

ДОМАШНО № 1 ПО ДИСЦИПЛИНАТА “ДИСКРЕТНИ СТРУКТУРИ”  
ЗА СПЕЦИАЛНОСТ “КОМПЮТЪРНИ НАУКИ”, I КУРС, II ПОТОК,  
ЗИМЕН СЕМЕСТЪР НА 2017/2018 УЧ. Г. В СУ, ФМИ

Име: ..... Факултетен № ..... Група: .....

Задача	1	2	3	4	ОБЩО
получени точки					
максимум точки	30	20	30	20	100

**Забележка 1:** Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.

**Забележка 2:** Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!

**Задача 1.** Постройте безкрайно множество, всички елементи на което са негови строги подмножества. Първо опишете идеята неформално. После дайте строго (формално) описание, несъдържащо многоточия и фрази от рода на “аналогично”, “и тъй нататък”. Докажете строго, че построеното множество има желаните свойства.

**Задача 2.** Функция  $f : S \rightarrow S$  (със съвпадащи дефиниционно и функционално множество) се нарича инволюция точно когато удовлетворява равенството  $f(f(x)) = x$  за всяко  $x \in S$ . Един елемент  $x_0 \in S$  се нарича неподвижна точка за функцията  $f$  точно когато  $f(x_0) = x_0$ . Докажете, че:

- а) всяка инволюция е биекция; (3 точки)
- б) ако  $f$  е инволюция, то  $f^{-1} = f$ ; (3 точки)
- в) ако функция от вида  $f : S \rightarrow S$  съвпада със своята обратна функция  $f^{-1}$ , то  $f$  е инволюция; (3 точки)
- г) ако  $S$  е крайно множество и  $f : S \rightarrow S$  е инволюция, то броят на елементите на  $S$  и броят на неподвижните точки на  $f$  имат една и съща четност, т.е. и двете числа са четни или и двете са нечетни; (3 точки)
- д) ако  $S$  е крайно множество, а  $f_1 : S \rightarrow S$  и  $f_2 : S \rightarrow S$  са две инволюции, то броят на неподвижните точки на  $f_1$  и броят на неподвижните точки на  $f_2$  са числа с еднаква четност; (3 точки)
- е) уравнението  $x^{2017} - 517x^{289} + 24x = 0$  има нечетен брой реални корени. (5 точки)

В последната подточка се иска решение чрез инволюция. (Не се приемат други решения!) Първо опишете идеята неформално (с две-три изречения). После дайте формално описание: дефинирайте множеството  $S$  и функцията  $f$ ; докажете, че  $f$  е от вида  $f : S \rightarrow S$ ; докажете, че  $f$  е инволюция; намерете броя на неподвижните точки на  $f$ ; позовете се на твърдението от подточка “г”.

**Задача 3.** Съществува ли множество от точки в тримерното пространство, което има:

- а) поне една, но не повече от краен брой общи точки с всяка равнина? (15 точки)
- б) изброимо безкрайно много общи точки с всяка равнина? (15 точки)

*Упътване:* Ако поне едно от числата  $A$ ,  $B$  и  $C$  е различно от нула, то множеството от точки  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Ax + By + Cz + D = 0\}$  е равнина. Всяка равнина има уравнение от този вид.

**Задача 4.** Постройте строга линейна наредба в множеството  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ .