Примерни решения на изпита-задачи по Дискретни Структури, КН, II поток, 10 февруари 2018 г.

Задача 1 Нека $A = \{100, 101, \ldots, 199\}$. Нека B е произволно подмножество на A, такова че $|B| = 52$. Докажете, че B съдържа две числа, чиято сума е 300.

Решение. Следните двуелементни подмножества на A са точно тези, за които сумата на елементите е 300:

$$\{101, 199\}, \{102, 198\}, \ldots, \{149, 151\}$$

Техният брой е 49. Две числа от A остават извън тях: 100 и 150. Нека четиридесет и деветте двуелементни подмножества и двете числа са "чекмеджетата". Чекмеджетата са 51, като 49 от тях имат капацитет две, а другите две има капацитет едно. "Ябълките" са елементите на B. Тъй като $|B| = 52$, по принципа на Дирихле има поне едно чекмедже с поне две ябълки. Но това чекмедже трябва да е измежду тези с капацитет две. Което е същото като да са избрани (поне) две числа, чиято сума е 300.

Задача 2 Числата на Фибоначи се дефинират така: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ за $n \geq 2$. Докажете, че

$$\forall n \geq 1 : \sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$$

Решение. Ще докажем твърдението с индукция по n. Базата е за $n = 1$. Тогава твърдението е

$$\sum_{i=1}^{1} F_i = F_{1+2} - 1$$

което е същото като

$$F_1 = F_3 - 1$$

което очевидно е вярно. ✓

Да допуснем, че твърдението е вярно за някоя стойност на аргумента n. Тоест, допускаме, че

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1 \tag{1}$$

Разглеждаме твърдението за стойност на аргумента $n + 1$. Тоест, разглеждаме

$$\sum_{i=1}^{n+1} F_i = F_{n+1+2} - 1 \tag{2}$$

Извършваме следните еквивалентни преобразувания над (2):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} F_i = F_{n+1+2} - 1 \quad &\leftrightarrow \quad \texttt{// свойство на нотацията за сумиране } \Sigma \\
\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) + F_{n+1} = F_{n+1+2} - 1 \quad &\leftrightarrow \quad \texttt{// } 1 + 2 = 3 \\
\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) + F_{n+1} = F_{n+3} - 1 \quad &\leftrightarrow \quad \texttt{// съгласно индукционното предположение (1)} \\
F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+3} - 1 \quad &\leftrightarrow \quad \texttt{// комутативност и асоциативност на събирането} \\
(F_{n+2} + F_{n+1}) - 1 = F_{n+3} - 1 \quad &\leftrightarrow \quad \texttt{// дефиниция на числа на Фибоначи} \\
F_{n+3} - 1 = F_{n+3} - 1 &
\end{aligned}$$

Последното очевидно е вярно. Тогава и (2) е вярно. ✓

Задача 3 Дадени са три номерирани пръта.

2 т. **а)** По колко начина можем да нанижем 11 еднакви диска върху тези пръти? Дайте числен отговор.

18 т. **б)** По колко начина можем да нанижем 11 еднакви бели диска и 19 еднакви черни диска върху тези пръти? Няма нужда да давате числен отговор. Отговор-формула е достатъчен.

Решение.

а) Става дума за слагания на 11 еднакви топки в 3 различни кутии. Това може да стане по $\binom{11+3-1}{3-1} = \binom{13}{2}$ начина. Численият отговор е 78.

б) Георги Георгиев–Скелета: Задачата е същата като задачата, по колко начина можем да наредим 11 бели диска, 19 черни диска и 2 червени диска (които играят ролята на разделители) върху **един единствен** прът. Тези наредби съответстват биективно на наредбите от задачата с трите пръта, защото двата червени диска–разделители разделят линейната наредба от останалите дискове на точно три части (някои от които, но не всички, може да са празни). Тогава отговорът е мултиномният коефициент $\binom{32}{11, 19, 2} = \frac{32!}{11!19!2!}$.

Численият отговор, който не се иска, е 27 095 140 800.

Задача 4 Нека $A = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, 0 \le |x| \le 5\}$. Нека $B = A \setminus \{0, 5, 6, 7\}$. Нека $R \subseteq B \times B$ е дефинирана така:

$$xRy \leftrightarrow xy < 0$$

10 т. **а)** За всяко от свойствата **рефлексивност**, **антирефлексивност**, **симетричност**, **антисиметричност**, **силна антисиметричност** и **транзитивност**, докажете или опровергайте, че R има това свойство.

10 т. **б)** Разгледайте графа $G = (B, E)$, където $E = \{(u, v) \,|\, u \in B \wedge v \in B \wedge (uRv \vee vRu)\}$. Пресметнете броя на Хамилтоновите пътища в G.

Решение. Лесно се вижда, че $B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$. Числото x е в релация R с числото y тогава и само тогава, когато произведението им е отрицателно.

а) Релацията е антирефлексивна, защото никое реално число, умножено със себе си, не дава отрицателен резултат. Веднага следва, че релацията не е рефлексивна. Релацията е симетрична поради комутативността на умножението. Релацията не е антисиметрична, защото съществува поне една двойка различни елементи, да кажем $x = -1$ и $y = 1$, такива че xRy и yRx, а наличието на поне една такава двойка е несъвместимо с антисиметричността. Щом не е антисиметрична, то тя не е и силно антисиметрична, тъй като силната антисиметричност е частен случай на антисиметричността. И накрая, релацията не е транзитивна, защото съществуват x, y и z, такива че xRy и yRz, но $\neg xRz$, например $x = -1$, $y = 1$ и $z = -2$.

