Лекция 4: Функции

Минко Марков
minkom@fmi.uni-sofia.bg

Факултет по Математика и Информатика
Софийски Университет "Свети Климент Охридски"

25 юни 2020 г.

Определение 1 (Частична функция)

Нека X и Y са множества. Частична функция с домейн X и кодомейн Y е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че за всяко $x \in X$ съществува не повече от едно $y \in Y$, такова че $(x, y) \in f$.

Определение 2 (Тотална функция)

Нека X и Y са множества. Тотална функция с домейн X и кодомейн Y е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че за всяко $x \in X$ съществува точно едно $y \in Y$, такова че $(x, y) \in f$.

Определенията с изрази от предикатната логика

Определение (Частична функция)

Нека X и Y са множества. Частична функция с домейн X и кодомейн Y е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че

$$\begin{aligned}\forall x \in X\Big((\neg\exists y \in Y : (x,y) \in f)\vee \\ ((\exists y \in Y : (x,y) \in f)\wedge \\ (\forall w, z \in Y : (x,w) \in f \wedge (x,z) \in f \rightarrow w = z))\Big)\end{aligned}$$

Или по-просто

Определение (Частична функция)

Нека X и Y са множества. Частична функция с домейн X и кодомейн Y е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че

$$\begin{aligned}\forall x \in X\Big((\neg\exists y \in Y : (x,y) \in f)\vee \\ (\forall w, z \in Y : (x,w) \in f \wedge (x,z) \in f \rightarrow w = z)\Big)\end{aligned}$$

Определенията с изрази от предикатната логика (2)

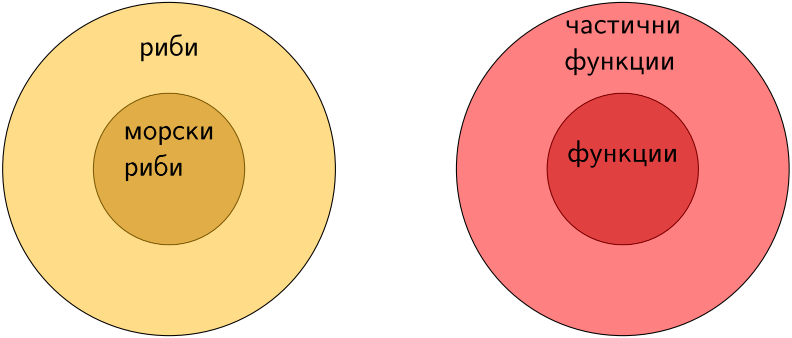
Определение (Тотална функция)

Нека X и Y са множества. Тотална функция с домейн X и кодомейн Y е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че

$$\forall x \in X\Big((\exists y \in Y : (x, y) \in f) \wedge \\ (\forall w, z \in Y : (x, w) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow w = z)\Big)$$

Тоталните функции се срещат по-често в практиката, затова само "функция" е "тотална функция". При дадени X и Y, очевидно тоталните са строго подмножество на частичните. Следователно, само "функция" е частен случай на "частична функция": всяка функция е частична функция, но не всяка частична функция е функция.
Това води до противоречие с приетото разбиране за прилагателните, с които отделяме подмножества като в аксиомата за отделянето.

Частични функции и функции (2)



За формалните определения

На практика често казваме “изображение” (mapping) вместо “функция”. Това обаче не е определение: а какво е “изображение”?

Предпочитаме да не въвеждаме “функция” като ново първично понятие, а да използваме вече изградени понятия и да дефинираме “функция” чрез тях.

И така, формално, функция е вид релация.

Типични записи на функции

Наместо $f \subseteq X \times Y$, пишем $f : X \to Y$. Чете се "f е функция с домейн X и кодомейн Y". Още може да се чете и като "f изобразява X в Y".

