

## УПРАЖНЕНИЕ 3 ПО ДИСКРЕТНИ СТРУКТУРИ, КН2, ЗИМЕН СЕМЕСТЪР 2016-2017 г.

## РЕЛАЦИИ

Казвайки “релация” без допълнителни уточнения, имаме предвид релация от вида  $R \subseteq A \times A$ . Казвайки “релация над  $A$ ”, имаме предвид, че  $A$  е множество, такова че  $R \subseteq A \times A$ . Когато казваме “крайна релация”, имаме предвид, че множеството, над което е релацията, е крайно. Казвайки “релация над декартовия квадрат  $A \times A$ ” имаме предвид същото нещо, а именно, че  $R \subseteq A \times A$ ; а **не** че  $R \subseteq (A \times A) \times (A \times A)$ . Фактът, че  $a \in A$  и  $b \in A$  са в релация бележим с “ $(a, b) \in R$ ” или с по-краткия запис “ $aRb$ ”.

Нека за всяко естествено число  $n$ ,  $J_n$  е множеството  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ , а  $I_n$  е множеството  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

vspace1cm

**Определение 1.** Нека  $R$  е релация над  $A$ . Нека домейните за  $a$ ,  $b$  и  $c$  са  $A$ .

- $R$  е рефлексивна, ако  $\forall a(aRa)$ .
- $R$  е ирефлексивна, ако  $\forall a(\neg aRa)$ .
- $R$  е симетрична, ако  $\forall a\forall b(aRb \rightarrow bRa)$ .
- $R$  е антисиметрична, ако  $\forall a\forall b(aRb \wedge bRa \rightarrow a = b)$ .
- $R$  е силно антисиметрична, ако  $\forall a\forall b(a \neq b \rightarrow ((aRb \wedge \neg bRa) \vee \neg(aRb \wedge bRa)))$ .
- $R$  е транзитивна, ако  $\forall a\forall b\forall c(aRb \wedge bRc \rightarrow aRc)$ .

Когато се каже, изследвайте релацията  $R$  за шестте свойства, се разбира следното: за всяко от шестте изброени горе свойства, да се определи дали  $R$  притежава това свойство, или не. □

Дадена крайна релация може да се опише в явен вид по три начина. Може да се изброят в явен вид наредените двойки, които ѝ принадлежат, може да се състави матрицата ѝ (което е същото нещо, написано по-кратко и прегледно), и може да се нарисува графът ѝ.

**Задача 1.** Нека  $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 21\}$ . Опишете в явен вид релацията  $R$  и по трите начина, ако  $R$  е дефинирана така: за всеки  $a$  и  $b$  от  $A$ ,  $aRb$  тогава и само тогава, когато

1.  $a = b$
2.  $a \neq b$
3.  $a + b = 2$
4.  $a * b = 2$
5.  $\exists k \in \mathbb{N}(a + b = 2k)$
6.  $a$  дели  $b$

7.  $a$  и  $b$  са взаимно прости<sup>†</sup>

**Решение:** Ще решим 5. Преведено на естествен език, условието казва, че всеки два елемента са в релация тогава и само тогава, когато сумата им е четно (неотрицателно) число.

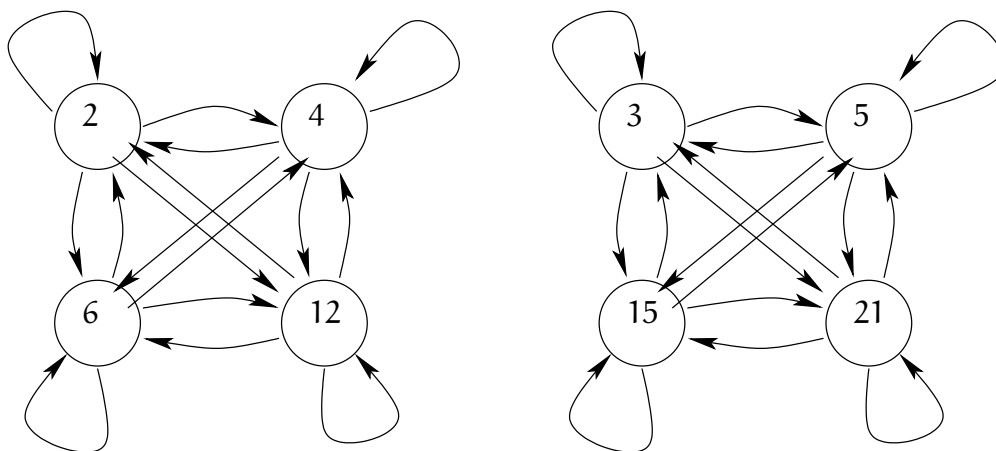
**Първи начин**

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 12), (3, 3), (3, 5), (3, 15), (3, 21), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (4, 12), (5, 3), (5, 5), (5, 15), (5, 21), (6, 2), (6, 4), (6, 12), (12, 2), (12, 4), (12, 6), (12, 12), (15, 3), (15, 5), (15, 15), (15, 21), (21, 3), (21, 5), (21, 15), (21, 21)\}$$

**Втори начин** (нулите не са написани)

	2	3	4	5	6	12	15	21
2	1		1		1	1		
3		1		1			1	1
4	1		1		1	1		
5		1		1			1	1
6	1		1		1	1		
12	1		1		1	1		
15		1		1			1	1
21		1		1			1	1

**Трети начин**



<sup>†</sup> Две естествени числа  $m$  и  $n$ , такива че  $m \geq 2$  и  $n \geq 2$ , са *взаимно прости*, ако единственото цяло положително число, което ги дели и двете, е единицата.

**Задача 2.** За всяка от релациите от предната задача, изследвайте релацията за шестте свойства.

**Решение:** Ще изследваме 7.

- Релацията не е рефлексивна, понеже всяко от числата е различно от 1 и се дели на себе си.
- Релацията е ирефлексивна – по същата причина, а именно, че никое от числата не е взаимно просто със себе си.
- Релацията е симетрична, тъй като за всяко цяло положително число  $k$ , това число или е общ делител на две числа  $m$  и  $n$ , или не е. Дали казваме “на  $m$  и  $n$ ” или “на  $n$  и  $m$ ”, няма значение.

По-формално можем да кажем същото нещо така. Нека  $Q(m, n, k)$  е триместен предикат, в който домейните на първата и втората променлива са  $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , а на третата променлива е  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  (тоест  $\mathbb{N}^+$ ). Нека  $Q(m, n, k)$  е истина тогава и само тогава, когато  $k$  е общ делител на  $m$  и  $n$ . Нека  $P(m, n)$  е предикатът “ $m$  и  $n$  са взаимно прости” с домейни  $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Предикатът  $P(m, n)$  можем да изразим така:

$$P(m, n) : \quad \forall k(Q(m, n, k) \rightarrow k = 1)$$

Тъй като  $\forall m \forall n \forall k(Q(m, n, k) \leftrightarrow Q(n, m, k))$ , то релацията е симетрична.

