

Име: _____, ФН: _____, Спец./курс: _____

Задача	1	2	3	4	5	6	Общо
получени точки							
максимум точки	20	20	20	20	20	20	120

Забележка: За отлична оценка са достатъчни 100 точки!

Задача 1 В равнината е даден квадратът $S = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 5\}$. Релацията $R \subset S \times S$ е определена по следния начин:

$$R = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mid x_1 = x_2, y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}\}$$

Да се докаже, че R е релация на еквивалентност и да се определи класът на еквивалентност на точката $(2, 4)$.

Задача 2 Дадено е множество A и функции $f : A \rightarrow A$ и $g : A \rightarrow A$, които са биекции. Известно е, че $\exists x_0 \in A : f(x_0) \neq g(x_0)$. Докажете, че $\exists x_1 \in A : x_1 \neq x_0, f(x_1) \neq g(x_1)$.

Задача 3 Нека $n \in \mathbb{N}^+$ и $a_n = 2 + 8 + 24 + \dots + n2^n$. Намерете формула за a_n , като съставите линейно рекурентно уравнение за a_n и го решите при подходящи начални условия.

Задача 4 Точките от една окръжност са оцветени в два цвята. Докажете, че съществува равнобедрен триъгълник с едноцветни върхове, лежащи на окръжността.

Упътване: Впишете правилен петъгълник в окръжността и разсъждавайте за цветовете на върховете му.

Задача 5 Нека графът B_n е n -мерният двоичен куб (върховете са всички n -мерни двоични вектори, два върха са свързани, ако векторите им се различават на точно една позиция). Дайте обосновани отговори на следните въпроси:

- Колко ребра има най-късият път от връх $\alpha = 00 \dots 0$ до връх $\beta = 11 \dots 1$?
- Какъв е броят на всички най-кратки пътища от връх α до връх β ?

Задача 6 Напишете свършената ДНФ и полинома на Жегалкин на булевата функция $f(x, y, z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \oplus z)$.

Примерни решения

Задача 1. $((x; y); (x; y)) \in R$ за всички x и y , защото $x = x$ и $y - y = 0 \in \mathbb{Z}$; затова релацията R е рефлексивна.

Ако $((x_1; y_1); (x_2; y_2)) \in R$, то по определение $x_1 = x_2$ и $y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}$. Понеже равенството е симетрична релация, то $x_2 = x_1$. А тъй като противоположното на всяко цяло число е пак цяло число, то $-(y_1 - y_2) = y_2 - y_1 \in \mathbb{Z}$. От $y_2 - y_1 \in \mathbb{Z}$ и $x_2 = x_1$ следва, че $((x_2; y_2); (x_1; y_1)) \in R$. Значи релацията R е симетрична.

Нека $((x_1; y_1); (x_2; y_2)) \in R$ и $((x_2; y_2); (x_3; y_3)) \in R$. Следователно $x_1 = x_2$, $x_2 = x_3$, $y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}$, $y_2 - y_3 \in \mathbb{Z}$. От транзитивността на равенството следва, че $x_1 = x_3$. Понеже сбор на две цели числа е отново цяло число, то получаваме: $(y_1 - y_2) + (y_2 - y_3) = y_1 - y_3 \in \mathbb{Z}$. От $x_1 = x_3$ и $y_1 - y_3 \in \mathbb{Z}$ следва, че $((x_1; y_1); (x_3; y_3)) \in R$. Правим извод, че релацията R е транзитивна.

И така, R е рефлексивна, симетрична и транзитивна. Следователно R е релация на еквивалентност.

Класът на еквивалентност на точката $(2; 4)$ е множеството от всички точки $(x; y)$, за които $x = 2$ и $y - 4$ е цяло число, т.е. y е цяло число. Понеже $0 \leq y \leq 5$, то възможните стойности на y са числата $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Окончателно, търсеният клас на еквивалентност е множеството от шест точки $\{(2; 0), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (2; 5)\}$.

Задача 2. Нека $y^* = f(x_0)$. Тъй като $f: A \rightarrow A$, то $y^* \in A$. Понеже $g: A \rightarrow A$ е биекция (а значи и сюрекция), то $\exists x_1 \in A$, за което $y^* = g(x_1)$.

От веригата равенства и неравенства $g(x_1) = y^* = f(x_0) \neq g(x_0)$ следва, че $g(x_1) \neq g(x_0)$. За произволно изображение (в т.ч. и за даденото g) следва, че $x_1 \neq x_0$.

