Семестриално контролно по "Дискретни структури" за специалност "Компютърни науки", I курс, II поток – СУ, ФМИ, зимен семестър на 2017/2018 уч. г.

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	1	2	3	4	5	6	Общо
получени точки							
максимум точки	*20*	*20*	*20*	*20*	*20*	*20*	*120*

Забележка: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно!*

Задача 1.
а) Докажете, че във всеки изпъкнал многоъгълник с четен брой страни има диагонал, който не е успореден на никоя страна. **(10 точки)**
б) Горното твърдение вярно ли е за изпъкналите многоъгълници с нечетен брой страни? **(10 точки)**

Задача 2. Разглеждаме безкрайна редица от бинарни релации $\rho_n \subseteq \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n$, дефинирани за всяко цяло положително n по следния начин:
— първият член: $a \, \rho_1 \, b$ тогава и само тогава, когато $a-b$ се дели на 3;
— членовете след първия: $\left(a_1\,,\, a_2\,,\, \ldots\,,\, a_{n+1}\right) \rho_{n+1} \left(b_1\,,\, b_2\,,\, \ldots\,,\, b_{n+1}\right)$ тогава и само тогава, когато $\left(a_1\,,\, a_2\,,\, \ldots\,,\, a_n\right) \rho_n \left(b_1\,,\, b_2\,,\, \ldots\,,\, b_n\right)$ и $a_{n+1} - b_{n+1}$ се дели на 3.

За всяко цяло положително число n:
а) докажете, че ρ_n е релация на еквивалентност; **(10 точки)**
б) опишете класовете на еквивалентност на ρ_n възможно най-ясно и кратко; **(5 точки)**
в) пресметнете броя на класовете на еквивалентност на ρ_n. **(5 точки)**

Задача 3. Да се докаже, че за произволни множества A, B и C е в сила равенството

$$\Big(A \cup C\Big) \cap \Big(\Big(A \cap B\Big) \cup \Big(\,\overline{C} \cap B\Big)\Big) \;=\; A \cap B.$$

Задача 4. Докажете, че биномният коефициент $\dbinom{2n}{n}$ е четно число за всяко цяло $n \geq 1$.

Задача 5. Колко от анаграмите на думата МАТЕМАТИКА не съдържат никоя от думите ИМАТ, МАК и ЕК ? Изчислете отговора докрай.

Анаграма е всеки текст, образуван чрез разместване на букви, без значение дали има смисъл. Например ТЕИМАТКАМА и АААЕИКММТТ са две анаграми на думата МАТЕМАТИКА.

Един текст съдържа дадена дума, когато буквите ѝ се срещат в текста последователно, и то в същия ред. Например текстът ЕТАМИТААКМ съдържа думите ТАМ и МИТ, обаче не съдържа думите ИМАТ (буквите са в различен ред) и ЕК (буквите не са последователни).

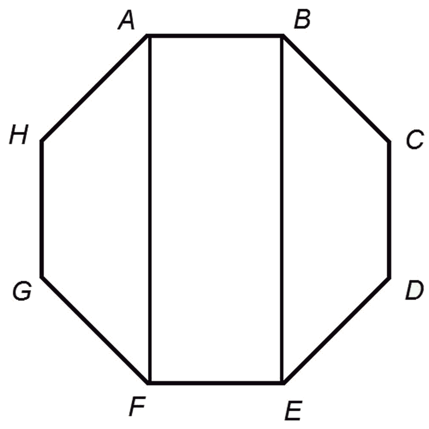
Задача 6. Асен, Борис, Василена и Гергана искат да си поделят 20 жълти и 10 сини жетона. По колко начина могат да извършат подялбата? Изчислете отговора докрай.

Жетоните от един цвят са неразличими. Всеки човек може да вземе произволен брой жетони (включително всички или нито един).

РЕШЕНИЯ

Задача 1.