- Релацията не е антисиметрична, понеже можем да посочим поне две числа  $x$  и  $y$  от дадените, такива че  $xRy$  и  $yRx$ , примерно 2 и 4.
- Релацията не е силно антисиметрична, понеже е симетрична (симетричността и силната антисиметричност са несъвместими).
- Релацията не е транзитивна. Като контрапример: 6 и 5 са взаимно прости, 5 и 21 са взаимно прости, но 6 и 21 не са (имат общ делител 3).

**Определение 2.** Нека  $R \subseteq A \times B$  е двуместна релация. Обратната релация на  $R$  е релацията  $R^{-1} = \{(a, b) \mid a \in B \wedge b \in A \wedge (b, a) \in R\}$ . Релацията-допълнение на  $R$  е релацията  $\bar{R} = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B \wedge (a, b) \notin R\}$ .  $\square$

**Задача 3.** Напишете всички елементи на релацията  $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , дефинирана така:  $R = \{(a, b, c) \mid 0 < a < b < c < 5\}$ .

**Задача 4.** За всяка от следните дефиниции на релацията  $R \subseteq A \times B$ , намерете  $R^{-1}$  и  $\bar{R}$ . Символът “ $\mathbb{R}$ ” означава множеството от реалните числа.

1.  $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, R = \{(a, b) \mid a < b\}$ .
2.  $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{N}, R = \{(a, b) \mid a \text{ дели } b\}$ .
3.  $A$  е множеството от държавите в Европа.  $B$  също е множеството от държавите в Европа.  $R = \{(a, b) \mid a \text{ и } b \text{ имат обща граница}\}$ .

**Задача 5.** Нека  $M$  е матрицата на някаква релация  $R \subseteq A \times A$ . Нека  $A$  е крайно множество с  $n$  елемента. Нека  $M$  има точно  $k$  единици. Нека  $M'$  и  $M''$  са съответно матриците на  $R^{-1}$  и  $\bar{R}$ . Колко единици има в  $M'$ ? Колко единици има в  $M''$ ?

**Задача 6.** Нека  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  и  $B = \{1, 2, 3\}$ . Нека  $R_1 \subseteq A \times B$  и  $R_2 \subseteq A \times B$  са такива, че  $R_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$  и  $R_2 = \{(1, 2), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$ . Намерете

- а)  $R_1 \cup R_2$    б)  $R_1 \cap R_2$    в)  $R_1 \setminus R_2$    г)  $R_2 \setminus R_1$    д)  $(R_1 \setminus R_2) \times (A \times B)$

**Задача 7.** Нека  $A$  е множеството от студентите в някакъв университет. Нека  $B$  е множеството от книгите в библиотеката на университета. Нека  $R \subseteq A \times B$  и  $R_2 \subseteq A \times B$  са съответно релациите:

$$R_1 = \{(a, b) \mid \text{студент } a \text{ трябва да прочете книга } b\}$$

$$R_2 = \{(a, b) \mid \text{студент } a \text{ е чел книга } b, \text{ която е трябвало да прочете}\}$$

Опишете следните релации

- а)  $R_1 \cup R_2$    б)  $R_1 \cap R_2$    в)  $R_1 \Delta R_2$    г)  $R_1 \setminus R_2$    д)  $R_2 \setminus R_1$

**Задача 8.** Нека  $R_> = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > b\}$ . Нека релациите  $R_{\geq}$ ,  $R_{<}$ ,  $R_{\leq}$ ,  $R_{=}$ ,  $R_{\neq}$  са аналогичните релации с очевидния смисъл на индексите. Опишете колкото е възможно по-просто и естествено следните релации:

- а)  $R_{>} \cup R_{<}$    б)  $R_{>} \cup R_{=}$    в)  $R_{\geq} \cap R_{\leq}$    г)  $R_{>} \setminus R_{\geq}$    д)  $R_{\geq} \setminus R_{>}$   
 е)  $R_{<} \cup R_{=}$    ж)  $R_{>} \Delta R_{<}$    з)  $R_{>} \Delta R_{<}$    и)  $R_{\geq} \cup R_{\leq}$    й)  $R_{<} \cup R_{\neq}$   
 к)  $R_{<} \cap R_{\neq}$    л)  $R_{\leq} \cap R_{\neq}$    м)  $R_{\leq} \setminus R_{\neq}$    н)  $R_{\neq} \setminus R_{\leq}$    о)  $R_{\geq} \Delta R_{\neq}$    п)  $R_{<} \Delta R_{=}$

**Задача 9.** Напишете в явен вид (примерно, наричайки графа на релацията) всички релации над триелементно множество, които са ирефлексивни, антисиметрични и не са транзитивни.

**Задача 10.** Колко релации  $R \subseteq A \times A$ , където  $A$  е крайно множество с  $n$  елемента, са:

1. рефлексивни?
2. ирефлексивни?
3. симетрични?
4. антисиметрични?
5. силно антисиметрични?
6. симетрични и антисиметрични?
7. симетрични и силно антисиметрични?
8. симетрични и рефлексивни?
9. антисиметрични и нито рефлексивни, нито ирефлексивни?
10. антисиметрични и силно антисиметрични?

**Задача 11.** Колко транзитивни релации има над  $n$  елементно множество, ако

1.  $n = 1$
2.  $n = 2$
3. (\*)  $n = 3$

**Задача 12.** Нека  $A$  и  $B$  са крайни множества. Нека  $A$  има точно три елемента. Колко елемента има  $B$ , ако е известно, че има точно 4096 релации от вида  $R \subseteq A \times B$ ?

Упътване:  $4096 = 2^{12}$ .

**Задача 13.** Следната теорема е невярна. Следователно, в “доказателството” ѝ има грешка/грешки. Открийте каква е грешката/какви са грешките в това “доказателство”.

**Теорема 1 (погрешна теорема).** Нека  $R$  е произволна релация над множество  $A$ . Нека  $R$  е симетрична и транзитивна. Тогава  $R$  е рефлексивна.

### Доказателство

Разглеждаме произволен  $a \in A$ . Нека  $b$  е произволен елемент от  $A$ , такъв че  $aRb$ . Тъй като  $R$  е симетрична, заключаваме, че  $bRa$ . Тъй като  $R$  е транзитивна и вече имаме  $aRb \wedge bRa$ , заключаваме, че  $aRa$ . Докажахме за произволен елемент, че той е в релация със себе си.  $\square$

**Задача 14.** Докажете за произволна релация  $R$ , че  $R$  е симетрична тогава и само тогава, когато  $R = R^{-1}$ .

**Задача 15.** Докажете за произволна релация  $R \subseteq A \times A$ , че  $R$  е антисиметрична тогава и само тогава, когато  $R \cap R^{-1} \subseteq \{(a, a) \mid a \in A\}$ .

**Задача 16.** Нека  $S$  е множеството от всички релации над  $I_5$ . Нека  $R \subseteq S \times S$  е релация, дефинирана така:

$$S = \{(a, b) \mid a \text{ и } b \text{ имат един и същи брой елементи}\}$$

Докажете, че  $R$  е релация на еквивалентност. Колко класа на еквивалентност има  $R$ ?

