Домашно № 3 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Компютърни науки", I курс, II поток, зимен семестър на 2017/2018 уч. г. в СУ, ФМИ

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	Общо
получени точки					
максимум точки	*25*	*25*	*25*	*25*	*100*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

Приемат се <u>само</u> решения чрез рекурентни уравнения!

Задача 1. Пресметнете $(\,\ldots\,(((2*3)*4)*5)*\,\ldots\,)*2017$, ако $x*y \;=\; \dfrac{x+y}{1+xy}\cdot$

Задача 2. На една стена са монтирани n електрически ключа. Всеки ключ има две възможни положения — нагоре и надолу. В едното положение ключът свързва електрическата верига, а в другото я прекъсва. Тъй като всеки ключ може да бъде завъртян на 180° при монтиране, то не е възможно да се познае по положението на ключа дали е включен, или е изключен. Електрическа крушка е свързана във веригата последователно — тоест лампата свети само ако са включени всички ключове.

Кои ключове да щракаме и в какъв ред, за да гарантираме, че лампата ще светне, с минимален брой щраквания на ключове в най-лошия случай? (Това е случаят, когато нямаме късмет и лампата светва чак при последното от предвидената поредица щраквания.)

Да приемем, че електрическите ключове са номерирани с целите числа от 1 до n. Тогава всяка редица от щраквания може да се представи като крайна числова редица, която съдържа числата $1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n$ произволен брой пъти. Търсят се най-късата редица, гарантираща светването на лампата, и дължината на тази най-къса редица.

Точки: за най-късата редица: 15 точки; за дължината ѝ: 10 точки.

Задача 3. Да се реши предишната задача, ако всеки ключ има k възможни състояния. (Очевидно задача 2 е частен случай при $k=2$.)

Задача 4. Нека $A = \left(a_{i,\,j}\right)$ е безкрайна числова матрица, т.е. индексите i и j са произволни цели положителни числа. Матрицата е дефинирана, както следва:

$$a_{i,\,j} = \begin{cases} i+1\,, & \text{ако } j=1; \\ j+1\,, & \text{ако } i=1; \\ a_{i-1,\,j} + j\,a_{i-1,\,j-1}\,, & \text{ако } i>1 \text{ и } j>1. \end{cases}$$

Докажете, че матрицата A е симетрична, тоест $a_{i,\,j} \;=\; a_{j,\,i}\,.$

$i \backslash j$	**1**	**2**	**3**	**4**	···
1	2	3	4	5	···
2	3	7	13	21	···
3	4	13	34	73	···
4	5	21	73	209	···
···	···	···	···	···	···

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Пресмятаме първите няколко междинни резултата:

$$2 * 3 \;=\; \frac{2+3}{1+2\,.\,3} = \frac{5}{7}\,; \qquad \frac{5}{7} * 4 \;=\; \frac{\dfrac{5}{7}+4}{1+\dfrac{5}{7}\;\cdot\;4} \;=\; \frac{11}{9}\,; \qquad \frac{11}{9} * 5 \;=\; \frac{\dfrac{11}{9}+5}{1+\dfrac{11}{9}\;\cdot\;5} \;=\; \frac{7}{8}\,\cdot$$

Забелязваме, че те са положителни рационални числа. Не е трудно да се докаже по индукция, че и следващите резултати са положителни рационални числа. Затова можем да положим

$$(\;\ldots\;(((2*3)*4)*5)*\;\ldots\;)*n \;=\; \frac{a_n}{b_n}$$

за някакви цели положителни числа a_n и b_n . (Това равенство определя числата a_n и b_n не еднозначно, а с точност до ненулев множител. Те ще бъдат еднозначно определени по-долу.)