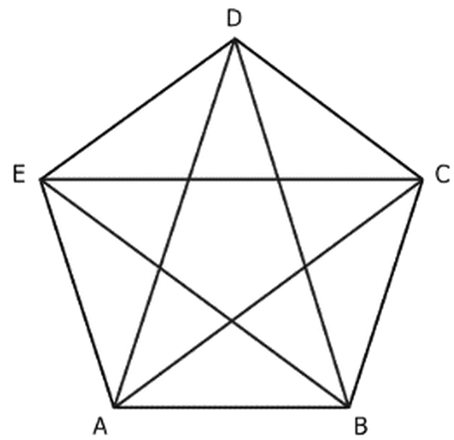
а) Върховете на n-ъгълник са краища на $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ отсечки: n страни и $\dfrac{n(n-1)}{2} - n = \dfrac{n(n-3)}{2}$ диагонала. Да допуснем, че всеки от диагоналите е успореден на някоя страна. Тогава от принципа на Дирихле следва, че има страна на многоъгълника, която е успоредна на поне $\dfrac{n-3}{2}$ диагонала. Щом n е четно, то $\dfrac{n-3}{2}$ е дробно, затова има поне $\dfrac{n-2}{2} = \dfrac{n}{2} - 1$ диагонала, успоредни на избраната страна. Заедно с нея стават $\dfrac{n}{2}$ успоредни отсечки, чиито краища, n на брой, изчерпват всички върхове на многоъгълника. Той е изпъкнал, затова всичките $\dfrac{n}{2} - 1$ диагонала лежат в една и съща полуравнина спрямо избраната страна. Сред тях има един диагонал, който е най-далече от нея. Оттатък него няма повече върхове, затова той е част от контура, а не от вътрешността на многоъгълника. Следователно въпросният диагонал е страна на многоъгълника, което е противоречие.



Полученото противоречие — една и съща отсечка да бъде едновременно и страна, и диагонал на многоъгълника — показва, че направеното допускане не е вярно. Тогава е вярно твърдението от условието на задачата.

П р и м е р: Ако допускането беше вярно, то например при $n = 8$ би се получило, че в осмоъгълника $ABCDEFGH$ има страна (да кажем, CD), която е успоредна на най-малко $\dfrac{n}{2} - 1 = 3$ диагонала. На чертежа отсечките BE, AF и GH действително са успоредни на CD, обаче най-отдалечената от тях, тоест GH, е не диагонал, а страна на осмоъгълника.

б) За изпъкнал n-ъгълник с нечетно n твърдението може да се окаже невярно. Ако $ABCDE$ е правилен петоъгълник, то всеки негов диагонал е успореден на някоя страна: $CE \,||\, AB$, $AD \,||\, BC$, $BE \,||\, CD$, $CA \,||\, DE$, $DB \,||\, EA$.



Задача 2. Преди да започнем да решаваме отделните подточки, е полезно да характеризираме релациите по някакъв по-прост начин.

Лема: $\left(a_1\,,\ a_2\,,\ \dots\ ,\ a_n\right)\ \rho_n\ \left(b_1\,,\ b_2\,,\ \dots\ ,\ b_n\right) \iff 3 \ \Big|\ \left(a_k - b_k\right),\ \forall k = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ n.$

Доказателството се извършва с математическа индукция по n и точно следва индуктивната дефиниция на редицата от релации. Базата е при $n = 1$, стъпката е от n към $n+1$.

След като лемата бъде доказана, тя може да се използва при решаване на задачата.

а) Че всеки член на редицата е релация на еквивалентност, се доказва с помощта на лемата. Проверката на трите свойства (рефлексивност, симетричност и транзитивност) се свежда до позоваване на същите свойства на релацията сравнимост по модул 3.

Тази подточка може да се докаже и без лемата, но по-сложно. Използва се индукция по n. Базата е при $n = 1$; че ρ_1 е релация на еквивалентност, се доказва с проверка на трите свойства. Индуктивната стъпка е от n към $n+1$: с помощта на индуктивната дефиниция на редицата се доказва, че ако ρ_n е релация на еквивалентност, то и ρ_{n+1} е такава.

