Домашно № 4 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Компютърни науки", I курс, II поток, зимен семестър на 2017/2018 уч. г. в СУ, ФМИ

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	Общо
получени точки					
максимум точки	*20*	*20*	*20*	*40*	*100*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

Задача 1. Всички лица на свързан планарен граф (вкл. външната неограничена област) са петоъгълни, шестоъгълни или седмоъгълни, а всички върхове на графа са от трета степен. Намерете разликата между броя на петоъгълните и броя на седмоъгълните лица.

Задача 2. Пресметнете броя на върховете на троично кореново дърво с 2017 листа.

Задача 3. Нека G е ориентиран граф с 2^k върха и между всеки два върха има точно едно ребро. Да се докаже, че независимо от ориентацията на ребрата G съдържа път с $k+1$ различни върха.

Задача 4. В множеството $V = \Big\{ -n,\ -(n-1),\ \dots\ ,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ \dots\ ,\ n-1,\ n \Big\}$ дефинираме бинарната релация R по следния начин: $xRy \iff x+y$ е точна степен на 3.

а) Докажете, че релацията R е симетрична и антирефлексивна. **(10 точки)**

б) Нека G е графът на релацията R, тоест V е множеството от върховете на G, два върха x и y са свързани с ребро $\iff xRy$.
От подточка "а" следва, че G е неориентиран граф без примки.
Докажете, че графът G не е хамилтонов. **(30 точки)**

РЕШЕНИЯ

Задача 1 се решава с помощта на формулата на Ойлер. Нека f е броят на лицата на графа (включително външната област), нека n е броят на върховете, а m е броят на ребрата. Тогава

$$n - m + f = 2 \quad \text{(формула на Ойлер)}.$$

Нека f_5, f_6 и f_7 са съответно броят на петоъгълните, шестоъгълните и седмоъгълните лица. Във формулата на Ойлер заместваме

$$f = f_5 + f_6 + f_7$$

и получаваме

$$n - m + f_5 + f_6 + f_7 = 2.$$

По условие от всеки връх излизат точно по три ребра, затова броят на ребрата е равен на $3n$. Но така всяко ребро е броено два пъти — по веднъж за всеки от двата върха, които свързва. В последното от горните равенства заместваме

$$m = \frac{3n}{2}$$

и то придобива вида

$$n - \frac{3n}{2} + f_5 + f_6 + f_7 = 2,$$

тоест

$$-\frac{n}{2} + f_5 + f_6 + f_7 = 2,$$

което е равносилно на

$$n = 2f_5 + 2f_6 + 2f_7 - 4,$$

тоест

$$3n = 6f_5 + 6f_6 + 6f_7 - 12.$$

От друга страна,

$$3n = 5f_5 + 6f_6 + 7f_7\,,$$

като отдясно стои формула, която се опитва да пресметне броя на всички върхове на графа (петоъгълните лица имат по пет върха, шестоъгълните — по шест, седмоъгълните — по седем). Но така всеки връх е броен три пъти (по условие от всеки връх излизат три ребра, следователно във всеки връх се събират три лица). Затова отляво стои $3n$, а не n.

Последните две равенства имат еднакви леви страни. Тогава десните им страни са равни:

$$6f_5 + \cancel{6f_6} + 6f_7 - 12 = 5f_5 + \cancel{6f_6} + 7f_7\,.$$

След прехвърляне на събираеми от едната страна в другата се получава

$$f_5 - f_7 = 12.$$

Отговор: Разликата между броя на петоъгълните и броя на седмоъгълните лица е равна на 12.

Задача 2. Нека n е броят на върховете, а m е броят на ребрата. Използваме теоремата, че във всеки граф сборът от степените на върховете е равен на удвоения брой на ребрата. Троичното кореново дърво има 1 връх от степен 3 — корена; 2017 върха от степен 1 — листата; и още $n - 1 - 2017 = n - 2018$ върха от степен 4 — останалите върхове (във всеки от тях влиза едно ребро от родителя и излизат три ребра към наследниците). Сборът от степените е

$$1\,.\,3 + 2017\,.\,1 + (n - 2018)\,.\,4 = 2m \quad\Longleftrightarrow\quad 4n - 6052 = 2m \quad\Longleftrightarrow\quad 2n - 3026 = m.$$

От друга страна, $m = n - 1$ за всяко дърво. Заместваме:

$$2n - 3026 = n - 1 \quad\Longleftrightarrow\quad 2n - n = 3026 - 1 \quad\Longleftrightarrow\quad n = 3025.$$

Отговор: Всяко троично кореново дърво с 2017 листа има 3025 върха.