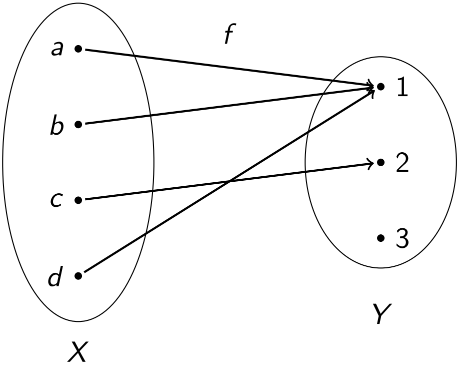
Наместо $(x, y) \in f$ или инфиксния запис $x\, f\, y$, в контекста на функциите ползваме добре известния запис $f(x) = y$. "x" е *променлива*. Променлива е нещо като кутийка, в която можем да слагаме неща (от домейна).

Свикнали сме да мислим за функциите на много променливи като за обобщение на функциите на една променлива. Но всяка функция на k променливи в някакъв смисъл е функция на **една** променлива, която обаче е наредена k-орка.

Пример: някаква реална функция на две променливи. Типичен запис е $g(x, y) = z$, където x, y и z са реални. Тогава $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Можем да мислим за g като функция на една променлива, която не е реално число, а наредена двойка от реални числа. Формално правилният запис би бил $g((x, y)) = z$, където $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, но това не се ползва.

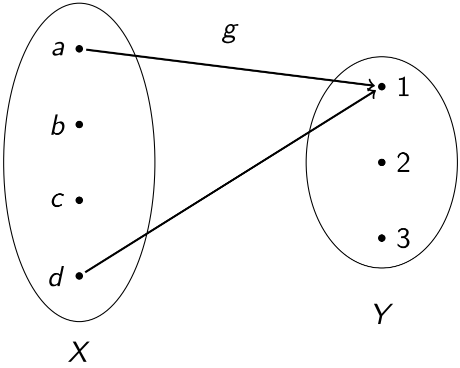
Представяне на функция с диаграма

Нека $f : X \to Y$, като X и Y са крайни. Да кажем, $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$. От всяка точка в елипсата, отговаряща на X, излиза точно една стрелка.



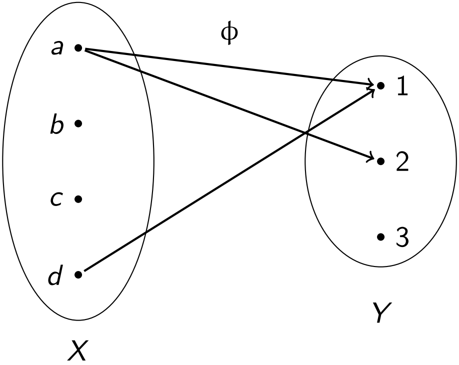
Представяне на частична функция с диаграма

Нека g е частична функция с домейн X и кодомейн Y. От всяка точка в елипсата, отговаряща на X, излиза не повече от една стрелка.

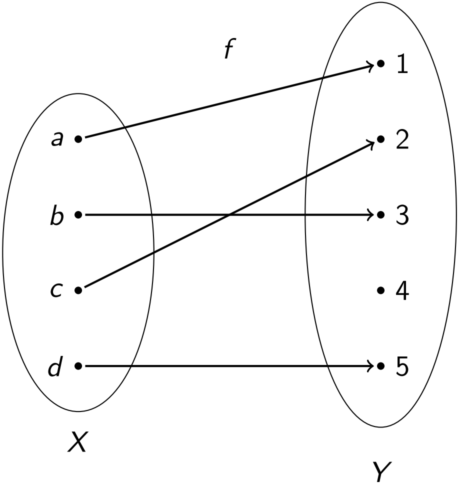


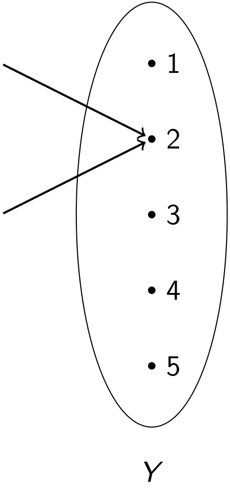
Диаграма на релация, която не е частична функция

Ако от поне една точка в елипсата, отговаряща на X, излиза повече от една стрелка, това не може да е диаграма на частична функция (оттам, и на тотална). Това е диаграма на релация ϕ с първи домейн X и втори домейн Y.