Съставяме рекурентно уравнение:

$$\frac{a_n}{b_n} * (n+1) \;=\; \Big((\;\ldots\;(((2*3)*4)*5)*\;\ldots\;)*n\Big) * (n+1) \;=\; \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\,\cdot$$

С други думи,

$$\frac{a_n}{b_n} * (n+1) \;=\; \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\,,$$

тоест

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \;=\; \frac{\dfrac{a_n}{b_n}+(n+1)}{1+\dfrac{a_n}{b_n}\;(n+1)} \;=\; \frac{a_n+(n+1)\,b_n}{b_n+(n+1)\,a_n}\,\cdot$$

Полученото равенство

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \;=\; \frac{a_n+(n+1)\,b_n}{b_n+(n+1)\,a_n}$$

определя числата a_{n+1} и b_{n+1} не еднозначно, а с точност до ненулев множител. Понеже те така или иначе са дефинирани с точност до ненулев множител, то имаме право да изберем този множител по начин, удобен за нас. Затова го избираме единица, тоест

$$\left|\begin{array}{l} a_{n+1} = \; a_n + (n+1)\,b_n \\[1ex] b_{n+1} = \; b_n + (n+1)\,a_n\,. \end{array}\right.$$

Тези рекурентни уравнения задават еднозначно двете редици (числителите и знаменателите), стига да има подходящи начални условия. Най-естествено е да приемем, че $n \geq 3$ и че $a_3 = 5$, $b_3 = 7$, защото $\dfrac{a_3}{b_3} \;=\; 2*3 \;=\; \dfrac{5}{7}\cdot$ (Може също $n \;\geq\; 2$, $a_2 =\; 2$, $b_2 =\; 1$.)

По индукция се доказва, че рекурентните уравнения заедно с началните условия определят две редици от цели положителни числа, каквото изискване бе поставено отначало.

Чрез събиране и изваждане получаваме еквивалентна система от рекурентни уравнения:

$$\left|\begin{array}{l} a_{n+1}+\,b_{n+1} = \;(n+2)\,(a_n+\,b_n) \\[1ex] a_{n+1}-\,b_{n+1} = \;-\,n\,(a_n-\,b_n). \end{array}\right.$$

Предимството на новите две уравнения е, че във всяко от тях дясната страна прилича на лявата. Затова те могат да бъдат решени чрез развиване:

$$a_{n+1}+\,b_{n+1} = \;(n+2)\,(a_n+\,b_n) \;=\; (n+2)\,(n+1)\,(a_{n-1}+\,b_{n-1}) \;=\; \ldots$$

$$a_{n+1}-\,b_{n+1} = \;-\,n\,(a_n-\,b_n) \;=\; \big(-\,n\big)\,\big(-\,(n-1)\big)\,(a_{n-1}-\,b_{n-1}) \;=\; \ldots$$

Като довършим развиването, получаваме

$$a_{n+1} + b_{n+1} = (n+2)(n+1) \ \ldots \ 9 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, (a_3 + b_3),$$
$$a_{n+1} - b_{n+1} = \big(-n\big)\big(-(n-1)\big) \ \ldots \ (-4) \,.\, (-3) \,.\, (a_3 - b_3)\,.$$

Преработваме произведенията до факториели:

$$a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{(n+2)!}{24}\ (a_3 + b_3),$$

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{n!}{2}\,(-1)^{n-2} \,.\, (a_3 - b_3)\,.$$

Заместваме $a_3 = 5$, $b_3 = 7$ и съкращаваме. Получава се системата

$$\left| \begin{array}{l} a_{n+1} + b_{n+1} = \dfrac{(n+2)!}{2} \\[2ex] a_{n+1} - b_{n+1} = n!\,(-1)^{n-1}\,. \end{array} \right.$$

Събираме и изваждаме двете уравнения; след деление на 2 намираме

$$a_{n+1} = \frac{(n+2)! + 2(-1)^{n-1}.\, n!}{4}, \qquad b_{n+1} = \frac{(n+2)! - 2(-1)^{n-1}.\, n!}{4}\,.$$

Заменяме $n+1$ с n:

$$a_n = \frac{(n+1)! + 2(-1)^{n-2}.\,(n-1)!}{4}, \qquad b_n = \frac{(n+1)! - 2(-1)^{n-2}.\,(n-1)!}{4}\,.$$