б) Графът $G = (B, E)$ е неориентиран† и освен това е двуделен, като единият дял са отрицателните числа, а другият дял са положителните числа. Лесно се вижда, че G е изоморфен на $K_{5,4}$. Също така лесно се вижда, че в двуделен граф няма Хамилтонови пътища, ако разликата в мощностите на дяловете е повече от едно. В случая разликата в мощностите на дяловете е точно едно; от това и от факта, че графът е пълен двуделен следва, че Хамилтонови пътища има, защото от всеки връх в даден дял може да се "прехвърлим" към който искаме непосетен връх в другия дял.

Броят на Хамилтоновите пътища в G е $\frac{1}{2}5!4!$. Сега ще покажем това. Първо една дефиниция. Да казваме, че *смесена* пермутация е всяка пермутация на B, която се получава от една пермутация на петте отрицателни числа (големият дял), в четирите "празни пространства" между които са сложени четирите положителни числа. Смесените пермутации са очевидно $5!4!$. Множеството от смесените пермутации се разбива на двуелементни подмножества, всяко от които е една смесена пермутация и нейната инверсна пермутация (тоест, същата, но написана обратно). Тези двуелементни подмножества са $\frac{1}{2}5!4! = 1\,440$. Очевидно съществува биекция между тях и Хамилтоновите пътища.

† *Това, че графът е неориентиран, следва от неговата дефиниция, а не от това, че релацията е симетрична. Ние знаем, че на симетричните релации съответстват неориентирани графи, или по-точно, можем да мислим за тези графи като за неориентирани, тъй като ориентираните им ребра са винаги "сдвоени". Но в случая графът е* ***дефиниран*** *като неориентиран и щеше да остане неориентиран дори и R да не беше симетрична.*

Задача 5 Колко са целочислените решения на уравнението

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 55$$

при ограниченията $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq -3$, $x_3 \geq 4$, $x_4 \geq -5$ и $x_5 \geq 6$?

Решение. От лекции знаем, че целочислените решения на $x_1 + \cdots + x_k = N$ при ограничения

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ &\dots \\ x_k &\geq 0 \end{aligned}$$

са толкова, колкото са начините да бъдат сложени N анонимни топки в k номерирани кутии, а именно $\binom{N+k-1}{k-1}$. За да ползваме този резултат обаче, трябва ограниченията да са от вида $x_i \geq 0$. Нека

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - 2 \leftrightarrow x_1 = x_1' + 2 \\ x_2' &= x_2 + 3 \leftrightarrow x_2 = x_2' - 3 \\ x_3' &= x_3 - 4 \leftrightarrow x_3 = x_3' + 4 \\ x_4' &= x_4 + 5 \leftrightarrow x_4 = x_4' - 5 \\ x_5' &= x_5 - 6 \leftrightarrow x_5 = x_5' + 6 \end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned} x_1 \geq 2 &\leftrightarrow x_1' \geq 0 \\ x_2 \geq -3 &\leftrightarrow x_2' \geq 0 \\ x_3 \geq 4 &\leftrightarrow x_3' \geq 0 \\ x_4 \geq -5 &\leftrightarrow x_4' \geq 0 \\ x_5 \geq 6 &\leftrightarrow x_5' \geq 0 \end{aligned}$$

Да минем към "примовите" променливи. Уравнението става

$$x_1' + 2 + x_2' - 3 + x_3' + 4 + x_4' - 5 + x_5' + 6 = 55 \leftrightarrow x_1' + x_2' + x_3' + x_4' + x_5' = 51$$

а ограниченията са просто

$$\begin{aligned} x_1' &\geq 0 \\ x_2' &\geq 0 \\ x_3' &\geq 0 \\ x_4' &\geq 0 \\ x_5' &\geq 0 \end{aligned}$$

Броят на целочислените решения на това уравнение е $\binom{51+5-1}{5-1} = 341\,055$. Това е броят на решенията и на оригиналното уравнение.

Задача 6 Разгледайте булевите функции $f(x, y) = 0110$ и $g(x, y) = 1101$.

а) Докажете, че множеството $\{f, g\}$ е пълно.

б) Намерете съвършената дизюнктивна нормална форма на функцията $f(g(x, y), g(y, x))$.

в) Намерете полинома на Жегалкин на функцията $f(g(x, y), g(y, x))$.

Решение.

а) Лесно се вижда, че $f(x, y) = x \oplus y$, а $g(x, y) = x \to y$. Да разгледаме функцията $x \oplus (x \to y)$:

x	y	$x \oplus (x \to y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Но това е функцията черта на Шефер. С други думи, $x \oplus (x \to y) = x \,|\, y$. От лекции знаем, че $\{|\}$ е пълно множество. И така, изразихме всяка функция от едно пълно множество като композиция на f и g, с което показахме, че множеството $\{f, g\}$ е пълно.

б) Да разгледаме $f(g(x, y), g(y, x))$:

x	y	$g(x, y)$	$g(y, x)$	$f(g(x, y), g(y, x))$
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	0

Но това е пак функцията сума по модул две. Нейната съвършена дизюнктивна нормална форма е $\overline{x}\,y \vee x\,\overline{y}$.

б) Щом функцията е сума по модул две, то нейният полином на Жегалкин е $x \oplus y$.