**Задача 17.** Нека  $A = \{2^n \mid n \in J_5\}$ . Нека  $R \subseteq (A \times A) \times (A \times A)$  е релация, дефинирана така:

$$R = \{((a, b), (c, d)) \in (A \times A) \times (A \times A) \mid ac = bd \vee ad = bc\}$$

Колко елемента има  $R$ ? Напишете в явен вид  $R$  чрез матрицата ѝ. Докажете, че  $R$  е релация на еквивалентност. Кои са класовете на еквивалентност на  $R$ ?

**Задача 18.** Нека  $A = \{a, b, c, d\}$ . Нека  $R \subseteq A \times A$  е релацията

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, b), (c, d), (d, b), (d, c), (d, d)\}$$

Определете рефлексивното, симетричното и транзитивното затваряне на  $R$ .

**Задача 19.** Нека  $A = \{a, b, c, d\}$ . Нека  $R \subseteq A \times A$  и  $R = \{(a, b), (b, a), (c, d)\}$ . Определете минималната по брой елементи релация  $S \subseteq A \times A$ , такава че  $R \cup S$  е релация на еквивалентност.

Решение:

$$S = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (d, c)\}.$$

$\square$

**Задача 20.** Нека  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ . Нека  $S \subseteq A \times A$  и  $S = \{(2, 2), (2, 3), (1, 4)\}$ . Определете минималната по мощност релация  $T \subseteq A \times A$ , такава че  $S \cup T$  е релация на еквивалентност.

**Задача 21.** Нека  $R$  и  $S$  са релации над едно и също множество. Докажете или опровергайте, че ако  $R$  и  $S$  са транзитивни, то  $R \Delta S$  е транзитивна.

*Решение:*

Твърдението не е вярно. Ето контрапример: нека  $R = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$  и  $S = \{(b, c), (c, d), (b, d)\}$ . Очевидно и двете релации са транзитивни. Но  $R \Delta S = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, d)\}$  не е транзитивна – за да бъде транзитивна, трябва да съдържа  $(a, d)$ .  $\square$

**Задача 22.** Нека  $Q$  и  $T$  са релации над едно и също множество. Докажете или опровергайте, че ако  $T$  е антисиметрична, а  $Q$  е силно антисиметрична, то  $\overline{T \setminus Q}$  е антисиметрична.

*Решение:*

Твърдението не е вярно. Ето контрапример: нека  $T = \{(a, b)\}$  и  $Q = \{(a, b)\}$ . Очевидно и двете са антисиметрични. Очевидно  $Q$  е силно антисиметрична. Но  $T \setminus Q = \emptyset$ , следователно  $\overline{T \setminus Q} = \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}$ , която релация не е антисиметрична, тъй като съдържа  $(a, b)$  и  $(b, a)$ .  $\square$

**Определение 3.** Релация на частична наредба  $R \subseteq A \times A$  е всяка релация, която е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна. В контекста на частичните наредби, за всяко  $a \in A$  и всяко  $b \in A$ ,  $a$  и  $b$  са сравними, ако поне едно от  $aRb$  и  $bRa$  е изпълнено, и са несравними в противен случай. Диаграма на Hasse е начин за графично представяне на крайни частични наредби, при който се рисува част от графа на релацията:

- не се рисуват примките – тъй като релацията е рефлексивна, те се подразбират;
- не се рисуват ребра от вида  $(a, c)$ , ако вече  $(a, b)$  и  $(b, c)$  присъстват – тъй като релацията е транзитивна, те се подразбират;
- елементите се рисуват на ясно обособени нива. Прието е, минималните елементи да са най-долу, техните непосредствени съседи на следващото ниво нагоре и т. н., като максималните елементи са най-горе. Поради това не се слагат посоки на ребрата, тъй като посоките се подразбират; ако започнем с минималните елементи долу и разполагаме другите нагоре, посоките на ребрата са отдолу нагоре.

$\square$

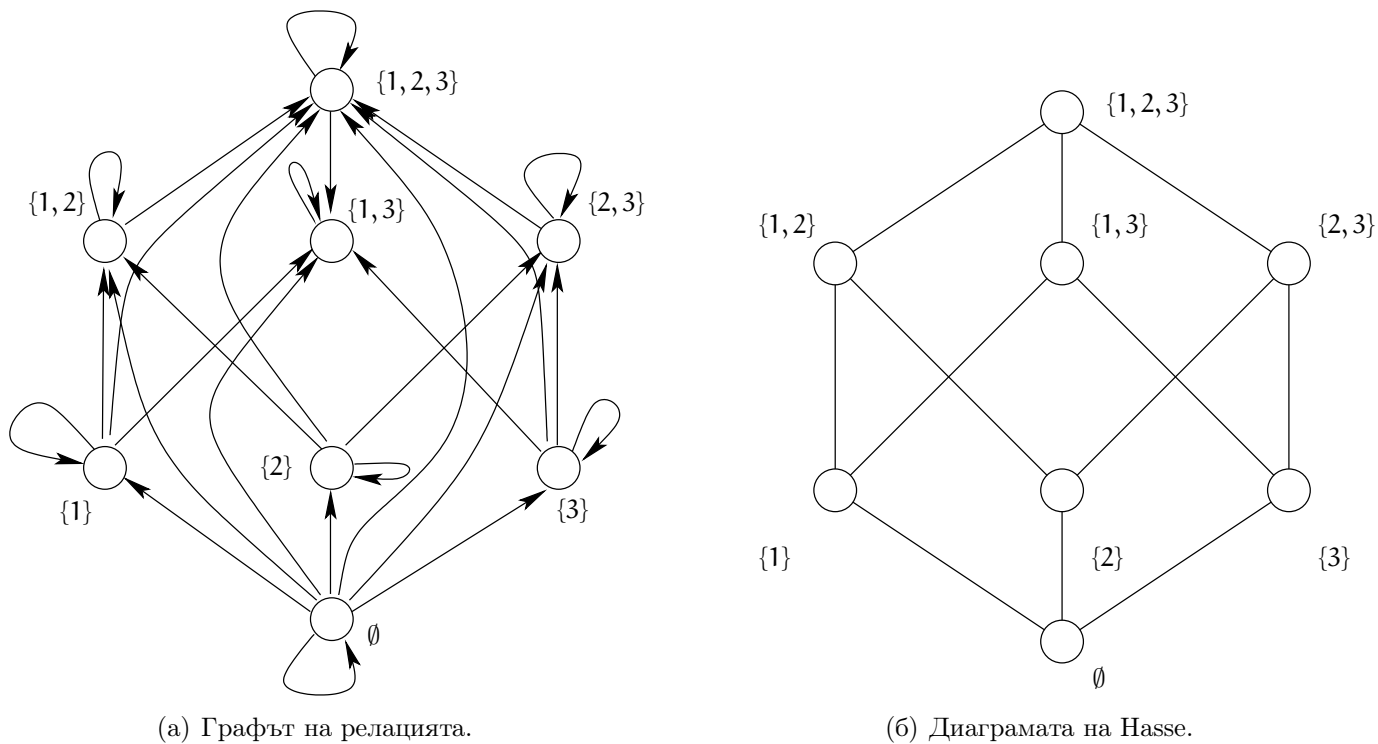
Като пример вижте релацията  $R_{\subseteq A}$  с множество  $A = \{1, 2, 3\}$ , изобразена на Фигура 1 веднъж с граф и веднъж с диаграма на Hasse. Очевидно, диаграмата на Hasse е много по-прегледна, тъй като показва същността на релацията без нищо излишно.

**Задача 23.** Нека  $A = \{a, b, c, d\}$ . Определете в явен вид всички релации на частична наредба над  $A$ , в които  $a$  и  $b$  са минимални, а  $c$  и  $d$  не са сравними.

*Решение:*

Въпросните релации са 16. За да се убедим в това, да разгледаме матриците им. Всяка от тези матрици има единици по главния диагонал, тъй като релациите са рефлексивни (Фигура 2).

Освен това, има нули в колоните на  $a$  и  $b$  (с изключение на клетките от главния диагонал), тъй като  $a$  и  $b$  са минимални (Фигура 3).



Фигура 1: Графът и диаграмата на Хасе на релацията  $R_{\subseteq A}$  с множество  $A = \{1, 2, 3\}$ .

	a	b	c	d
a	1			
b		1		
c			1	
d				1

Фигура 2: Релациите са рефлексивни.

Освен това, има нули в клетките  $(c, d)$  и  $(d, c)$ , тъй като  $c$  и  $d$  не са сравними (Фигура 4).

Останалите 4 клетки могат да бъдат запълнени с нули и единици по  $2^4 = 16$  различни начина, всеки от които съответства на една от търсените релации:

	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



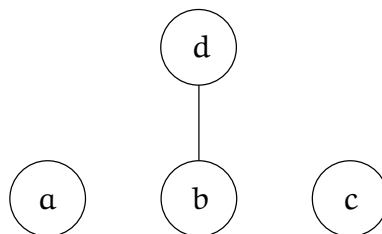
	a	b	c	d
a	1	0		
b	0	1		
c	0	0	1	
d	0	0		1

Фигура 3: **a** и **b** са минимални.

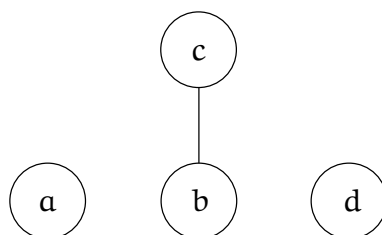
	a	b	c	d
a	1	0		
b	0	1		
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1

Фигура 4: **c** и **d** не са сравними.

	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	0	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1

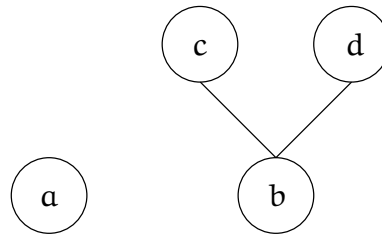


	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1

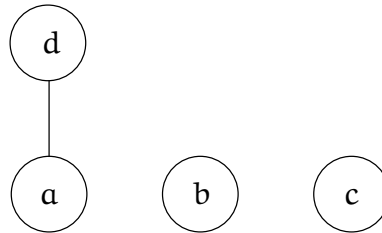




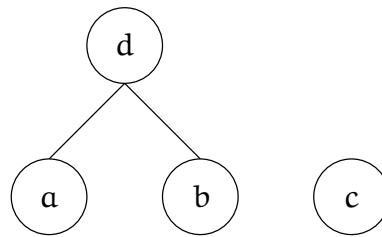
	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	1	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



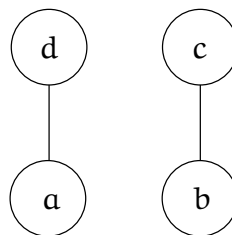
	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



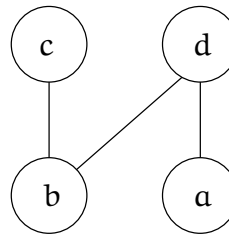
	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	0	1	0	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



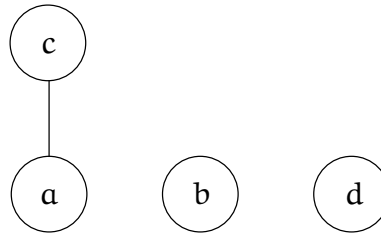
	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



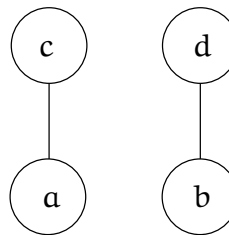
	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	0	1	1	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



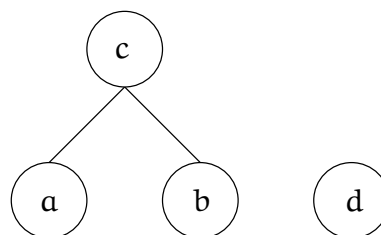
	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



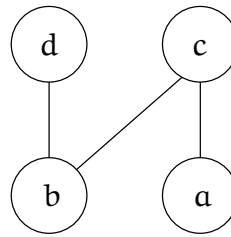
	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	0	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



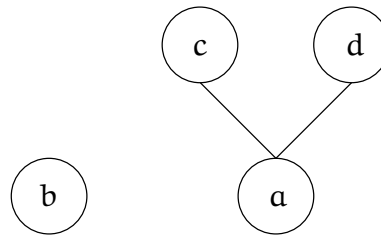
	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



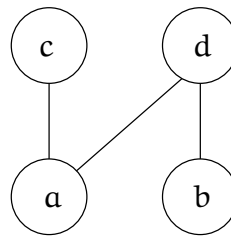
	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	1	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



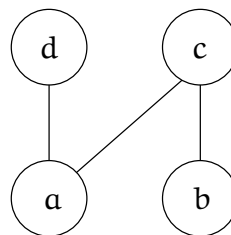
	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



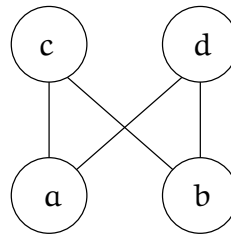
	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	1	0	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1



	a	b	c	d
a	1	0	1	1
b	0	1	1	1
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1

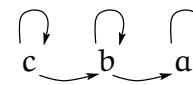
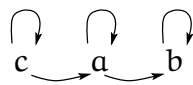
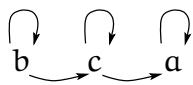
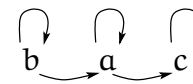
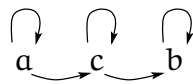
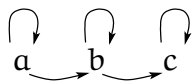


□

**Задача 24.** Нека  $S = \{a, b, c\}$ . Напишете в явен вид всички релации  $R \subseteq S \times S$ , които са рефлексивни и антисиметрични и не са транзитивни. Приемат се само отговори, в които релациите са описани чрез булеви матрици.