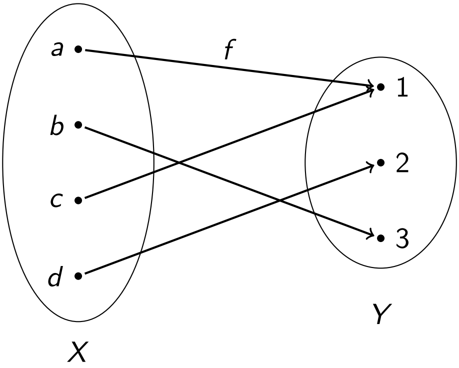


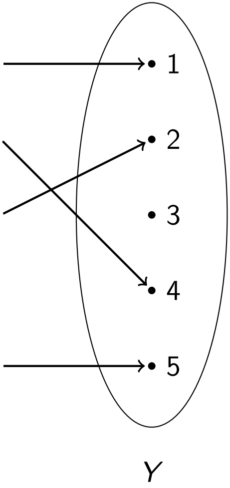
Нека $f : X \to Y$. f е *инекция*, ако $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$.



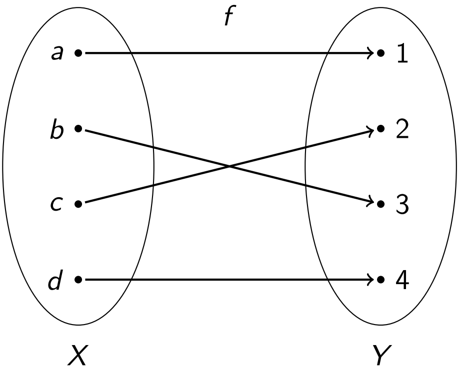

1
2
3
4
5
Y

Нека $f : X \to Y$. f е *сюрекция*, ако $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$.
Неформално: кодомейнът да бъде “покрит” от изображението.




1
2
3
4
5
Y

Нека $f : X \to Y$. f е *биекция*, ако е инекция и сюрекция. Още се казва *взаимно еднозначно изображение*.



Инекции, сюрекции, биекции – пример

Сядането на хора в зала е частична функция с домейн хората и кодомейн столовете, ако никой не седи на повече от един стол; възможно е да има правостоящи.

Ако няма правостоящи, сядането е функция.

Ако на никой стол не седи повече от един човек, сядането е инекция.

Ако няма празни столове, сядането е сюрекция.

Ако всеки човек седи на отделен стол и няма празни столове, сядането е биекция. Очевидно броят на столовете е равен на броя на хората.

Инекции, сюрекции, биекции – ограничения за бройките

Все още не сме въвели формално "крайно множество" и "брой на елементи на крайно множество", но интуитивно всеки разбира за какво става дума.

Нека $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Нека $f : X \to Y$.

Необходимо условие f да е инекция е $m \leqslant n$. Необходимо условие f да е сюрекция е $m \geqslant n$. Необходимо условие f да е биекция е $m = n$.

Иначе казано, при $m > n$ няма инекция, при $m < n$ няма сюрекция, при $m \neq n$ няма биекция.

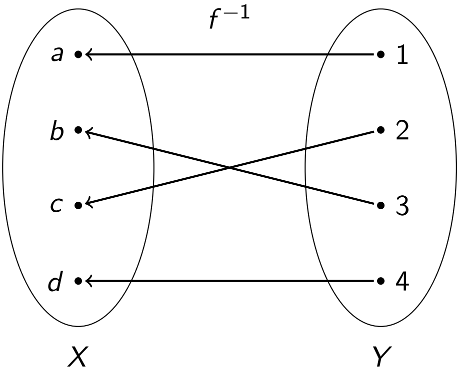
Обратна функция на биекция

Нека $f : X \to Y$ е биекция. *Обратната функция на f* се бележи с f^{-1}. Тя е с домейн Y и кодомейн X и се дефинира така:

$$\forall y \in Y : f^{-1}(y) = x, \text{ където } x \text{ е уникалният елемент на } X, \text{ такъв че } f(x) = y$$