Остава да докажем, че $f(x_1) \neq g(x_1)$. Да допуснем противното: че $f(x_1) = g(x_1)$. Тогава $f(x_1) = g(x_1) = y^* = f(x_0)$, т.е. $f(x_1) = f(x_0)$. Понеже $f: A \rightarrow A$ е биекция (а значи и инекция), то $x_1 = x_0$, което противоречи на неравенството $x_1 \neq x_0$.

Задача 3. В равенството $a_n = 2 + 8 + 24 + \dots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n$ пишем $n-1$ вм. n и получаваме второ равенство: $a_{n-1} = 2 + 8 + 24 + \dots + (n-1) \cdot 2^{n-1}$. Изваждаме второто равенство от първото: $a_n - a_{n-1} = n \cdot 2^n$, тоест $a_n = a_{n-1} + n \cdot 2^n$ за всяко цяло $n \geq 2$. Това е търсеното линейно рекурентно уравнение. То е нехомогенно уравнение с фиксиран брой събираеми и с постоянни коефициенти (с изключение на свободния член, който е от специален вид: полином по експонента), затова може да се реши с помощта на характеристично уравнение: $\lambda^n = \lambda^{n-1}$, което след деление на $\lambda^{n-1} \neq 0$ дава $\lambda = 1$.

От свободния член $n \cdot 2^n$ идват две двойки (две, защото полиномът е от първа степен). Получава се мултимножеството $\{1; 2; 2\}_M$. Следователно

$$a_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot 2^n + C_3 \cdot n \cdot 2^n, \text{ т.е. } a_n = C_1 + C_2 \cdot 2^n + C_3 \cdot n \cdot 2^n,$$

където коефициентите C_1, C_2, C_3 са неопределени. За да ги намерим, имаме нужда от три уравнения, т.е. от три начални условия.

От дефиницията на a_n се вижда, че $a_1 = 2$, $a_2 = 2 + 8 = 10$ и $a_3 = 2 + 8 + 24 = 34$.

Във формулата $a_n = C_1 + C_2 \cdot 2^n + C_3 \cdot n \cdot 2^n$ заместваем n с 1, с 2 и с 3, при което получаваме следната система от линейни уравнения:

$$\begin{cases} C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 2 \\ C_1 + 4C_2 + 8C_3 = 10 \\ C_1 + 8C_2 + 24C_3 = 34 \end{cases}$$

Като я решим, намираме $C_1 = 2$, $C_2 = -2$, $C_3 = 2$. Заместваем във формулата за a_n :

$$a_n = 2 - 2 \cdot 2^n + 2n \cdot 2^n, \text{ т.е. } a_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2 \text{ за всяко цяло положително } n.$$

Задача 4. В дадената окръжност вписваме правилен петогълник $ABCDE$.

Прилагаме принципа на Дирихле: цветовете са чекмеджета (две на брой), а върховете са предмети (пет на брой). Тъй като $5 : 2 = 2$ остатък 1, то следва, че поне три от върховете на петогълника са оцветени в един и същи цвят. Тези три върха образуват равнобедрен триъгълник с едноцветни върхове.

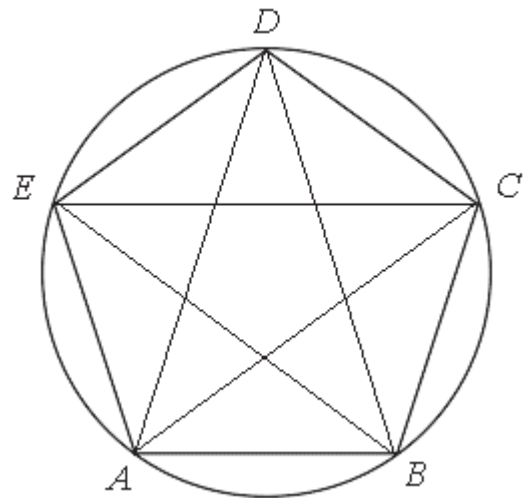
Причината е, че всеки три върха на правилен петогълник образуват равнобедрен триъгълник. Това се доказва така:

От върховете на петогълника се образуват $C_5^3 = 10$ триъгълника.

Пет от тях — $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDE$, $\triangle DEA$, $\triangle EAB$ — съдържат по две страни на петогълника. Тези пет триъгълника са равнобедрени, тъй като всеки две страни на правилния петогълник са равни (например за $\triangle ABC$ имаме $AB = BC$).

Останалите пет триъгълника — $\triangle ABD$, $\triangle BCE$, $\triangle CDA$, $\triangle DEB$, $\triangle EAC$ — съдържат по два диагонала на петогълника и също са равнобедрени, защото всеки два диагонала на правилния петогълник са равни (например за $\triangle ABD$ имаме $AD = DB$).