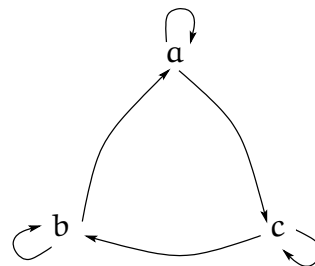
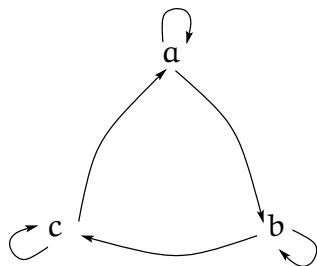
*Решение:*

Първо съобразяваме, че следните шест релации, описани чрез графи, са рефлексивни и антисиметрични, но не са транзитивни:



Че не са транзитивни, следва директно от дефиницията на транзитивност. Примерно, в първата посочена релация би трябвало да има и стрелка от  $a$  до  $c$ , за да е тя транзитивна.

Това обаче не са всички нетранзитивни, рефлексивни и антисиметрични, релации. Има още две:



Примерно, в първата от тях, щом  $a$  е в релация с  $b$  и  $b$  е в релация с  $c$ , би трябвало  $a$  да е в релация с  $c$ ; също така би трябвало  $b$  да е в релация с  $a$  и  $c$  да е в релация с  $b$ .

Същите осем релации, написани с матрици (в същия ред, в който вече ги написахме с графи), са:

	a	b	c
a	1	1	
b		1	1
c			1

	a	b	c
a	1		1
b		1	
c		1	1

	a	b	c
a	1		1
b	1	1	
c			1

	a	b	c
a	1		
b		1	1
c	1		1

	a	b	c
a	1	1	
b		1	
c	1		1

	a	b	c
a	1		
b	1	1	
c		1	1

	a	b	c
a	1	1	
b		1	1
c	1		1

	a	b	c
a	1		1
b	1	1	
c		1	1

□

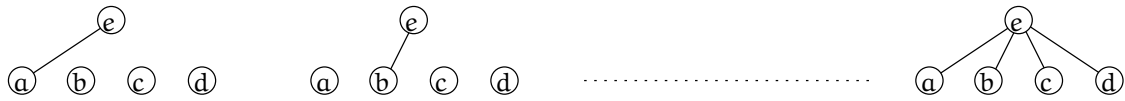
**Задача 25.** Дадено е множество  $A = \{a, b, c, d, e\}$ . Напишете в явен вид всички релации на частична наредба над  $A$ , в които елементите  $a$ ,  $b$  и  $c$  са минимални. Релациите може да пишете като множества от наредени двойки или чрез диаграми (графи) или чрез диаграми на Hasse.

**Решение:** Ще използваме диаграми на Hasse.

**А.** Има точно една релация, в която и петте елемента са миминални:



**Б.** Има точно петнадесет релации, в които точно **e** не е миминален:



Аналогично, има точно петнадесет релации, в които точно **d** не е миминален. Общо има точно тридесет релации, в които точно четири елемента са миминални, като **a**, **b** и **c** са измежду миминалните.

**В.** Да разгледаме релациите, в които точно **a**, **b** и **c** са миминални. Те се разбиват на тези, в които **d** и **e** не са сравними, и на тези, в които **d** и **e** са сравними.

**В.1** Има точно  $7 \times 7 = 49$  релации, в които точно **a**, **b** и **c** са миминални, а **e** и **d** са несравними. Причината е, че ако игнорираме **d**, има точно 7 релации, в които точно **a**, **b** и **c** са миминални:

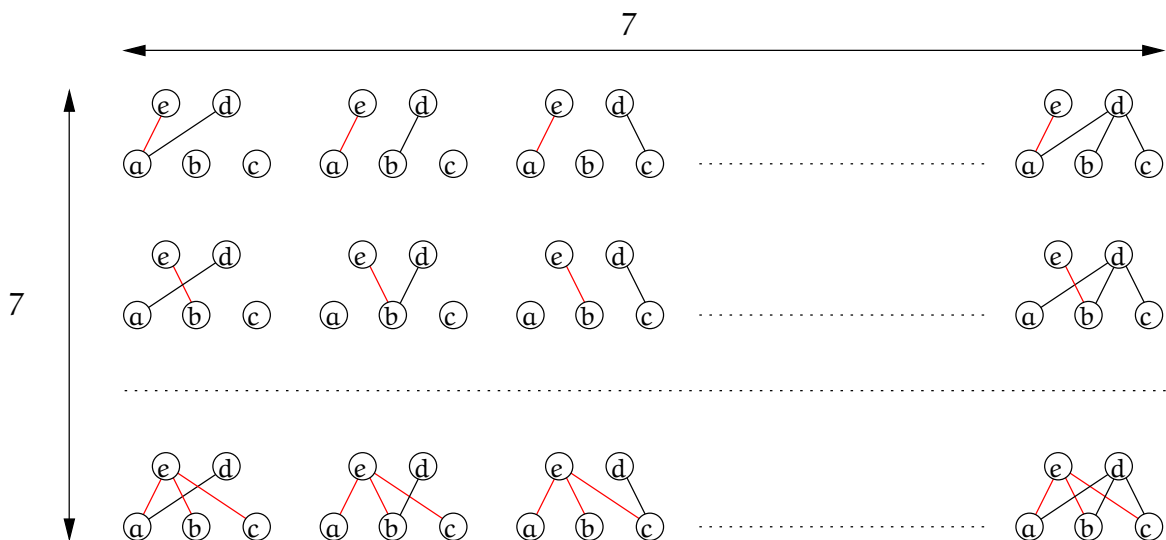


Да наречем множеството от тези релации,  $R_1$ . Аналогично, ако игнорираме **e**, има точно 7 релации, в които точно **a**, **b** и **c** са миминални.

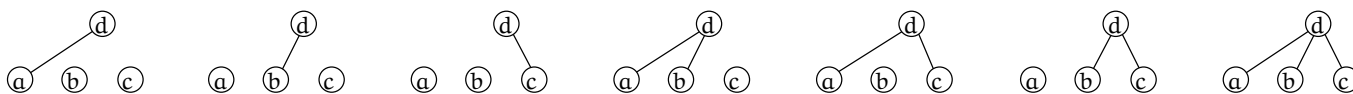


Да наречем множеството от тях,  $R_2$ .