Опростяваме $(-1)^{n-2}$ до $(-1)^n$:

$$a_n = \frac{(n+1)! + 2(-1)^{n}.\,(n-1)!}{4}, \qquad b_n = \frac{(n+1)! - 2(-1)^{n}.\,(n-1)!}{4}\,.$$

Пресмятаме частното:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{(n+1)! + 2(-1)^{n}.\,(n-1)!}{(n+1)! - 2(-1)^{n}.\,(n-1)!},$$

съкращаваме на $(n-1)!$ и получаваме

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n(n+1) + 2(-1)^n}{n(n+1) - 2(-1)^n},$$

тоест

$$(\ \ldots\ (((2*3)*4)*5)*\ \ldots\ )*n = \frac{n(n+1) + 2(-1)^n}{n(n+1) - 2(-1)^n}\,.$$

Тази формула важи за всяко цяло $n \geq 3$. В частност при $n = 2017$ се получава

$$(\ \ldots\ (((2*3)*4)*5)*\ \ldots\ )*2017 = \frac{2017\,.\,2018 - 2}{2017\,.\,2018 + 2} \approx 0{,}999999017.$$

Не е трудно да се провери, че

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1) + 2(-1)^n}{n(n+1) - 2(-1)^n} = 1,$$

което обяснява приблизителната стойност по-горе.

Тази задача е дадена от Република Македония на XII балканска олимпиада по математика за средношколци през 1995 г. (Естествено, там числото е 1995, а не 2017.)

Задача 2 (Joseph Rosenbaum). Нека A_n е търсената най-къса редица, а a_n е нейната дължина. В случай че на стената има само един електрически ключ, отговорът е очевиден: лампата светва с едно щракване на този ключ, тоест $A_1 = (1)$, $a_1 = 1$.

Ако на стената са монтирани $n+1$ електрически ключа, може ключ № $n+1$ да е включен. В такъв случай по определение най-късата редица от щраквания е A_n. Ако след изпълнението на редицата A_n лампата все още не свети, това означава само едно: че ключ № $n+1$ е изключен. Единственото, което ни остава, е да го включим, а след това да приложим редицата A_n отново. Следователно

$$A_{n+1} = \left(A_n ,\ n+1 ,\ A_n \right) \qquad \text{и} \qquad a_{n+1} = 2a_n + 1.$$

Например

$$A_2 = \left(1 ,\ 2 ,\ 1 \right) , \quad A_3 = \left(1 ,\ 2 ,\ 1 ,\ 3 ,\ 1 ,\ 2 ,\ 1 \right) \ \text{ и тъй нататък.}$$

Рекурентната формула за редицата A_n заедно с началното условие представлява отговорът на единия въпрос в задачата — за оптималната редица от щраквания на електрическите ключове. Не е известна нерекурентна формула за A_n.

Обаче за дължината a_n на редицата може да се получи явна формула. Равенството

$$a_{n+1} = 2a_n + 1$$

е линейно-рекурентно уравнение с постоянни коефициенти и фиксирана дължина на историята. То може да се реши с помощта на характеристично уравнение. Като отчетем и началното условие, намираме

$$a_n = 2^n - 1.$$

Това е отговорът на втория въпрос в задачата.

Рекурентното уравнение за дължината a_n може да бъде решено и по друг начин: пресмятаме първите няколко дължини $(1, 3, 7, 15, 31, \dots)$, налучкваме формулата $a_n = 2^n - 1$ и я доказваме по индукция.

Да отбележим, че най-късата редица не е единствена. Например при $n = 3$ освен редицата $\left(1 ,\ 2 ,\ 1 ,\ 3 ,\ 1 ,\ 2 ,\ 1 \right)$ решение е също и редицата $\left(1 ,\ 2 ,\ 3 ,\ 2 ,\ 1 ,\ 2 ,\ 3 \right)$.