Задача 3 се решава чрез математическа индукция по k. Допустими са целите $k \geq 0$.

База: $k = 0$. Всеки граф с $2^k = 2^0 = 1$ връх съдържа път с $k + 1 = 0 + 1 = 1$ връх, а именно пътя, съставен от единствения връх на графа. Такъв път (с един-единствен връх) очевидно не съдържа повтарящи се върхове, тоест всичките му върхове са различни.

Индуктивна стъпка: Да предположим, че за някое цяло неотрицателно k е вярно, че всеки пълен ориентиран граф с 2^k върха съдържа път с $k + 1$ различни върха. Ще докажем, че всеки пълен ориентиран граф с 2^{k+1} върха съдържа път с $(k + 1) + 1 = k + 2$ различни върха.

Действително, да вземем произволен граф с 2^{k+1} върха и да разделим върховете му (няма значение как) на две равни половини U и V, $U \cap V = \varnothing$, тоест $|\,U\,| = |\,V\,| = \dfrac{2^{k+1}}{2} = 2^k$. Индуктивното предположение важи за подграфите, индуцирани от U и V. Следователно има път $u_1 \longrightarrow u_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow u_k \longrightarrow u_{k+1}$, съставен от $k + 1$ различни върха от U, както и път $v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow v_k \longrightarrow v_{k+1}$, съставен от $k + 1$ различни върха от V.

По условие има ребро между върховете u_1 и v_1. Ако това ребро сочи от u_1 към v_1, то $u_1 \longrightarrow v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow v_k \longrightarrow v_{k+1}$ е път с $k + 2$ различни върха. Ако ли пък споменатото ребро сочи от v_1 към u_1, тогава $v_1 \longrightarrow u_1 \longrightarrow u_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow u_k \longrightarrow u_{k+1}$ е път с $k + 2$ различни върха.

И така, произволен ориентиран граф с 2^{k+1} върха съдържа път с $k + 2$ различни върха, което трябваше да се докаже.

Задача 4

а) *Симетричност:* За всички допустими x и y са в сила следните еквивалентности:

$$xRy \iff x + y \text{ е точна степен на } 3 \iff y + x \text{ е точна степен на } 3 \iff yRx.$$

Първата и третата еквивалентност повтарят дефиницията на R. Втората еквивалентност следва от разместителното свойство: $x + y = y + x$.

Доказахме, че $xRy \iff yRx$ за $\forall x \in V$, $\forall y \in V$. Следователно релацията R е симетрична.

Антирефлексивност: Да допуснем, че R не е антирефлексивна, тоест $\exists x \in V$, за което xRx. Тогава $x + x = 2x$ е точна степен на 3. Това обаче не е възможно, защото числото x е цяло, следователно $2x$ е четно, а всички степени на 3 са нечетни числа.

б) Задачата се решава лесно, ако се забележи едно важно свойство на графа G: той е двуделен. Между два върха x и y има ребро $\iff xRy \iff x + y$ е точна степен на 3 $\Rightarrow$ числата x и y са с различна четност. (Последната импликация следва от това, че степените на 3 са нечетни числа.) Единият дял на графа съдържа четните върхове, а другият — нечетните.

Ако един двуделен граф е хамилтонов (тоест ако съдържа хамилтонов цикъл), то двата дяла имат равен брой върхове. Следователно, ако един двуделен граф е хамилтонов, то броят на върховете му е четно число. Но графът G от задачата е двуделен и има $2n + 1$ върха, което е нечетно число. Значи, G не е хамилтонов граф.

Забележка 1: Равенството на броя на върховете на двата дяла представлява необходимо, но не и достатъчно условие за съществуването на хамилтонов цикъл в двуделен граф. Например графът с $2n$ върха и 0 ребра е двуделен и върховете могат да се разделят на два дяла така, че да има по n върха във всеки дял; въпреки това не съществува хамилтонов цикъл.

Забележка 2: Аналогично, за съществуването на хамилтонов път в двуделен граф е необходимо (но не е достатъчно!) двата дяла да имат "почти равен" брой върхове, тоест двете бройки да са равни или да се различават с една единица. В последния случай началото и краят на хамилтоновия път (ако има такъв) са върхове от по-големия дял на графа.