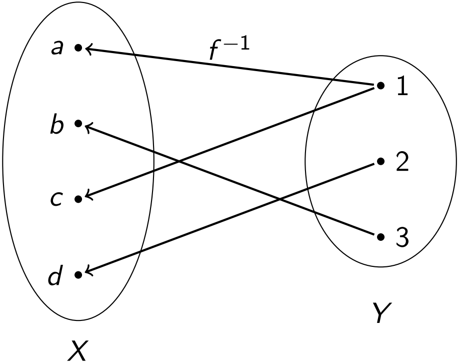
Обратна функция на биекция – пример

Нека f е биекцията от слайд 17. Нейната обратна функция е следната:



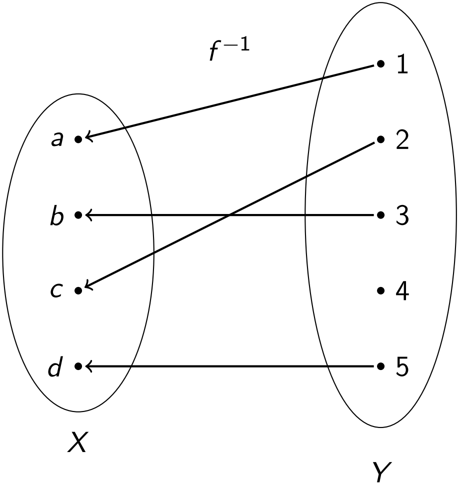
Образно казано, обратната функция има диаграма с разменени домейн и кодомейн и обърнати посоки на стрелките.

Ако опитаме да "обърнем" функция, която не е инекция, ще получим обект, който дори **не е функция**. Ето какво ще получим, ако се опитаме да "обърнем" сюрекцията от слайд 15:



Обратна функция на функция (2)

Ако обърнем произволна инекция, ще получим частична функция, която не е непременно функция. Ето какво ще получим, ако се опитаме да "обърнем" инекцията от слайд 13:



Рестрикция на функция

Нека $f : X \to Y$ и $X' \subseteq X$. *Рестрикцията на f върху X'* е $f' : X' \to Y$, където $\forall x \in X' : f'(x) = f(x)$. Бележим рестрикцията така: $f|_{X'}$.

Понятието "рестрикция" може да се обобщи и за частични функции по естествения начин. Очевидно, всяка частична функция има рестрикция, която е функция – вземаме такова X', че всеки елемент от X' да има изображение.

Забележете, че дефиницията "множество е крайно, ако има краен брой елементи" **не върши работа**. На практика тя казва "множество е крайно, ако е крайно". Очевидно това е порочно зациклена дефиниция!

Дефинирането на "крайно множество" става чрез биекция между него и някое множество $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Определение 3 (крайно множество, кардиналност)

Множество A е крайно, ако

- $A = \emptyset$, *в който случай кардиналността на A е 0,*
- *или съществува $n \in \mathbb{N}^+$, такова че съществува биекция $f : A \to \{1, 2, \ldots, n\}$; тогава кардиналността на A е n.*

Кардиналността на A е броят на елементите и се бележи с $|A|$. "Мощност на множество" е синоним на "кардиналност на множество". Множества са *равномощни*, ако между тях съществува биекция.

Определение 4 (безкрайно множество)

Множество е безкрайно, ако не е крайно.

Очевидно $\mathbb{N}$ не е крайно: колкото и голямо естествено число n да вземем, $n+1$ е по-голямо. Така че за всяко n е вярно, че $n+1 \notin \{0, 1, \ldots, n\}$.

Изброими множества

Определение 5 (изброимо безкрайно множество)

Множество A е изброимо безкрайно, ако е равномощно на $\mathbb{N}$.

Определение 6 (изброимо множество)

Множество A е изброимо, ако A е крайно или изброимо безкрайно.

Определение 7 (неизброимо множество)

Множество е неизброимо, ако не е изброимо.

Очевидно всяко неизброимо множество е безкрайно. Не е очевидно, че съществуват неизброими множества.

Естествените числа се генерират от процес, който започва от 0 с добавяне на единица: $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 2$, $\dots$, $1\,000\,000 + 1 = 1\,000\,001$, $\dots$. Аристотел характеризира този процес като "потенциална безкрайност". Кулминацията на процеса, а именно множеството от всички естествени числа, е "пълна безкрайност", или "актуална безкрайност".

