, u_2, \dots, u_p\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_q\} \\
E &= \{(u_1, u_2), (u_2, u_3), \dots, (u_{p-1}, u_p)\} \cup \{(u_1, u_p)\} \cup \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{q-1}, v_q)\} \cup \{(v_1, v_q)\} \\
E' &= E \cup \{(u_1, v_1)\}
\end{aligned}
$$

Нека $G = (V, E)$ и $G' = (V, E')$ са графи.

- Колко покриващи дървета има G?
- Колко покриващи дървета има G'?

Решение. G има 0 покриващи дървета, понеже не е свързан. G' е свързан и има $p + q + 1$ ребра. Нещо повече, той се състои от един цикъл с дължина p, още един цикъл с дължина q, като тези цикли нямат общи върхове, и още едно ребро, чийто два края са в двата цикъла. Всяко покриващо дърво на G' се получава чрез премахване на по едно ребро от всеки от двата цикъла (проверка: след премахване на две ребра, остават $p + q - 1$ ребра – точно колкото трябва да са ребрата в дърво с $p + q$ върха). Тогава броят на покриващите дървета е pq.

Зад. 6 В час доказахме, че множеството от булеви функции $\{\wedge, \oplus, \tilde{1}\}$ е пълно. Сега разгледайте множеството от булеви функции $\{\wedge, \oplus\}$. Как мислите, то пълно ли е? Обосновете отговорите си.

Решение. Това множество не е пълно. Да си представим схема от функционални елементи, всеки от които е тип конюнкция или тип сума по модул две. Тривиално е да се съобрази, че ако на входовете на схемата бъдат подадени само нули, на изхода ще излезе също нула.

С други думи, всяка булева функция, която е композиция на функциите конюнкция и сума по модул две, има стойност 0 върху вход $\tilde{0}$. Но тогава тази композиция не може да бъде, например, функцията константа-единица.

Показахме, че поне една булева функция, а именно константа-единица, не е в $[\{\wedge, \oplus\}]$. Тогава това множество не е пълно по дефиниция.