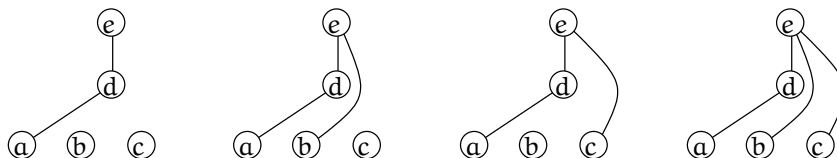
Всяка от релациите, в които точно **a**, **b** и **c** са миминални, а **e** и **d** са несравними, се получава чрез комбинирането на една релация от  $R_1$  и една релация от  $R_2$ , като при комбинирането общите елементи (които са **a**, **b** и **c**) се идентифицират. Очевидно става дума за  $7 \times 7 = 49$  релации:



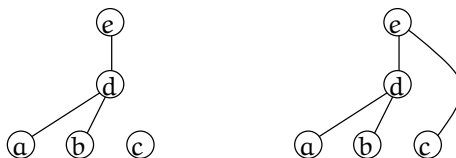
**В.2** Сега да разгледаме релациите, в които точно **a**, **b** и **c** са минимални, а **d** и **e** са сравними. Първо ще разгледаме тези, в които **d** предхожда **e**. Те са **19** на брой, което получаваме със следните разсъждения. Има седем възможности за това, кои измежду **a**, **b** и **c** да предхождат **d** (**e** не е показан):



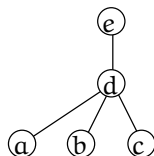
Елементът **e** може да бъде добавен по **4** начина към всяка от първите три възможности, примерно



Към всяка от вторите три възможности елементът **e** може да бъде добавен по два начина, примерно:



Към последната, седмата възможност, **e** може да бъде добавен по точно един начин:



И така, релациите, в които точно **a**, **b** и **c** са минимални, **d** и **e** са сравними и **d** предхожда **e**, са

$$4 \times 3 + 2 \times 3 + 1 \times 1 = 19$$

Очевидно тези релации, в които точно **a**, **b** и **c** са минимални, **d** и **e** са сравними и **e** предхожда **d**, са също **19**. Общият брой на релациите в **В.2** е  $19 + 19 = 38$ . И общият брой на релациите в **В** е  $49 + 38 = 87$ .

Решението на задачата се получава чрез сумиране на подрешенията в **A**, **B** и **B**, а именно

$$1 + 30 + 87 = 118$$

Това е броят на релациите, в които **a**, **b** и **c** са минимални.

**Зад. 5** Дадено е крайно непразно множество **A** и релация  $R \subseteq 2^A \times 2^A$ , дефинирана така:

$$\forall (X, Y) \in 2^A \times 2^A : (X, Y) \in R \text{ тогава и само тогава, когато } |X| \leq |Y|.$$

Изследвайте  $R$  за шестте свойства на релации над Декартов квадрат. Това означава, за всяко от шестте свойства (стр. 12 в учебника), определете дали  $R$  притежава свойството, или не. И в двата случая обоснове добре отговорите си.

**Решение:**  $R$  е рефлексивна, понеже всяко подмножество на  $A$  има същата мощност като себе си, така че  $|A| \leq |A|$  за всяко множество  $A$ .  $R$  не е иррефлексивна по същата причина.  $R$  не е симетрична, понеже ако две множества  $A$  и  $B$  е вярно, че  $|A| \leq |B|$ , от това не следва непременно, че  $|B| \leq |A|$ .  $R$  не е слабо антисиметрична, защото има двойки различни подмножества на  $A$  с една и съща мощност.  $R$  не е силно антисиметрична по същата причина.  $R$  е транзитивна, защото ако едно множество има мощност не по-голяма от мощността на друго множество, а другото, не по-голяма мощност от мощността на трето множество, то първото има не по-голяма мощност от мощността на третото.

**Зад. 6** Дадени са две релации на еквивалентност  $R_1 \subseteq A \times A$  и  $R_2 \subseteq A \times A$  над крайно множество  $A$ . За всяка от следните три релации:

а)  $R_1 \cap R_2$ ,

б)  $R_1 \cup R_2$ ,

в)  $R_1 \Delta R_2$

определете дали тя е релация на еквивалентност. Обоснове добре отговорите си.

**Решение:**  $R_1 \cap R_2$  е релация на еквивалентност, което сега ще докажем.

- Щом  $R_1$  и  $R_2$  са рефлексивни, всяка от тях съдържа наредените двойки  $(a, a)$ , по всички елементи  $a \in A$ . Тогава сечението им също съдържа всички тези двойки, тоест  $\forall a \in A : (a, a) \in R_1 \cap R_2$ . Следователно, сечението е рефлексивна релация.
- Да разгледаме произволни  $a, b \in A$ , такива че  $a \neq b$ . Тъй като  $R_1$  е симетрична, точно едно от следните две е изпълнено:

**Случай 1**  $(a, b) \in R_1 \wedge (b, a) \in R_1$ .

**Случай 2**  $(a, b) \notin R_1 \wedge (b, a) \notin R_1$ .

Тъй като  $R_1$  е симетрична, точно едно от следните две е изпълнено:

**Случай 3**  $(a, b) \in R_2 \wedge (b, a) \in R_2$ .

**Случай 4**  $(a, b) \notin R_2 \wedge (b, a) \notin R_2$ .

Ако **Случай 1** и **Случай 3** са истина, то  $(a, b) \in R_1 \cap R_2 \wedge (b, a) \in R_1 \cap R_2$ . Ако **Случай 1** и **Случай 4** са истина, то  $(a, b) \notin R_1 \cap R_2 \wedge (b, a) \notin R_1 \cap R_2$ . Ако **Случай 2** и **Случай 3** са истина, то  $(a, b) \notin R_1 \cap R_2 \wedge (b, a) \notin R_1 \cap R_2$ . Ако **Случай 2** и **Случай 4** са истина, то  $(a, b) \notin R_1 \cap R_2 \wedge (b, a) \notin R_1 \cap R_2$ . Тъй като тези комбинации от случаи са изчерпателни, то или и двете наредени двойки  $(a, b)$  и  $(b, a)$  са в сечението, или и двете не са. Следователно, сечението е симетрична релация.

- Да разгледаме произволни три елемента  $a, b, c \in A$ . Тъй като  $R_1$  е транзитивна, то

$$(a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_1 \rightarrow (a, c) \in R_1 \quad (1)$$



Аналогично,

$$(a, b) \in R_2 \wedge (b, c) \in R_2 \rightarrow (a, c) \in R_2 \quad (2)$$

Нека  $p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2$  са съжденията

- $p_1: (a, b) \in R_1,$
- $q_1: (b, c) \in R_1,$
- $r_1: (a, c) \in R_1,$
- $p_2: (a, b) \in R_2,$
- $q_2: (b, c) \in R_2,$
- $r_2: (a, c) \in R_2.$

Ако преведем (1) и (2) на езика на съждителната логика, (1) е

$$p_1 \wedge q_1 \rightarrow r_1 \quad (3)$$

а (2) е

$$p_2 \wedge q_2 \rightarrow r_2 \quad (4)$$

И двете са изпълнени, следователно в сила е тяхната конюнкция. Това, което искаме да докажем за  $R_1 \cap R_2$ , е а именно, че е транзитивна, на езика на съждителната логика е

$$(p_1 \wedge p_2) \wedge (q_1 \wedge q_2) \rightarrow (r_1 \wedge r_2) \quad (5)$$

Ще докажем, че импликацията

$$((p_1 \wedge q_1 \rightarrow r_1) \wedge (p_2 \wedge q_2 \rightarrow r_2)) \rightarrow ((p_1 \wedge p_2) \wedge (q_1 \wedge q_2) \rightarrow (r_1 \wedge r_2)) \quad (6)$$