От Аристотелово време чак до 19 век мнозинството от мислителите отхвърлят актуалната безкрайност като нелегитимно понятие. Гаус (Carl Friedrich Gauss), най-великият математик на своето време, пише:

> But concerning your proof, I protest above all against the use of an infinite quantity as a *completed* one, which in mathematics is never allowed. The infinite is only *façon de parler*, in which one properly speaks of limits.

Georg Cantor, His Mathematics and Philosophy of the Infinite, Dauben, pp. 120

Редът на Лайбниц е

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

Ако гледаме на сумата вдясно като на процес, който апроксимира $\frac{\pi}{4}$ все по-добре с добавяне на все повече събираеми, имаме предвид потенциална безкрайност. Тогава $\frac{\pi}{4}$ е само граница, по израза на Гаус, към която клони сумата, без да я достига никога. Тук и дума не става за пълна безкрайност: на всеки етап от сумирането сме събрали краен брой събираеми.

Ако гледаме на сумата вдясно като на едно цяло нещо, което е точно равно на $\frac{\pi}{4}$, имаме предвид актуална безкрайност.

За безкрайните множества (4)

Проблем при безкрайните множества: цялото е “равно” на своя част. “Равно” има смисъл на “равномощно”.

Примерно, множеството на естествените числа и множеството на четните числа $\{0, 2, \ldots\}$ са равномощни. Интуитивно, естествените са повече, защото има естествени нечетни числа. От друга страна, биекцията $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 2, \ldots\}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = 2n$$

съчетава точно естествените и четните числа.

Оттук и мнението, че да се говори за “броя на всички числа” е безсмислица.

За безкрайните множества (5)

Георг Кантор (Georg Cantor) е първият математик, който разглежда сериозно безкрайните множества и създава кохерентна и задълбочена теория за тях. Той въвежда понятия, имащи смисъл на бройки на елементите на безкрайни множества, и работи с тези понятия.

Кантор показва, че множества като $\mathbb{Q}$ или множеството на алгебричните ирационални числа (като $\sqrt{2}$), които в днешната терминология са строги надмножества на $\mathbb{N}$, са равномощни с $\mathbb{N}$. След това показва, че $\mathbb{R}$ не е равномощно на $\mathbb{N}$.

За безкрайните множества (6)

Основен резултат на Кантор е, че има различни видове безкрайност. И естествените, и реалните числа са безброй много, но реалните са повече в смисъл, че няма биекция между тях и естествените.

Теорема 1

Съществува биекция $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Доказателство: Твърди се, че има начин да бъдат изброени наредените двойки от естествени числа.

Разбиваме множеството $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}\}$ на подмножества $S_0, S_1, S_2, \ldots$ по следния начин

$$\forall k \in \mathbb{N} : S_k = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a + b = k\}$$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (2)

Изброяването е следното: при $i < j$, наредените двойки от S_i преди наредените двойки от S_j, а вътре във всяко S_i нареждаме двойките по нарастващ втори елемент:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\ \underbrace{(0,0)}_{S_0} & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{(1,0)\quad(0,1)}_{S_1}} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{(2,0)\quad(1,1)\quad(0,2)}_{S_2}} & \multicolumn{4}{c}{\underbrace{(3,0)\quad(2,1)\quad(1,2)\quad(0,3)}_{S_3}} & \cdots \end{array}$$

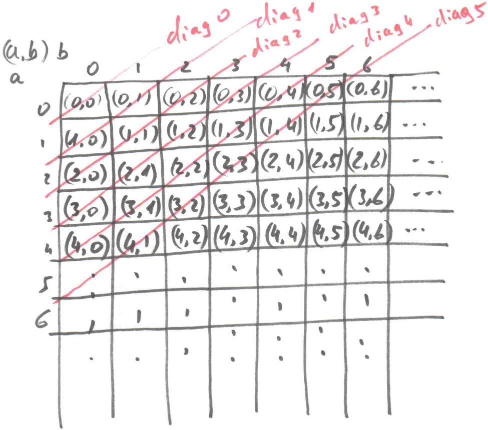
$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (3)

Да си представим наредените двойки от естествени числа в безкрайна таблица.