Това може да се провери по следния начин. Кодираме положението на ключовете с цифрите 0 и 1, като 0 означава, че ключът се намира в началното си положение (тоест щракнали сме го четен брой пъти, вкл. нито веднъж), а 1 означава, че ключът се намира в различно положение — не както сме го заварили (т.е. щракнали сме го нечетен брой пъти). Началното положение е 000. След това последователно щракваме ключовете по реда на срещане на номерата им в редицата от седем члена. Получават се следните осем конфигурации:

$$000 \xrightarrow{\quad 1 \quad} 100 \xrightarrow{\quad 2 \quad} 110 \xrightarrow{\quad 3 \quad} 111 \xrightarrow{\quad 2 \quad} 101 \xrightarrow{\quad 1 \quad} 001 \xrightarrow{\quad 2 \quad} 011 \xrightarrow{\quad 3 \quad} 010.$$

Не е трудно да се провери, че тези осем конфигурации изчерпват всички възможности за разположението на трите превключвателя.

Оттук става ясно, че няма решение с по-малко от $2^n - 1$ щраквания, т.е. нашето решение е оптимално. Действително, понеже не знаем кои ключове са включени и кои — изключени, налага се (в най-лошия случай) да обходим всички конфигурации. Те са общо 2^n на брой (това следва от правилото за умножение: по две позиции на ключ, общо $2 \,.\, 2 \,\dots\, 2 = 2^n$ възможности за всичките n ключа). Една конфигурация (нулевата) имаме в самото начало. За да изпробваме останалите, са нужни поне $2^n - 1$ прехода от една конфигурация към друга. Всеки преход изисква поне едно щракване на ключ, т.е. необходими са поне $2^n - 1$ щраквания.

Че нашето решение наистина обхожда всички конфигурации на електрическите ключове (т.е. не пропуска и не повтаря конфигурации), се доказва по индукция. Базата е при $n = 1$, когато с едно щракване на ключа проверяваме единствената конфигурация, различна от началната. Индуктивната стъпка се основава на формулата

$$A_{n+1} = \left(A_n ,\ n+1 ,\ A_n \right).$$

Според индуктивното предположение първото изпълнение на A_n обхожда по веднъж всички конфигурации с 0 на позиция № $n+1$, второто изпълнение на A_n обхожда по веднъж всички конфигурации с 1 на позиция № $n+1$. Следователно A_{n+1} обхожда по веднъж всички конфигурации на $n+1$ ключа.

Пример: На редиците A_1, A_2 и A_3 от номера на електрически ключове съответстват следните редици от конфигурации.

На $A_1 = \big(1\big)$ съответства $0 \overset{1}{\text{———}} 1$.

На $A_2 = \big(1,\ 2,\ 1\big)$ съответства редицата $00 \overset{1}{\text{———}} 10 \overset{2}{\text{———}} 11 \overset{1}{\text{———}} 01$.

На $A_3 = \big(1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 2,\ 1\big)$ съответства редицата

$$000 \overset{1}{\text{———}} 100 \overset{2}{\text{———}} 110 \overset{1}{\text{———}} 010 \overset{3}{\text{———}} 011 \overset{1}{\text{———}} 111 \overset{2}{\text{———}} 101 \overset{1}{\text{———}} 001.$$

Задачата може да се реши по обратния начин: първо намираме редиците от конфигурации, после от тях получаваме редиците A_n от номера на ключове. Вторият етап е очевиден: при прехода от една конфигурация към друга се променя положението на точно един ключ; неговият номер става пореден член на редицата A_n. Колкото до първия етап на решението, редиците от конфигурации се дефинират индуктивно: при $n = 1$ редицата е $0 \text{———} 1$; всяка следваща редица от конфигурации се получава, като отдясно на предишната се допише огледалният ѝ образ (обръща се редът на конфигурациите, но не и самите конфигурации), след което на всяка конфигурация от огледалния образ се дописва отдясно 1, а на всяка конфигурация от първообраза се дописва отдясно 0 (вж. горния пример).

