

ДОМАШНО № 1 по дисциплината “ДИСКРЕТНИ СТРУКТУРИ”
ЗА СПЕЦИАЛНОСТ “КОМПЮТЪРНИ НАУКИ”, I КУРС, II ПОТОК,
ЗИМЕН СЕМЕСТЪР НА 2016/2017 уч. г. в СУ, ФМИ

Име: Факултетен № Група:

Задача	1	2	3	4	Общо
получени точки					
максимум точки	10	10	10	10	40

Забележка 1: Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.

Забележка 2: Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!

Задача 1. Преценете дали е вярно следното твърдение:

$$\left(\forall A \in 2^{\mathbb{N}} \setminus \{\emptyset\}\right) \left(\exists x \in A\right) \left(x \text{ е четно} \rightarrow \left(\forall y \in A\right) (y \text{ е четно})\right).$$

Задача 2. Едно семейство от множества се нарича верига относно релацията включване, ако за всеки две различни множества A и B от семейството е в сила включването $A \subset B$ или $B \subset A$.
Постройте неизброима верига от подмножества на \mathbb{N} .

Упътване: Използвайте множеството \mathbb{Q} като посредник. Както е известно, \mathbb{Q} притежава две противоположни свойства:

- \mathbb{Q} е изброимо, следователно е равномоотно на \mathbb{N} (в този смисъл \mathbb{Q} е “малко” множество);
- \mathbb{Q} е гъсто в \mathbb{R} , т.е. между всеки две различни реални числа има поне едно рационално число (в този смисъл \mathbb{Q} е “голямо” множество).

Задача 3. Разглеждаме функциите $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

а) Покажете с пример, че $f \cup g$ може да не е функция. (3 точки)

б) Докажете, че $h = f \cap g$ е функция.

Какво представлява дефиниционното множество на функцията h ? На колко е равно $h(x)$?

Отговорете на горните два въпроса най-напред в общия случай, а после — в частния случай $f(x) = x^3$ и $g(x) = |x|^3$. Направете чертеж. (7 точки)

Задача 4. Нека A е множество от селища, а R е двучленна релация над A , дефинирана по следния начин: $xRy \iff$ от селището x до селището y може да се стигне по суша.

а) Докажете, че R е релация на еквивалентност. (4 точки)

б) Нека множеството A се състои от следните гръцки селища: Антипата, Аргостоли, Гувия, Закинт, Катастари, Кери, Керкира, Лефкими, Лиападес, Ликсури, Периволи, Сами, Скала. Опишете класовете на еквивалентност чрез явно изброяване (3 точки)
и им дайте географско тълкуване. (3 точки)

Упътване: Използвайте картата на Йонийско море (вж. следващата страница).



РЕШЕНИЯ

Задача 1. Твърдението $(\forall A \in 2^{\mathbb{N}} \setminus \{\emptyset\}) (\exists x \in A) (x \text{ е четно} \rightarrow (\forall y \in A) (y \text{ е четно}))$ е вярно. Действително, нека A е произволно непразно множество от естествени числа. Има два случая.

Първи случай: A съдържа само четни числа. Избираме за x произволно число от A (можем да направим това, понеже множеството A е непразно). Импликацията

$$x \text{ е четно} \rightarrow (\forall y \in A) (y \text{ е четно})$$

е истина, защото консеквентът е истина: всички числа от множеството A са четни.

Втори случай: A съдържа поне едно нечетно число. Избираме за x някое нечетно число от A . Импликацията

$$x \text{ е четно} \rightarrow (\forall y \in A) (y \text{ е четно})$$

е истина, защото антецедентът е неистина: x е нечетно, понеже така го избрахме.

И тъй, във всички случаи съществува подходящо $x \in A$. Този извод важи за произволно непразно множество A от естествени числа, а точно това гласи твърдението, което доказваме; следователно то е вярно.

Задача 2. Решението се състои от две стъпки: първо доказваме, че \mathbb{N} може да се замени с \mathbb{Q} в условието на задачата, после решаваме новата задача (за \mathbb{Q} вместо за \mathbb{N}).

Както е известно, \mathbb{Q} е изброимо, тоест \mathbb{Q} е равномошно на \mathbb{N} . С други думи, съществува биекция $n \leftrightarrow q_n$ между $\mathbb{N} = \{0; 1; 2 \dots\}$ и $\mathbb{Q} = \{q_0; q_1; q_2 \dots\}$. Тя поражда биекция f между $2^{\mathbb{N}}$ и $2^{\mathbb{Q}}$, а именно: $f(A) = \{q_n : n \in A\} \in 2^{\mathbb{Q}}, \forall A \in 2^{\mathbb{N}}$. Например $f(\emptyset) = \emptyset$, $f(\mathbb{N}) = \mathbb{Q}$, $f(\{23; 66; 887\}) = \{q_{23}; q_{66}; q_{887}\}$. Биекцията f запазва релациите включване и строго включване, т.е. $A \subseteq B \iff f(A) \subseteq f(B)$, $A \subset B \iff f(A) \subset f(B)$. Затова f^{-1} преобразува верига от подмножества на \mathbb{Q} във верига от подмножества на \mathbb{N} , например веригата

$$\{q_4; q_7\} \subset \{q_4; q_7; q_{23}\} \subset \{q_4; q_7; q_{23}; q_{17}; q_8\}$$

под действието на f^{-1} се преобразува във веригата

$$\{4; 7\} \subset \{4; 7; 23\} \subset \{4; 7; 23; 17; 8\}.$$

Понеже f^{-1} е биекция, f^{-1} запазва броя на множествата във веригата, тоест преобразува неизброима верига в неизброима верига. Затова е достатъчно да построим неизброима верига от подмножества на \mathbb{Q} (вместо на \mathbb{N}).