б) Не е трудно да се докаже, че има взаимноеднозначно съответствие между класовете на еквивалентност на релацията ρ_n и наредените n-орки от остатъци по модул 3 (т.е. 0, 1 и 2): всеки клас на еквивалентност на ρ_n съдържа точно една n-орка от остатъци по модул 3 и всяка такава n-орка се съдържа в точно един клас на еквивалентност.

в) От описанието в подточка "б" е ясно, че класовете на еквивалентност на релацията ρ_n са толкова на брой, колкото са наредените n-орки от остатъци по модул 3. Тези n-орки са *вариации с повторение* на три елемента (остатъците) от n-ти клас. Броят им е $\widetilde{V}_3^{\,n} = 3^n$.

Задача 3 може да се реши с табличния метод.

A	B	C	$\overline{C}$	$A \cap B$	$\overline{C} \cap B$	$\left(A \cap B\right) \cup \left(\overline{C} \cap B\right)$	$A \cup C$	лявата страна	дясната страна
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1	1	1

Последните две колонки съвпадат, следователно тъждеството е вярно.

Задачата може да се реши и по други начини, например чрез преобразуване на лявата страна до получаване на дясната:

$$\left(A \cup C\right) \cap \left(\left(A \cap B\right) \cup \left(\overline{C} \cap B\right)\right) = \left(A \cup C\right) \cap \left(\left(A \cup \overline{C}\right) \cap B\right) = \left(\left(A \cup C\right) \cap \left(A \cup \overline{C}\right)\right) \cap B$$
$$= \left(A \cup \left(C \cap \overline{C}\right)\right) \cap B = \left(A \cup \varnothing\right) \cap B = A \cap B.$$

Задача 4 също може да се реши по различни начини.

Първи начин: Нека S е съвкупността на n-елементните подмножества на $\left\{\, 1\,,\, 2\,,\, \ldots\,,\, 2n \,\right\}$. Това са всички *комбинации без повторение* на $2n$ елемента от n-ти клас. Следователно $\left|\, S \,\right| = C_{2n}^{\,n} = \dbinom{2n}{n}$. За всяка комбинация $B \in S$ нейното допълнение $\overline{B} = \left\{\, 1\,,\, 2\,,\, \ldots\,,\, 2n \,\right\} \Big\backslash B$ също принадлежи на S, защото $\left|\, \overline{B} \,\right| = 2n - \left|\, B \,\right| = 2n - n = n$. Ето защо можем да разбием множеството S на ненаредени двойки $\left\{\, B\,,\, \overline{B} \,\right\}$, което показва, че то има четен брой елементи, тоест $\left|\, S \,\right| = \dbinom{2n}{n}$ е четно число.

Забележка: На практика използвахме инволюция. По-точно, изображението $f\,(B) = \overline{B}$ е инволюция в S, защото $\overline{\overline{B}} = B$. Тази инволюция няма неподвижни точки, понеже $\overline{B} \neq B$ за всяко $B \in S$. Щом инволюцията има четен брой (нула) неподвижни точки, то и $\left|\, S \,\right| = \dbinom{2n}{n}$ е четно число.

Втори начин: $\dbinom{2n}{n} \;=\; \dfrac{(2n)\,!}{n!\; n!} \;=\; \dfrac{2n}{n} \cdot \dfrac{(2n-1)\,!}{(n-1)\,!\; n!} \;=\; 2\dbinom{2n-1}{n-1}$ е четно число, защото е произведение на числото 2 с цялото число $\dbinom{2n-1}{n-1}$. Този биномен коефициент има смисъл, защото $n \geq 1$, и е цяло число като всички биномни коефициенти.