Това решение се нарича *код на Грей.* То съвпада с първото решение (това твърдение може да се докаже чрез индукция).

Задача 3 се решава като задача 2, само че сега всеки ключ има k възможни положения. Например при някои електрически уреди (котлони и др.) $k=4$ или $k=5$. Следователно последният ключ трябва да бъде щракнат (или завъртян) $k-1$ пъти, тоест

$$A_1 = (1,1,\ \dots\ ,1), \qquad a_1 = k-1;$$

$$A_{n+1} = \big(A_n,\ n+1,\ A_n,\ n+1,\ \dots\ ,\ A_n,\ n+1,\ A_n\big) \quad \text{и} \quad a_{n+1} = k a_n + k - 1.$$

Редицата A_1 съдържа $k-1$ пъти числото 1. Редицата A_{n+1} съдържа k пъти редицата A_n и $k-1$ разделителя $n+1$.

Решаваме рекурентното уравнение за дължината (например с характеристично уравнение) и намираме

$$a_n = k^n - 1.$$

Задача 4 (Добромир Кралчев) е забележителна с това, че уравнението не е симетрично, но матрицата, получена от него, е симетрична. Задачата може да се реши по различни начини.

Първи начин: с индукция. Този начин е верен и естествен поради рекурентната дефиниция на матрицата. За съжаление, той води до дълго, тромаво доказателство: твърдението на задачата се свежда последователно до няколко други твърдения (леми), все по-прости, но всяко изискващо отделна индукция. При това, всяка индукция може да бъде по различен параметър (i, j, $i+j$), което допълнително затруднява разсъжденията. Затова ще предпочетем друго доказателство.

Втори начин: с комбинаторни разсъждения. Ще покажем, че числата $a_{i,\,j}$ са решение на подходяща комбинаторна задача. Чрез нея ще е по-лесно да установим симетричността. Как да съчиним задачата? Няма рецепта, това изисква досетливост. Все пак задачата трябва да удовлетворява рекурентното уравнение на матрицата. Именно то подсказва формулировката.

Разглеждаме следната комбинаторна задача:

По колко начина можем да разположим i предмета на j места?

Предметите са различими, например са номерирани с целите числа 1, 2, 3, 4, … , i. Следователно всеки предмет е в единствен екземпляр, т.е. един предмет не може да бъде сложен на две или повече места. Всеки предмет заема само едно място. На всяко място може да бъде поставен само един предмет. Местата също са различими, например са номерирани с целите числа 1, 2, 3, 4, … , j. Не е задължително да бъдат използвани всички предмети, т.е. всеки предмет може да бъде използван (заема място) или неизползван (не заема място). Аналогично, всяко място може да бъде заето (от един предмет, избран произволно), но може да остане и незаето.

Поради възможността за неизползване на места и предмети няма ограничения за i и j. Разбира се, i и j трябва да бъдат цели положителни числа, но във всяко друго отношение са произволни: може $i < j$, може $i > j$, може $i = j$.

Една възможна интерпретация е следната: да си мислим, че предметите са коли, а местата служат за паркиране. Всяка кола може да бъде паркирана на някое от местата, но може също да не бъде паркирана (например може да бъде в движение из града). Аналогично, всяко място може да бъде заето от кола, но може да бъде и свободно. В задачата се пита по колко начина i коли могат да се паркират на j места, т.е. колко са възможните конфигурации на паркинга.

Да означим с $b_{i,\,j}$ решението на комбинаторната задача, т.е. $b_{i,\,j}$ е броят на начините, по които i предмета могат да бъдат разположени на j места. Ще докажем две твърдения:

1) Елементите на матрицата A са решения на комбинаторната задача, т.е. $b_{i,\,j} = a_{i,\,j}$.

2) Решението на комбинаторната задача е симетрично, т.е. $b_{i,\,j} = b_{j,\,i}$.