е тавтология. Понеже броят на съжденията е 6, доказателство с таблица не е практично. Можем да разсъждаваме така: какво трябва да е изпълнено за съжденията в импликацията в (6), така че импликацията да е лъжа? Знаем, че импликация е лъжа тогава и само тогава, когато antecedентът е истина, а консеквентът е лъжа. Да видим кога консеквентът е лъжа. Прилагаме свойствата на импликацията (понеже самият консеквент е импликация) и законите на Де Морган към консеквента на (6) и получаваме, че е еквивалентен на

$$\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg q_1 \vee \neg q_2 \vee (r_1 \wedge r_2)$$

За да бъде лъжа, трябва  $p_1, p_2, q_1, q_2$  да са истина, а поне едно от  $r_1$  и  $r_2$  е лъжа. Ако заместим съжденията в antecedента на (6) с тези логически стойности, ще получим, че

$$p_1 \wedge q_1 \rightarrow r_1 \text{ или } p_2 \wedge q_2 \rightarrow r_2 \text{ е лъжа}$$

Но тогава и antecedентът е лъжа. Доказахме, че при единствената възможна стойност на съжденията, такава че консеквентът е лъжа, antecedентът също е лъжа. Следователно, при тези стойности на участващите прости съждения, цялата импликация в (6) е истина. Доказахме, че импликацията в (6) е истина за всички възможности за истина/лъжа на участващите прости съждения. Тоест, тя е тавтология.

Следователно,  $R_1 \cap R_2$  е транзитивна.

$R_1 \cup R_2$  не е релация на еквивалентност. За да докажем това, достатъчно е да покажем две конкретни релации на еквивалентност  $R_1$  и  $R_2$ , такива че обединението им не е релация на еквивалентност. Забележете разликата с предното доказателство: по отношение на него *не* е достатъчно да покажем, че за две конкретни релации на еквивалентност, тяхното сечение също е релация на еквивалентност! Причината е, че всъщност в тази задача доказваме твърдения от вида

за всяка релация на еквивалентност  $R_1$ , за всяка релация на еквивалентност  $R_2$ , в сила е ...

Доказателството, че твърдението е вярно, не може да стане чрез разглеждане на конкретни релации, защото релациите на еквивалентност са безброй и няма как да проверим верността на твърдението с разглеждане на конкретни релации. Обаче доказателството, че твърдението не е вярно, може да стане чрез разглеждане на само две конкретни релации, за които твърдението е лъжа. Такава двойка релации се нарича *контрапример*. За да се убедим, че един контрапример е достатъчен, може да образуваме отрицанието на посоченото твърдение и да съобразим, че тогава двата универсални квантора стават екзистенциални.

И така, контрапример е  $A = \{a, b, c, d\}$ ,

$$R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)\}$$

и

$$R_2 = \{(a, a), (b, b), (d, d), (a, b), (a, d), (b, a), (b, d), (d, a), (d, b)\}$$

Лесно се вижда, че обединението им не е релация на еквивалентност, защото не е транзитивна: тя съдържа  $(c, a)$  и  $(a, d)$ , но не съдържа  $(c, d)$ .

$R_1 \Delta R_2$  също не е релация на еквивалентност. Контрапример е  $A = \{a\}$  и  $R_1 = \{(a, a)\}$ ,  $R_2 = \{(a, a)\}$ . Очевидно  $R_1 \Delta R_2 = \emptyset$  не е рефлексивна.

Задача 26 използва понятието “частична функция”. За да бъде разбрана тази задача, трябва първо да е усвоен материалът, касаещ функции, който в конспекта е след материала за релации.

**Задача 26.** Нека  $A = \{a, b\}$ . Нека  $X = \{z \mid z \text{ е частична функция с домейн } A \text{ и кодомейн } A\}$ .

а) Напишете  $X$  в явен вид. Можете да използвате каквато искате нотация, стига тя да е абсолютно ясна и недвусмислена. Дайте имена на елементите на  $X$ .

б) Нека  $R \subseteq X \times X$  се дефинира така:

$$\forall (p, q) \in X \times X ((p, q) \in R \leftrightarrow \forall u \in A \forall v \in A (p(u) = v \rightarrow q(u) = v))$$

Докажете, че  $R$  е релация на частична наредба.

в) Нарисувайте диаграмата на  $X$  по отношение на  $R$ , използвайки имената, които дадохте в а).

**Решение:** Първо да видим колко са въпросните частични функции – не е задължително, но помага да знаем колко обекта трябва да построим. От основните принципи на комбинаториката лесно следва, че броят на частичните функции от краен домейн с мощност  $n$  в краен кодомейн с мощност  $n$  е  $(n + 1)^n$ . За да съобразим защо е така, достатъчно е да съобразим, че

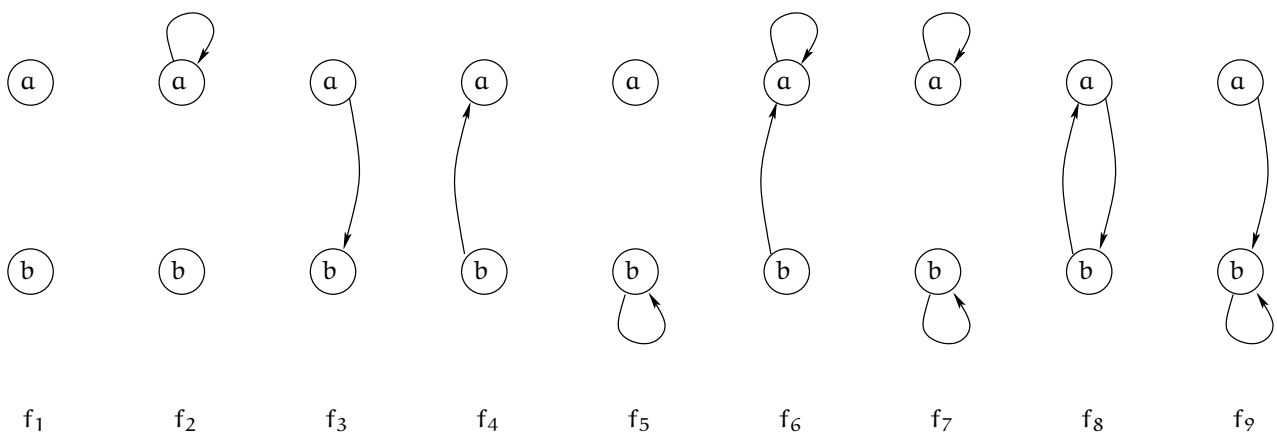
- броят на тоталните функции от краен домейн с мощност  $p$  в краен кодомейн с мощност  $q$  е  $q^p$ , и
- съществува биекция между множеството от тоталните функции от краен домейн с мощност  $p$  в краен кодомейн с мощност  $q + 1$ , от една страна, и множеството от частичните функции от краен домейн с мощност  $p$  в краен кодомейн с мощност  $q$ , от друга страна.