Трети начин: Тръгваме от известното комбинаторно тъждество

$$\binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \,\cdots\, + \binom{2n}{n-1} + \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} + \,\cdots\, + \binom{2n}{2n-1} + \binom{2n}{2n} \;=\; 2^{2n} \;=\; 4^{n}$$

и съобразяваме, че събираемите, равноотдалечени от двата края, са равни:

$$\binom{2n}{0} \;=\; \binom{2n}{2n}, \quad \binom{2n}{1} \;=\; \binom{2n}{2n-1}, \quad \ldots \quad , \quad \binom{2n}{n-1} \;=\; \binom{2n}{n+1},$$

поради което тъждеството приема вида:

$$2\left[\binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \,\cdots\, + \binom{2n}{n-1}\right] + \binom{2n}{n} \;=\; 4^{n}.$$

Следователно

$$\binom{2n}{n} \;=\; 4^{n} - 2\left[\binom{2n}{0} + \binom{2n}{1} + \,\cdots\, + \binom{2n}{n-1}\right],$$

което е четно число при всяко цяло $n \geq 1$, защото и умаляемото, и умалителят са четни числа.

Задача 5. Всяка анаграма съдържа всички букви на първоначалната дума, следователно две анаграми се различават само по реда на буквите. Затова анаграмите са *пермутации*. Пермутациите са *със повторение*, тъй като между десетте букви на думата МАТЕМАТИКА има еднакви: буквата А се среща три пъти, М и Т — по два пъти. Другите букви — Е, И и К — се срещат по веднъж.

Броят на всички възможни анаграми на думата МАТЕМАТИКА се пресмята по известната комбинаторна формула:

$$\widetilde{P}_{10}^{\;3\,;\,2\,;\,2\,;\,1\,;\,1\,;\,1} \;=\; \frac{10!}{3!\; 2!\; 2!\; 1!\; 1!\; 1!} \;=\; 151200.$$

В тази бройка влизат както анаграмите, които съдържат някоя от думите ИМАТ, МАК и ЕК, така и анаграмите, които не съдържат никоя от трите думи.

Анаграмите от първия вид образуват множеството $I \cup M \cup E$, където I, M и E се състоят от анаграмите, съдържащи думата ИМАТ, МАК и ЕК съответно.

Броят на анаграмите от първия вид се пресмята чрез принципа за включване и изключване:

$$\left| I \cup M \cup E \right| = \left| I \right| + \left| M \right| + \left| E \right| - \left| I \cap M \right| - \left| I \cap E \right| - \left| M \cap E \right| + \left| I \cap M \cap E \right|.$$

Отделните събираеми се намират отново чрез формулата за броя на пермутациите с повторение.

I е множеството на анаграмите, съдържащи думата ИМАТ. Те са пермутации с повторение на седем елемента — М, А, Т, Е, К, А и думата ИМАТ, която се брои като един елемент (пакет). Буквата А се среща два пъти, затова

$$\left| I \right| = \widetilde{P}_7^{\,2;1;1;1;1;1} = \frac{7!}{2!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 2520.$$

В задачи от този тип има опасност някоя анаграма да бъде броена неколкократно. Това може да се случи, ако анаграмата съдържа няколко екземпляра от думата ИМАТ — например пакета ИМАТ и отделно четирите букви И, М, А и Т последователно в този ред. В конкретната задача това не може да се случи, тъй като извън пакета ИМАТ няма буква И. Причината е, че думата МАТЕМАТИКА съдържа само една буква И.

Аналогично, никоя анаграма не може да съдържа два или повече пъти думата МАК, тъй като в думата МАТЕМАТИКА има само една буква К. Същото важи и за думата ЕК. Следователно

$$\left| M \right| = \widetilde{P}_8^{\,2;2;1;1;1;1} = \frac{8!}{2!\,2!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 10080,$$

$$\left| E \right| = \widetilde{P}_9^{\,3;2;2;1;1} = \frac{9!}{3!\,2!\,2!\,1!\,1!} = 15120,$$

защото M е множеството на пермутациите на осемте елемента Т, Е, М, А, Т, И, А и МАК; а пък E е множеството на пермутациите на деветте елемента М, А, Т, М, А, Т, И, А и ЕК.