(a,b) a \ b	0	1	2	3	4	5	6	
0	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,3)$	$(0,4)$	$(0,5)$	$(0,6)$	$\dots$
1	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$	$\dots$
2	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$	$\dots$
3	$(3,0)$	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$	$\dots$
4	$(4,0)$	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$	$\dots$
5	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
6	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (4)

Да групираме наредените двойки по диагонали.



$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (5)

Ето визуализация на изброяването

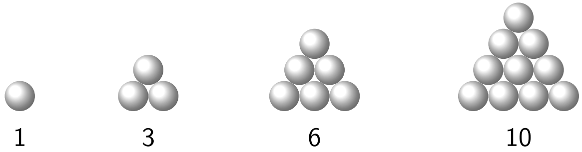
Да разгледаме следната функция $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$f((a, b)) = \begin{cases} 0, & \text{ако } (a, b) = (0, 0) \\ \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + b, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Това е **формалното** описание на функцията на изброяването, която въведохме на слайд 36 и илюстрирахме на слайд 39.

Ще докажем, че f е биекция.

Числата от вида $\frac{k(k+1)}{2}$ за $k \in \mathbb{N}$ се наричат *триъгълните числа*. В нарастващ ред на k, редицата от триъгълните числа започва така: $0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$. Следната визуализация за $k > 0$ показва защо се наричат триъгълните числа .



Лесно се вижда, че триъгълните числа са точно сумите $\sum_{i=0}^{k} i$, за $k \in \mathbb{N}$.

В израза $\boxed{\frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + b}$, събираемото $\frac{(a+b)(a+b+1)}{2}$ е точно броят на наредените двойки **във всички диагонали преди диагонал номер $\boldsymbol{a+b}$.** То е триъгълното число

$$\frac{(a+b)(a+b+1)}{2} = 1 + 2 + \cdots + (a+b)$$

Събираемото b е броят на елементите **преди** (a, b) в диагонал номер $a + b$.

Да допуснем, че f не е инекция. Тогава съществуват наредени двойки (a_1, b_1) и (a_2, b_2), такива че $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ и $f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$. Нека $a_1 + b_1 = m_1$ и $a_2 + b_2 = m_2$.

Случай 1: $m_1 \neq m_2$. БОО, нека $m_1 < m_2$. Тогава $\frac{m_1(m_1+1)}{2}$ и $\frac{m_2(m_2+1)}{2}$ са различни триъгълни числа, като $\frac{m_1(m_1+1)}{2} < \frac{m_2(m_2+1)}{2}$. Но очевидно $\frac{m_1(m_1+1)}{2} + b_1 < \frac{m_2(m_2+1)}{2}$ за $0 \leqslant b_1 \leqslant m_1$. Противоречие.

Случай 2: $m_1 = m_2$. Тогава трябва b_1 да е различно от b_2, иначе $a_1 = a_2$, което влече $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$. Щом $b_1 \neq b_2$ и $m_1 = m_2$, то $\frac{m_1(m_1+1)}{2} + b_1 \neq \frac{m_2(m_2+1)}{2} + b_2$.

Щом f е инекция, обратното ѝ изображение е дефинирано и то е частична функция. Очевидно следният алгоритъм реализира въпросното обратно изображение. Това, че всяко естествено число е образ на някоя наредена двойка по отношение на изображението f доказва, че f е сюрекция (обратното изображение е **тотална** функция).

```
if (n == 0) {a = 0; b = 0;}
else {c = 1;
      while (c <= n) {n = n - c; c ++;}
      a = c - 1 - n; b = n;}
return (a, b);
```

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (1)

Теорема 2

Не съществува биекция $f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$.

Доказателство: В доказателството на Теорема 1 беше достатъчно да покажем само един начин за изброяване. Сега обаче не е достатъчно да покажем, че един определен начин за изброяване "не работи". Сега се иска да покажем, че **никой** начин за изброяване "не работи". Ще извършим доказателството с допускане на противното. Допускаме, че $2^{\mathbb{N}}$ е изброимо, тоест, съществува биекция $h : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$.

