Домашно № 3 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Компютърни науки", I курс, II поток, зимен семестър на 2017/2018 уч. г. в СУ, ФМИ

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	Общо
получени точки					
максимум точки	*25*	*25*	*25*	*25*	*100*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

Приемат се самo решения чрез рекурентни уравнения!

Задача 1. Пресметнете $(\ldots (((2 * 3) * 4) * 5) * \ldots) * 2017$, ако $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}\cdot$

Задача 2. На една стена са монтирани n електрически ключа. Всеки ключ има две възможни положения — нагоре и надолу. В едното положение ключът свързва електрическата верига, а в другото я прекъсва. Тъй като всеки ключ може да бъде завъртян на 180° при монтиране, то не е възможно да се познае по положението на ключа дали е включен, или е изключен. Електрическа крушка е свързана във веригата последователно — тоест лампата свети само ако са включени всички ключове.

Кои ключове да щракаме и в какъв ред, за да гарантираме, че лампата ще светне, с минимален брой щраквания на ключове в най-лошия случай? (Това е случаят, когато нямаме късмет и лампата светва чак при последното от предвидената поредица щраквания.)

Да приемем, че електрическите ключове са номерирани с целите числа от 1 до n. Тогава всяка редица от щраквания може да се представи като крайна числова редица, която съдържа числата $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ произволен брой пъти. Търсят се най-късата редица, гарантираща светването на лампата, и дължината на тази най-къса редица.

Точки: за най-късата редица: 15 точки; за дължината ѝ: 10 точки.

Задача 3. Да се реши предишната задача, ако всеки ключ има k възможни състояния. (Очевидно задача 2 е частен случай при $k = 2$.)

Задача 4. Нека $A = \left(a_{i,\,j}\right)$ е безкрайна числова матрица, т.е. индексите i и j са произволни цели положителни числа. Матрицата е дефинирана, както следва:

$$a_{i,\,j} = \begin{cases} i+1\,, & \text{ако } j=1;\\ j+1\,, & \text{ако } i=1;\\ a_{i-1,\,j} + j\,a_{i-1,\,j-1}\,, & \text{ако } i>1 \text{ и } j>1. \end{cases}$$

Докажете, че матрицата A е симетрична, тоест $a_{i,\,j} = a_{j,\,i}\,.$

$i \backslash j$	**1**	**2**	**3**	**4**	···
1	2	3	4	5	···
2	3	7	13	21	···
3	4	13	34	73	···
4	5	21	73	209	···
···	···	···	···	···	···