$I \cap M$ е множеството на анаграмите, съдържащи както думата ИМАТ, така и думата МАК. Те са пермутации без повторение на пет елемента — буквите Т, Е, А и думите ИМАТ и МАК. Броят на тези пермутации е равен на

$$\left| I \cap M \right| = P_5 = 5! = 120.$$

В задачи като тази има опасност от пропускане на анаграми, в които думите се припокриват. Например текстът АЛЕНАШИВКА съдържа думите АЛЕНА и НАШИВКА, обаче не може да се разглежда като пермутация на два пакета (ще се получи друг текст — АЛЕНАНАШИВКА), а трябва да се разглежда като един пакет, съставен от всичките десет букви на двете думи. В конкретната задача това не може да се случи, защото думите ИМАТ и МАК не се застъпват. Същото важи за думите ИМАТ и ЕК.

$I \cap E$ е множеството на анаграмите, съдържащи както думата ИМАТ, така и думата ЕК. Те са пермутации с повторение на шест елемента — буквите М, А, Т, А и думите ИМАТ и ЕК. Броят на тези пермутации е равен на

$$\left| I \cap E \right| = \widetilde{P}_6^{\,2;1;1;1;1} = \frac{6!}{2!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 360.$$

Не съществуват анаграми, съдържащи едновременно думите МАК и ЕК, защото в думата МАТЕМАТИКА има само една буква К, а думите МАК и ЕК не могат да споделят буквата К, тъй като няма как да се припокрият. Ето защо двете множества $M \cap E$ и $I \cap M \cap E$ са празни:

$$\left| M \cap E \right| = \left| I \cap M \cap E \right| = 0.$$

Заместваме намерените бройки в принципа за включване и изключване:

$$\left| I \cup M \cup E \right| = 2520 + 10080 + 15120 - 120 - 360 - 0 + 0 = 27240.$$

Тоест има 27240 анаграми, всяка от които съдържа поне една от думите ИМАТ, МАК и ЕК. Останалите $151200 - 27240 = 123960$ анаграми не съдържат никоя от трите думи.

Отговор: Има 123960 анаграми на думата МАТЕМАТИКА, несъдържащи никоя от думите ИМАТ, МАК и ЕК.

Задача 6. При разпределянето на десетте сини жетона всеки път избираме човек, на когото да дадем жетон. Тоест избираме десет души от дадените четирима — Асен, Борис, Василена и Гергана. Повторенията са не само разрешени, но и неизбежни: със сигурност някой от четиримата ще получи поне два жетона. Редът на избиране на хората определя кой човек кой жетон ще получи. Но сините жетони са неразличими, затова редът на избиране на хората няма значение. Важно е само кой човек колко пъти ще бъде избран (толкова сини жетона ще получи).

Следователно разпределенията на сините жетони представляват *комбинации с повторение* на четири елемента (хората) от десети клас (броя на сините жетони). Ето защо има

$$\widetilde{C}\,_4^{10} \;=\; \frac{13!}{10!\,3!} \;=\; \frac{13\,.\,12\,.\,11}{1\,.\,2\,.\,3} \;=\; 13\,.\,2\,.\,11 \;=\; 286 \text{ начина}$$

за подялба на сините жетони между Асен, Борис, Василена и Гергана.

Аналогично се вижда, че има

$$\widetilde{C}\,_4^{20} \;=\; \frac{23!}{20!\,3!} \;=\; \frac{23\,.\,22\,.\,21}{1\,.\,2\,.\,3} \;=\; 23\,.\,11\,.\,7 \;=\; 1771 \text{ начина}$$

за подялба на двайсетте жълти жетона между Асен, Борис, Василена и Гергана.

Всяка подялба на сините жетони може да се съчетае с всяка подялба на жълтите жетони. От правилото за умножение намираме броя на разпределенията на жълтите и сините жетони:

$$286\,.\,1771 \;=\; 506506.$$

Отговор: Подялбата на 20 жълти и 10 сини жетона между Асен, Борис, Василена и Гергана може да стане по 506506 начина.