Интегрален критерий за суми

I. Какво представлява критерият:

Имаме асимптотично положителна функция $f(x)$, положителна от n_0 нататък; за $n > n_0$ искаме да покажем следното:

$$\sum_{i=n_0}^{n} f(i) \asymp \int_{n_0}^{n} f(x)dx.$$

II. За какви функции е в сила:

Ще разгледаме само някои частни случаи, при които критерият е приложим. В действителност той е приложим за по-широк клас от функции, но доказателството минава през специални функции от комплексния анализ.

Нека f е асимптотично положителна функция:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \quad f(n) > 0.$$

Освен това:

$$\exists m > 0 \quad \exists M > 0 \quad \forall n \geq n_0 : \quad m\,.f(n) \quad \leq \min_{x\in[n,\, n+1]} f(x) \quad \leq \max_{x\in[n,\, n+1]} f(x) \quad \leq \quad M.f(n).$$

Ето няколко примера.

Пример 1: $f(x) = x^2$.

За всеки интервал от вида $[n, n+1]$ минимумът на f е n^2, а максимумът е $(n+1)^2$.

Сега имаме тривиалното неравенство:

$$\forall n \geq 1: \quad 1.n^2 \leq n^2 = \min_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq \max_{x\in[n,n+1]} f(x) = (n+1)^2 \leq 4.n^2.$$

Това е горната дефиниция с $m = 1$ и $M = 4$.

Пример 2: Изобщо за $f(x) = x^\alpha$.

При $\alpha \geq 0$ имаме

$$\forall n \geq 1: \quad 1.n^\alpha \leq n^\alpha = \min_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq \max_{x\in[n,n+1]} f(x) = (n+1)^\alpha \leq 2^\alpha.n^\alpha.$$

При $\alpha < 0$ имаме

$$\forall n \geq 1: \quad 2^\alpha.n^\alpha \leq (n+1)^\alpha = \min_{x\in[n,n+1]} f(x) < \max_{x\in[n,n+1]} f(x) = n^\alpha \leq 1.n^\alpha.$$

Пример 3: $f(x) = \alpha^x$.

При $\alpha \geq 1$ имаме

$$\forall n \geq 1: \quad 1.\alpha^n \leq \alpha^n = \min_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq \max_{x\in[n,n+1]} f(x) = \alpha^{n+1} \leq \alpha.\alpha^n.$$

При $0 < \alpha < 1$ имаме

$$\forall n \geq 1: \quad \alpha.\alpha^n \leq \alpha^{n+1} = \min_{x\in[n,n+1]} f(x) < \max_{x\in[n,n+1]} f(x) = \alpha^n \leq 1.\alpha^n.$$

Пример 4: $f(x) = x^x$.

Това е пример за функция, която не е такава!

$$\forall n \geq n_0: \quad 1.n^n \leq n^n = \min_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq \max_{x\in[n,n+1]} f(x) = (n+1)^{n+1} \leq M.n^n.$$

Такова M обаче няма, тъй като

$$\forall M > 0 \quad \exists n_m \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_m: \quad (n+1).(n+1)^n \geq (n+1).n^n \geq M.n^n.$$

III. Доказателство:

Да напишем отново свойствата на f:

1. $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0: \quad f(n) > 0.$
2. $\exists m > 0 \quad \exists M > 0 \quad \forall n \geq n_0: \quad m.f(n) \leq \min\limits_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq \max\limits_{x\in[n,n+1]} f(x) \leq M.f(n).$

Нека сега $n > n_0$. Второто свойство е вярно за всички $i = n_0, \; n_0 + 1, \; \dots, \; n - 1$.

Имаме

$$m.f(i) \leq \min_{x\in[i,i+1]} f(x) \leq \max_{x\in[i,i+1]} f(x) \leq M.f(i)$$

Сумираме по всички такива i и получаваме

$$m.\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) \leq \sum_{i=n_0}^{n-1} \min_{x\in[i,i+1]} f(x) \leq \sum_{i=n_0}^{n-1} \max_{x\in[i,i+1]} f(x) \leq M.\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i)$$

Двете суми в средата представляват суми на Дарбу за интервала $[n_0, \; n]$ и диаметър на разбиване 1.

Между тях се намира съответният интеграл:

$$m.\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) \leq \sum_{i=n_0}^{n-1} \min_{x\in[i,i+1]} f(x) \leq \int_{n_0}^{n} f(x)dx \leq \sum_{i=n_0}^{n-1} \max_{x\in[i,i+1]} f(x) \leq M.\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i).$$

Тогава

$$\int_{n_0}^{n} f(x)dx = \Theta\left(\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i)\right),$$

което поради рефлексивността на Θ може да се запише и като

$$\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) = \Theta\left(\int_{n_0}^{n} f(x)dx\right).$$

Забележка: Критерият може да се използва и в този вид.

Остава да направим прехода от сума за $n-1$ към сума за n. Имаме следното:

$$m\,.\,f(i) \le \min_{x\in[i,i+1]} f(x) \le f(i+1) \le \max_{x\in[i,i+1]} f(x) \le M.f(i)$$

Отново сумираме по $i = n_0\,,\ \dots\ ,\ n-1$, след което прибавяме положителното $f(n_0)$:

$$m\,.\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) \le \sum_{i=n_0+1}^{n} f(i) \le M.\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; m\,.\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) \le m\,.\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) + f(n_0) \le \sum_{i=n_0}^{n} f(i) \le M.\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) + f(n_0) \le (M+1).\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i).$$

Тоест

$$\sum_{i=n_0}^{n} f(i) = \Theta\left(\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i)\right).$$

Сега от транзитивността на Θ имаме

$$\sum_{i=n_0}^{n} f(i) = \Theta\left(\int_{n_0}^{n} f(x)dx\right).$$

IV. Приложения:

Пример 1:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \asymp \ln n.$$

Тази сума е за функция от вида x^{α}, а за нея вече видяхме, че са изпълнени исканите свойства.

В случая $\alpha = -1$ имаме

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \Theta\left(\int_{1}^{n} \frac{1}{x} dx = \ln n\right).$$

Пример 2:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \asymp \sqrt{n}\,.$$

Тази сума е за $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \quad = \Theta\left(\int_{1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{n} - 2\right) = \Theta(\sqrt{n}).$$

Пример 3:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \asymp 1.$$

Тази сума е за $f(x) = x^{-2}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} = \Theta\left(\int_{1}^{n} \frac{1}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{n}\right) = \Theta(1).$$

Изобщо за x^{α} имаме

$$\sum_{i=1}^{n} i^{\alpha} = \Theta\left(\int_{1}^{n+1} x^{\alpha} dx\right) = \begin{cases} \Theta(n^{\alpha+1}) & , \quad \alpha > -1\,; \\ \Theta(\ln n) & , \quad \alpha = -1\,; \\ \Theta(1) & , \quad \alpha < -1\,. \end{cases}$$