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (2)

Характеристична редица е безкрайна булева редица $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, която характеризира, или определя, дадено подмножество X на $\mathbb{N}$ по следното правило. За всяко $n \in \mathbb{N}$:

- ако $a_n = 1$, то n се съдържа в X,
- ако $a_n = 0$, то n не се съдържа в X.

Ето няколко примера за характеристични редици и подмножествата на $\mathbb{N}$, които определят:

- $(0, 0, 0, \ldots)$ */*само нули*/* определя празното множество;
- $(1, 1, 1, \ldots)$ */*(само единици)*/* определя самото $\mathbb{N}$;
- $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$ */*(повтаряне на 10)*/* определя четните числа;
- $(0, 1, 1, 0, 0, \ldots)$ */*(само две единици)*/* определя $\{1, 2\}$.

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (3)

Съществува очевидна биекция между характеристичните редици и подмножествата на $\mathbb{N}$.

Твърдението “подмножествата на $\mathbb{N}$ могат да бъдат изброени” става “характеристичните редици на $\mathbb{N}$ могат да бъдат изброени”. Това е допускането, което ще опровергаем.

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (4)

Допускаме изброяване на характеристичните редици: A_0, A_1, $\ldots$, като всяка характеристична редица се появява точно веднъж. Нека $A_0 = (a_{0,0}, a_{0,1}, \ldots)$, $A_1 = (a_{1,0}, a_{1,1}, \ldots)$, и така нататък. Представяме си ги написани в безкрайна колона:

$$\begin{aligned}
A_0 &= (a_{0,0}, a_{0,1}, a_{0,2}, a_{0,3}, \ldots) \\
A_1 &= (a_{1,0}, a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots) \\
A_2 &= (a_{2,0}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \ldots) \\
A_3 &= (a_{3,0}, a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \ldots) \\
&\ldots
\end{aligned}$$

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (5)

Разглеждаме главния диагонал: редицата
$X = (a_{0,0}, a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3}, \ldots)$.

$$
\begin{aligned}
A_0 &= (a_{0,0}, a_{0,1}, a_{0,2}, a_{0,3}, \ldots) \\
A_1 &= (a_{1,0}, a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots) \\
A_2 &= (a_{2,0}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \ldots) \\
A_3 &= (a_{3,0}, a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \ldots) \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Образуваме нейната "побитова инверсия", редицата
$\overline{X} = (\overline{a_{0,0}}, \overline{a_{1,1}}, \overline{a_{2,2}}, \overline{a_{3,3}}, \ldots)$.

За всяко i, j, $\overline{a_{i,j}} = 0$, ако $a_{i,j} = 1$, и обратно.

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (6)

Щом всяка булева числова редица се среща в изброяването (колоната), трябва и $\overline{X}$ да се среща. Но $\overline{X}$ не може да е A_0, защото се различават в поне една позиция – нулевата. Ако $a_{0,0} = 0$, то $\overline{a_{0,0}} = 1$; ако $a_{0,0} = 1$, то $\overline{a_{0,0}} = 0$.

Аналогично, $\overline{X}$ не може да е A_1, защото се различават в първата позиция, $\overline{X}$ не може да е A_2, защото се различават във втората позиция, и така нататък.

Тогава $\overline{X}$ не се среща в колоната; иначе казано, подмножеството B на $\mathbb{N}$, съответстващо на $\overline{X}$, няма образ в хипотетичната биекция $h : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$. $\square$

Теорема 3

За всяко множество A, не съществува сюрекция $g : A \to 2^A$.

Да допуснем противното. Тогава съществува A, такова че съществува сюрекция $g : A \to 2^A$. Разглеждаме множеството

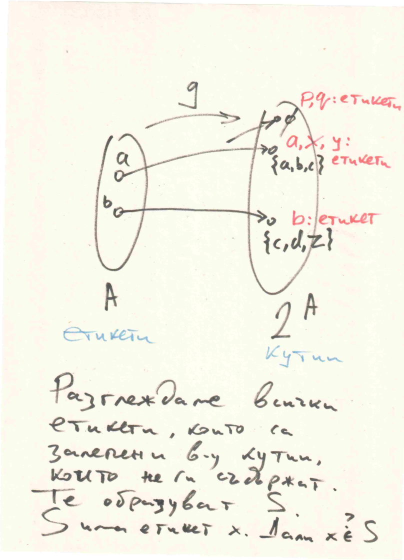
$$S = \{a \in A \mid a \notin g(a)\} \tag{1}$$

Но $S \in 2^A$ и g е сюрекция, следователно $\exists x \in A : g(x) = S$. Дали $x \in S$?