И така, които и три върха на правилен петогълник да вземем, те ще образуват равнобедрен триъгълник. Всеки от петте върха е оцветен в един от два възможни цвята, затова поне три върха са оцветени в един и същи цвят. Тези три върха образуват равнобедрен триъгълник с едноцветни върхове.



Задача 5.

а) При преминаване по ребро настъпва промяна в точно една координата. Тъй като върховете $\alpha = 00\dots 0$ и $\beta = 11\dots 1$ се различават във всичките си n координати, то нужни са най-малко n промени. Затова не съществува път от $\alpha = 00\dots 0$ до $\beta = 11\dots 1$ с дължина, по-малка от n . Един възможен път с дължина n е следният:

$$\alpha = 00\dots 0 \rightarrow 10\dots 0 \rightarrow 11\dots 0 \rightarrow \dots \rightarrow \beta = 11\dots 1,$$

при който се променя първо първата координата, после — втората, после — третата и т.н. до n -тата координата включително.

Отговор: а) Дължината на най-късия път от α до β е равна на n .

б) Всички най-кратки пътища от α до β имат дължина n . Следователно за всеки от най-кратките пътища всяка координата на текущия връх се променя точно веднъж. Затова на всеки най-кратък път от α до β можем да съпоставим редица $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, където a_k е номерът на координатата, променена на k -тата стъпка, $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Например за пътя с дължина n от подусловие “а” редицата е $1, 2, 3, \dots, n$. За произволен най-кратък път всички членове на редицата $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ са номера на координати, т.е. цели числа от 1 до n (вкл.); при това, членовете на редицата са два по два различни, тъй като всяка координата се променя точно веднъж. Следователно всяка редица от описания вид е пермутация на целите числа от 1 до n (вкл.).

И така, на всеки най-кратък път от α до β съответства пермутация на целите числа от 1 до n (вкл.).

Обратно, на всяка пермутация $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ на целите числа от 1 до n (вкл.) съответства най-кратък път от α до β , а именно: пътят, при който първо се променя координата № a_1 , след това — координата № a_2 , после — координата № a_3 и т.н. На последната стъпка се променя координата № a_n . (Пътят е най-кратък, защото има най-малката възможна дължина: n .)

Показахме, че съществува взаимноеднозначно изображение между множеството на най-кратките пътища от α до β и множеството на пермутациите на целите числа от 1 до n (вкл.). Следователно най-кратките пътища са толкова на брой, колкото са пермутациите на n елемента: $P_n = n!$

Отговор: б) Броят на най-кратките пътища от върха α до върха β е равен на $n!$

Задача 6. Съвършената ДНФ на булевата функция $f = (x \rightarrow y) \wedge (x \oplus z)$ може да бъде намерена по два начина: чрез преобразуване на дадената формула или чрез построяване на таблицата на дадената функция f . Тук ще използваме таблица.

x	y	z	$x \rightarrow y$	$x \oplus z$	$f = (x \rightarrow y) \wedge (x \oplus z)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Единиците означават логическата стойност истина (true), а нулите — неистина (false).

От втория, четвъртия и седмия ред на таблицата получаваме съвършената ДНФ на f :

$$f = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee x y \bar{z}.$$

Полиномът на Жегалкин също може да се намери по два начина: чрез преработване на получената съвършена ДНФ или чрез преработване на формулата, дадена в условието. И двата начина са верни, но по-лесен е вторият.

И така, $f = (x \rightarrow y) \wedge (x \oplus z)$ по условие. Заменяме импликацията: $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$, а дизюнкцията — по един от законите на Август де Морган: $\bar{x} \vee y = \overline{x \bar{y}}$. Както е прието при работа с полиномите на Жегалкин, пишем $+$ вместо \oplus и точка вместо \wedge (или без знак).

Получаваме $f = \left(\overline{x \bar{y}} \right) \cdot (x + z)$. Заместваме отрицанието по формулата $\overline{x} = x + 1$.

Следователно $f = (x \cdot (y + 1) + 1) \cdot (x + z)$. Разкриваме скобите и опростяваме получения израз чрез законите за поглъщане: $x \cdot x = x$ и $x + x = 0$.

$$f = x x (y + 1) + x (y + 1) z + x + z = x (y + 1) + x (y + 1) z + x + z,$$

$$f = x y + \cancel{x} + x y z + x z + \cancel{x} + z = x y z + x y + x z + z.$$

Окончателно, $f = x y z + x y + x z + z$ е полиномът на Жегалкин на функцията f .