Следователно, в нашия случай частичните функции са  $(2 + 1)^2 = 9$  на брой. А именно,

$$\begin{aligned} f_1 &= \emptyset & f_2 &= \{(a, a)\} & f_3 &= \{(a, b)\} & f_4 &= \{(b, a)\} & f_5 &= \{(b, b)\} \\ f_6 &= \{(a, a), (b, a)\} & f_7 &= \{(a, a), (b, b)\} & f_8 &= \{(a, b), (b, a)\} & f_9 &= \{(a, b), (b, b)\} \end{aligned}$$

Това е най-формалното описание на деветте частични функции – всяка от тях, съгласно дефиницията, е множество от наредени двойки. Функциите  $f_6, \dots, f_9$  са тоталните функции.

Има и по-прости и нагледни описания. Тъй като домейнът съвпада с кодомейна, можем да мислим за тези частични функции като за релации и да рисуваме диаграмите им (ориентирани графи с възможни примки):



Ще покажем, че релацията  $R$  е рефлексивна. Действително, за всяка  $f_i$ ,  $1 \leq i \leq 9$  е вярно, че  $f_i R f_i$ , защото  $\forall u, v \in A$  тривиално имаме  $f_i(u) = v \rightarrow f_i(u) = v$ .

Ще покажем, че релацията  $R$  е транзитивна, тоест, че за всеки  $f_i, f_j, f_k$ ,  $1 \leq i, j, k \leq 9$  е вярно, че  $f_i R f_j \wedge f_j R f_k \rightarrow f_i R f_k$ . Да разгледаме произволни три, не непременно различни,  $f, g, h \in \{f_1, \dots, f_9\}$ . Нека е вярно, че

$$\forall u, v \in A : f(u) = v \rightarrow g(u) = v \quad (7)$$

$$\forall u, v \in A : g(u) = v \rightarrow h(u) = v \quad (8)$$

Искаме да покажем, че  $f(u) = v \rightarrow h(u) = v$  за произволни  $u, v \in A$ . Да разгледаме произволни  $x, y \in A$ . Да допуснем, че  $f(x) = y$ . Тогава съгласно (7) и (8) следва, че  $h(x) = y$ . Сега да допуснем, че  $f(x) \neq y$ , тоест или  $f(x)$  е дефинирана и не е  $y$ , или  $f(x)$  изобщо не е дефинирана. Но щом  $f(x) = y$  е лъжа, то импликацията

$$f(x) = y \rightarrow h(x) = y$$

е **истина**, тъй като лъжата влече логически всяко съждение.

Ще покажем, че релацията  $R$  е антисиметрична. Нека за произволни две частични функции  $f$  и  $g$  е вярно, че

$$\forall u, v \in A : f(u) = v \rightarrow g(u) = v$$

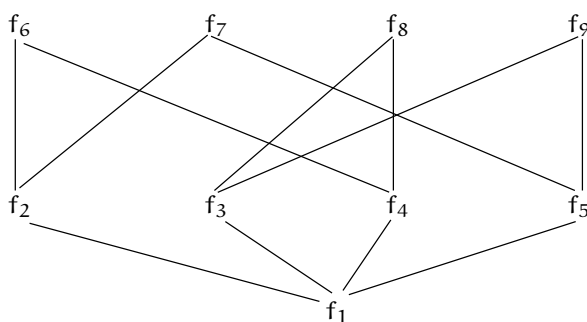
$$\forall u, v \in A : g(u) = v \rightarrow f(u) = v$$

Но това е същото като

$$\forall u, v \in A : f(u) = v \leftrightarrow g(u) = v$$

Следователно, функциите съвпадат, тоест  $f = g$ .

Доказахме, че  $R$  е релация на частична наредба. Диаграмата на Хасе изглежда така:



□

Определение 4, Задача 27, Задача 28 и Задача 29 са материал **извън** материала за курса и са предназначени за студенти със специален интерес към дискретната математика.

**Определение 4** (композиция на релация със себе си). Нека  $R$  е релация над множество  $A$ . Релацията  $R \circ R$  дефинираме така:

$$R \circ R = \{(a, b) \mid \exists c \in A (aRc \wedge cRb)\}$$

Степените на релацията  $R$  дефинираме така:

$$R^1 = R$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ : R^{n+1} = R^n \circ R$$

Релациите  $R^1 = R, R^2, R^3$  и т. н. се наричат степените на  $R$ .

**Задача 27.** Нека  $R \subseteq I_4 \times I_4$  е дефинирана така:  $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$ . Намерете  $R^n$  за  $n \in \mathbb{N}^+$ .

**Решение:** Лесно се съобразява, че

$$R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$$

$$R^2 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\}$$

$$R^3 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$$

$$R^4 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$$

Тъй като  $R^4 = R^3$ , очевидно че  $R^5 = R^4, R^6 = R^5$ , и т. н. Следователно,

$$\forall n \in \mathbb{N} (n > 4 \rightarrow R^n = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\})$$

Накратко, решението е:

$$R^i = \begin{cases} \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}, & \text{ако } i = 1 \\ \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\}, & \text{ако } i = 2 \\ \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}, & \text{ако } i \geq 3 \end{cases}$$

□

**Задача 28.** Докажете, че за всяка релация  $A \subseteq A \times A$ ,  $R$  е транзитивна тогава и само тогава, когато  $\forall n \in \mathbb{N}^+ (R^n \subseteq R)$ .

**Решение, част I:** Нека  $R$  е транзитивна.

Ще докажем по индукция, че  $\forall n \in \mathbb{N}^+ (R^n \subseteq R)$ . Базата е за  $n = 1$ : очевидно,  $R^1 \subseteq R$ . Да допуснем, че  $R^n \subseteq R$ . Ще докажем, че  $R^{n+1} \subseteq R$ . Да разгледаме произволен елемент  $(a, b) \in R^{n+1}$ . Съгласно Определение 4,  $\exists x \in A ((a, x) \in R^n \wedge (x, b) \in R)$ . От индуктивната хипотеза знаем, че  $R^n \subseteq R$ . Следователно,  $(a, x) \in R$ . Щом  $(a, x) \in R$  и  $(x, b) \in R$ , то  $(a, b) \in R$ , тъй като  $R$  е транзитивна. Доказахме, че щом даден елемент е в  $R^{n+1}$ , то той е и в  $R$ .

**Решение, част II:** Нека  $\forall n \in \mathbb{N}^+ (R^n \subseteq R)$ .

Ще докажем, че  $R$  е транзитивна. Тъй като  $\forall n \in \mathbb{N}^+ (R^n \subseteq R)$ , в частност  $R^2 \subseteq R$ . Да разгледаме произволни елементи от  $A$ , да ги наречем  $a, b$  и  $c$ . Нека  $(a, b) \in R$  и  $(b, c) \in R$ . Съгласно Определение 4, изпълнено е  $(a, c) \in R^2$ . Но  $R^2 \subseteq R$ . Следователно,  $(a, c) \in R$ . □

**Задача 29.** Докажете, че за всяка релация  $A \subseteq A \times A$ , ако  $R$  е рефлексивна и транзитивна, то  $\forall n \in \mathbb{N}^+ (R^n = R)$ .