- Ако $x \in S$, то $x \notin S$ съгласно (1).
- Ако $x \notin S$, то $x \in S$ съгласно (1).

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (8)

Илюстрация на алтернативното доказателство



Ако X и Y са крайни множества и $|X| > |Y|$, то не съществува инекция $f : X \to Y$.

Алтернативна формулировка: ако има m ябълки в n чекмеджета и $m > n$, то в поне едно чекмедже има повече от една ябълка.

Обобщен принцип на Dirichlet: ако има $kn + 1$ ябълки в n чекмеджета, то в поне едно чекмедже има повече от k ябълки.

Наличие на минимален и максимален елемент в крайни частични наредби (1)

Теорема 4

Нека A е крайно множество и нека $R \subseteq A^2$ е частична наредба. Тогава R има поне един минимален и поне един максимален елемент.

БОО, ще докажем само факта, че съществува минимален елемент. Да допуснем противното. Тогава съществува крайно A и поне една частична наредба R над A, такава че R няма минимален елемент.

Наличие на минимален и максимален елемент в крайни частични наредби (2)

Избираме произволен $a \in A$. По допускане, a не е минимален, така че съществува $b \in A$, такъв че $b \neq a$ и bRa.

По допускане, b не е минимален, така че съществува $c \in A$, такъв че $c \neq b$ и cRb.

И така нататък. Може да изградим колкото искаме дълга верига, завършваща на a:

$$p = z, \cdots, c, b, a$$

Правим p с повече от $|A|$ елементи. Съгласно принципа на Dirichlet, p съдържа поне едно повтарящ се елемент x.

Наличие на минимален и максимален елемент в крайни частични наредби (3)

В общия случай, p изглежда така

$$p = z, \cdots, x, \cdots, x, \cdots, c, b, a$$

Може x да е a, или b, или c, или z. Не правим никакви допускания за това. Важното е, че има повтарящ се елемент. Знаем, че двете появи на x не са съседни – дефиницията на "верига" не го позволява.

Забелязваме, че в R има контур:

$$p = z, \cdots, \underbrace{x, \cdots, x}_{\text{това е контур}}, \cdots, c, b, a$$

Това противоречи на теоремата, според която в частичните наредби няма контури.

Топологическо сортиране (1)

Теорема 5

Нека A е крайно множество, $|A| = n$ и $R \subseteq A^2$ е частична наредба. Тогава съществува поне едно линейно разширение R' на R.

Доказателството е конструктивно: с алгоритъм, известен като *Topological Sorting*. Няма да строим самото линейно разширение R', а ще построим $B[1, \ldots, n]$, в който ще разположим елементите на A. Разполагането на елементи на множество в масив задава еднозначно линейна наредба. Формално, B и R' са съвършено различни обекти; най-малкото, $|R'| = \frac{n(n+1)}{2}$. Но R' може да бъде конструирана лесно от B.

Вход: крайно A, като $|A| = n$; частична наредба $R \subseteq A^2$
Изход: масив B, реализиращ линейно разширение R' на R

1. $i \leftarrow 1$
2. избираме произволен $a \in A$, който е минимален елемент на R
3. $B[i] \leftarrow a$, изтриваме a от A и от R, правим $i{++}$
4. ако $i = n + 1$, върни B, в противен случай иди на 2.

Алгоритъмът е коректен, тъй като в началото има поне един минимален елемент съгласно Теорема 4, а при всяка следващо достигане на ред 2 пак има поне един минимален елемент, тъй като изтриване на елемент от релацията не може да образува цикъл, ерго тя остава частична наредба след всяко изтриване на ред 3.

КРАЙ