За целта на всяко реално число x съпоставяме $B_x = \mathbb{Q} \cap (-\infty; x]$, т.е. множеството от рационалните числа, ненадвишаващи x . Съвкупността от тези множества $\{B_x : x \in \mathbb{R}\}$ е верига, защото, ако $x \leq y$, то $B_x \subseteq B_y$, т.е. всеки две множества са сравними относно включването. Нещо повече, ако $x < y$, то $B_x \subset B_y$, защото \mathbb{Q} е гъсто в \mathbb{R} , поради което между x и y има поне едно рационално число (то принадлежи на B_y , но не и на B_x). Веригата изглежда така:

$$\dots \subset B_{-1} \subset \dots \subset B_{-0,4} \subset \dots \subset B_{\sqrt{2}} \subset \dots$$

Веригата е безкрайна в двете посоки и между всеки две множества има безброй други. На различни $x \in \mathbb{R}$ съответстват различни B_x , следователно веригата е равномошна на \mathbb{R} , значи е неизброима.



Понеже f е биекция, запазваща релацията включване, то съвкупността $\{f^{-1}(B_x) : x \in \mathbb{R}\}$ е неизброима верига от подмножества на \mathbb{N} .

Задача 3.

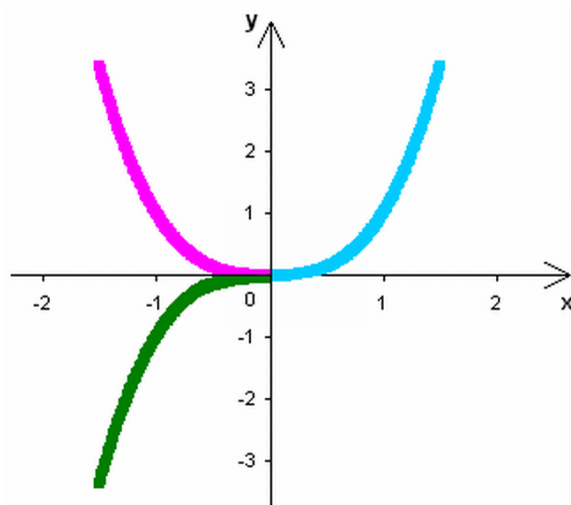
а) Нека $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$. Тогава $f(10) = 10^2 = 100$ и $g(10) = 10^3 = 1000$. С други думи, $(10; 100) \in f$ и $(10; 1000) \in g$. Значи $(10; 100)$ и $(10; 1000)$ принадлежат на обединението $f \cup g$, поради което то не може да бъде функция: на една и съща стойност на аргумента (10) не може да съответстват две функционални стойности (100 и 1000).

б) Нека $h = f \cap g$. Да допуснем, че h не е функция, т.е. h не е еднозначно определена. Тогава съществуват реални числа x , y_1 и y_2 , такива, че $y_1 \neq y_2$, $(x; y_1) \in h$, $(x; y_2) \in h$. Щом f и g са функции (т.е. еднозначно определени), то $(x; y_1) \in f$, $(x; y_2) \in g$ или $(x; y_1) \in g$, $(x; y_2) \in f$. И в двата случая $f(x) \neq g(x)$, защото $y_1 \neq y_2$.

И така, h не е дефинирана за тези реални числа x , за които $f(x) \neq g(x)$. За всички други x функцията h е дефинирана. Окончателно, $h = f \cap g$ е функция с дефиниционно множество $D = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\}$. За всяко x от множеството D стойността на $h(x)$ е общата стойност на $f(x)$ и $g(x)$, т.е. $h(x) = f(x) = g(x)$.

В частния случай $f(x) = x^3$ и $g(x) = |x|^3$ решаваме уравнението $f(x) = g(x) \iff x^3 = |x|^3 \iff x = |x| \iff x \geq 0$, тоест $D \equiv [0; +\infty)$ е дефиниционното множество на функцията $h = f \cap g$. Тази функция е определена чрез равенството $h(x) = x^3$ за всяко $x \geq 0$.

Трите функции са изобразени на чертежа. Графиката на f се състои от зелената и синята линия, а графиката на g — от розовата и синята. Графиката на h е синята линия — сечението на графиките на f и g .



Задача 4.

а) От всяко селище x може да се стигне по суша до същото селище x : изобщо не е нужно да се излиза от селището (път с дължина нула). Следователно xRx за $\forall x \in A$, т.е. релацията R е рефлексивна.

Ако от селището x може да се стигне по суша до селището y , то и от y може да се стигне по суша до x — по обратния път. Следователно от xRy следва yRx за $\forall x \in A$ и $\forall y \in A$, т.е. релацията R е симетрична.

Ако от селището x може да се стигне по суша до селището y , а от селището y може да се стигне по суша до селището z , то от x може да се стигне по суша до z : първо — от x до y , после — от y до z . Следователно от xRy и yRz следва xRz за $\forall x \in A$, $\forall y \in A$ и $\forall z \in A$, т.е. релацията R е транзитивна.

Щом R е рефлексивна, симетрична и транзитивна, то тя е релация на еквивалентност.

б) От географската карта е видно, че множеството A се разбива на три класа на еквивалентност:

$$A_1 = \{ \text{Лefкими, Керкира, Гувия, Периволи, Лиападес} \},$$

$$A_2 = \{ \text{Ликсури, Антипата, Сами, Аргостоли, Скала} \},$$

$$A_3 = \{ \text{Катастари, Закинт, Кери} \}.$$

Всеки клас на еквивалентност съответства на един остров:

A_1 — на о-в Корфу; A_2 — на о-в Кефалония; A_3 — на о-в Закинт.