Ако направим това, задача 4 ще бъде решена, защото от тези две твърдения следва симетричността на матрицата A:

$$a_{i,\,j} \overset{1)}{=} b_{i,\,j} \overset{2)}{=} b_{j,\,i} \overset{1)}{=} a_{j,\,i}\,, \quad \text{тоест} \quad a_{i,\,j} = a_{j,\,i}\,, \quad \text{тоест матрицата } A \text{ е симетрична.}$$

И така, за да решим задача 4, е достатъчно да докажем двете номерирани твърдения.

Първото твърдение — за равенството на величините $a_{i,\,j}$ и $b_{i,\,j}$ — следва от факта, че числата $b_{i,\,j}$ удовлетворяват уравненията, чрез които се дефинира матрицата A, тоест

$$b_{i,\,j} = \begin{cases} i+1\,, & \text{ако } j = 1; \\ j+1\,, & \text{ако } i = 1; \\ b_{i-1,\,j} + j\,b_{i-1,\,j-1}\,, & \text{ако } i > 1 \text{ и } j > 1. \end{cases}$$

Наистина, $b_{i,\,1} = i+1$, защото i предмета могат да бъдат сложени на едно място ($j = 1$) по $i+1$ начина: единственото място може да бъде заето от първия или втория, или третия, … , или i-тия предмет, а може също така да бъде оставено празно (незаето). Аналогично, $b_{1,\,j} = j+1$, защото един предмет ($i = 1$) може да бъде сложен на j места по $j+1$ начина: предметът може да бъде поставен на първото, на второто, … , на j-тото място, а може също да не бъде поставен никъде.

Колкото до рекурентното уравнение, то следва от правилото за събиране, като разбием задачата на случаи. По определение $b_{i,\,j}$ е броят на начините, по които можем да разположим i предмета на j места. За предмета с най-голям номер (№ i) са налице следните случаи:

— Предмет № i е сложен на място № 1. За останалите $i-1$ предмета остават $j-1$ места, така че има $b_{i-1,\,j-1}$ конфигурации от този вид.

— Предмет № i е сложен на място № 2. За другите $i-1$ предмета пак ще има $j-1$ места, следователно конфигурациите от този вид също са $b_{i-1,\,j-1}$ на брой.

Като продължим тези разсъждения, виждаме, че има j случая за мястото на предмет № i: той може да заеме или място № 1, или № 2, или № 3, …, или № j. Във всеки от тези случаи остават $j-1$ места за другите $i-1$ предмета, така че броят на възможните конфигурации е $b_{i-1,\,j-1}$ във всеки отделен случай, а общо: $j\,b_{i-1,\,j-1}$.

Има обаче още един случай: предметът с номер i може да не бъде поставен никъде. Тогава за другите $i-1$ предмета остават j места, следователно броят на конфигурациите в този случай е равен на $b_{i-1,\,j}$. Като прибавим и тази бройка, получаваме уравнението $b_{i,\,j} = b_{i-1,\,j} + j\,b_{i-1,\,j-1}$.

Дотук доказахме, че функциите $a_{i,\,j}$ и $b_{i,\,j}$ удовлетворяват едни и същи уравнения. От това следва ли, че тези две функции съвпадат? В общия случай — когато уравненията са произволни — не следва. Така например, известните тригонометрични функции $\sin x$ и $\cos x$ удовлетворяват едно и също уравнение:

$$\sin(x+\pi) = -\sin x \quad \text{и} \quad \cos(x+\pi) = -\cos x,$$

но въпреки това са две различни функции. Това е така, защото уравнението

$$f(x+\pi) = -f(x)$$

не определя функцията f еднозначно.

В задача 4 случаят е друг: функцията $a_{i,\,j}$ (т.е. матрицата A) се определя еднозначно от уравненията

$$a_{i,\,j} = \begin{cases} i+1, & \text{ако } j=1; \\ j+1, & \text{ако } i=1; \\ a_{i-1,\,j} + j\,a_{i-1,\,j-1}, & \text{ако } i>1 \text{ и } j>1. \end{cases}$$

Можем да се убедим в това, като попълним матрицата A — ред по ред (отгоре надолу), а всеки ред — елемент по елемент (отляво надясно). При попълването ще установим, че в нито един момент не изпитваме недостиг на информация: поредното число винаги е еднозначно определено.

Вече доказахме, че числата $b_{i,\,j}$ удовлетворяват същите уравнения, тоест

$$b_{i,\,j} = \begin{cases} i+1, & \text{ако } j=1; \\ j+1, & \text{ако } i=1; \\ b_{i-1,\,j} + j\,b_{i-1,\,j-1}, & \text{ако } i>1 \text{ и } j>1. \end{cases}$$

Понеже тези уравнения определят матрицата еднозначно, то ако с тяхна помощ попълним втора матрица $B = \left(b_{i,\,j}\right)$, ще извършим същите сметки и ще получим същите резултати, тоест матрицата B ще съвпадне с матрицата A. Иначе казано,

$$b_{i,\,j} = a_{i,\,j} \quad \text{за всички допустими } i \text{ и } j.$$

Тези разсъждения са донякъде интуитивни, но напълно достатъчни, като се има предвид, че твърдението за еднозначната определеност на матрицата е очевидно. Ако все пак държим на строго (формално) доказателство на равенството $b_{i,\,j} = a_{i,\,j}$, можем да направим това с помощта на индукция (по i), като използваме трите уравнения.

Дотук доказахме първото от номерираните твърдения — за равенството на $a_{i,\,j}$ и $b_{i,\,j}$. Преминаваме към второто твърдение — за симетричността на b, тоест

$$b_{i,\,j} = b_{j,\,i}.$$

То означава, че начините, по които можем да разположим i предмета на j места, са толкова, колкото са начините, по които можем да разположим j предмета на i места.

Ще докажем това твърдение, като построим подходяща биекция. Всяко разположение на i предмета върху j места ще бъде кодирано с помощта на редица, съставена от j числа. Те могат да бъдат следните: $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ,\ i$. Ако k-тият член на редицата е равен на $p > 0$, това означава, че k-тото място е заето от предмет № p. Ако k-тият член на редицата е 0, това означава, че k-тото място е свободно. От правилата за образуване на конфигурациите е ясно, че всяко от числата $1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ,\ i$ може да се срещне най-много веднъж в редицата, а числото 0 може да се среща неограничен брой пъти.

Пример: Редицата $(4,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0,\ 17,\ 0,\ 0)$ означава, че имаме 8 места, като първото е заето от предмет № 4, третото — от предмет № 2, а шестото — от предмет № 17; останалите пет места са свободни. (Броят на предметите не става ясен от самата редица.)

Описаното кодиране задава биекция между множеството на разположенията на i предмета върху j места и множеството на числовите редици от описания вид.

Има и друго тълкуване на числовите редици: ако k-тият член на редицата е равен на $p > 0$, това означава, че k-тият предмет е сложен на място № p; ако k-тият член на редицата е 0, това означава, че k-тият предмет не е сложен никъде. Тази нова интерпретация е всъщност второ кодиране, което задава втора биекция, този път между множеството на разположенията на j предмета върху i места и множеството на числовите редици от описания вид.

Пример: Редицата $(4,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0,\ 17,\ 0,\ 0)$ означава, че има общо 8 предмета: първият е сложен на място № 4, третият — на място № 2, а шестият — на място № 17; останалите пет предмета не са сложени никъде. (Броят на местата не става ясен от редицата.)

Композицията на двете биекции е също биекция — тази, която търсим. По-конкретно, едно разположение на i предмета върху j места и разположение на j предмета върху i места си съответстват, когато са различни прочити на една и съща числова редица от описания вид. От тази биекция следва, че има еднакъв брой разположения от двата типа, т.е. $b_{i,\,j} = b_{j,\,i}$.

Както вече отбелязахме, от двете равенства $b_{i,\,j} = a_{i,\,j}$ и $b_{i,\,j} = b_{j,\,i}$ следва, че $a_{i,\,j} = a_{j,\,i}$, тоест матрицата A е симетрична.