Лекция 5: Принципи на изброителната комбинаторика

Минко Марков
minkom@fmi.uni-sofia.bg

Факултет по Математика и Информатика
Софийски Университет "Свети Климент Охридски"

15 април 2020 г.

Изброителна комбинаторика (Enumerative Combinatorics)

Комбинаториката е дял на дискретната математика, чийто предмет е изброяването на някакви обекти, наречени *комбинаторни структури* или *комбинаторни конфигурации*. Какви са тези комбинаторни структури ще стане ясно нататък.

Изброителната комбинаторика търси точни формули за бройките на тези обекти.

Аналитичната комбинаторика ползва средства от математическия анализ, за да брои комбинаторни структури, но не чрез точни формули, а чрез асимптотични формули.

Като прост пример, нека X и Y са крайни множества и $|X| = |Y| = n$. Колко повече са частичните функции $f : X \to Y$ от тоталните функции $g : X \to Y$, при n клонящо към безкрайност? Първите са $(n+1)^n$, вторите са n^n, оттук

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

Ще разгледаме няколко основни закона на комбинаториката. Те не са аксиоми: всеки от тях може да бъде доказан.

Ще направим подробно доказателство само на принципа на включването и изключването.

Оттук нататък всички множества, които разглеждаме, са крайни, освен ако изрично не е казано, че са безкрайни.

Първи принцип: Принцип на Dirichlet. Вече го разгледахме. Приемаме го без доказателство.

Втори принцип: Принцип на разбиването. Дадено е множество X и разбиване $\mathcal{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_k\}$ на X. Тогава

$$|X| = |Y_1| + \cdots + |Y_k| \tag{1}$$

Забележете, че това остава в сила дори някои от множествата $Y_1, \ldots, Y_k$ да са празни. Съгласно формалната дефиниция, това не би било разбиване, но (1) остава в сила: мощностите на празните Y_i са нули и те не се отразяват на сумата.

Приемаме този принцип за очевиден и няма да правим доказателство.

Това е тривиално следствие от принципа на разбиването. Нека е дадено множество A в универсум U. Тогава

$$|A| = |U| - |\overline{A}| \tag{2}$$

Очевидно $\{A, \overline{A}\}$ е разбиване на универсума, така че от принципа на разбиването имаме $|U| = |A| + |\overline{A}|$.

Не е невъзможно $\overline{A}$ да е празно, но и тогава (2) остава в сила.

Трети принцип: Принцип на умножението. Нека A и B са множества. Тогава

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Приемаме го за очевиден и без доказателство.

Естествено обобщение е следното. Ако $A_1, \ldots, A_k$ са множества, то

$$|A_1 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \cdot \ \cdots \ \cdot |A_k|$$

Написано по по-икономичен начин:

$$\left| \bigtimes_{i=1}^{k} A_i \right| = \prod_{i=1}^{k} |A_i|$$

Четвърти принцип: Принцип на биекцията. Нека A и B са множества. $|A| = |B|$ тогава и само тогава, когато съществува биекция $f : A \rightarrow B$.

Това е очевидно и го приемаме без доказателство.

Този принцип е много полезен, когато, за да изброим някакви обекти, изброяваме други обекти и показваме, че съществува биекция между двете множества от обекти.

Пети принцип: Принцип на делението. Нека A е множество. Нека $R \subseteq A^2$ е релация на еквивалентност. Нека A има k класа на еквивалентност и всеки клас на еквивалентност има кардиналност m. Тогава

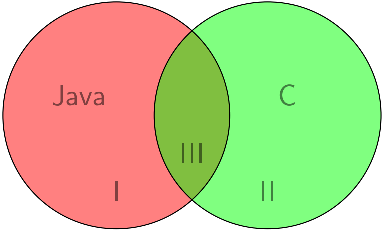
$$m = \frac{|A|}{k}$$

Шести принцип: Принцип на включването и изключването. Явява се обобщение на принципа на разбиването. При разбиването намираме кардиналност на множество като сума от кардиналностите на дяловете на някое негово разбиване. Сега е дадено покриване на множеството и намираме кардиналността на множеството, като събираме и изваждаме кардиналностите на дяловете на покриването, техните сечения по двойки, по тройки и така нататък.

Дадена е група студенти. 10 от тях посещават практикум по Java, 12 посещават практикум по C и е известно, че всеки студент посещава поне един практикум. От колко студента се състои групата?

Нека групата е A. Очевидно $12 \leqslant |A| \leqslant 22$, като тези граници са точни.

Ако обаче е известно, че точно 2-ма студенти посещават и Java, и C, веднага следва, че $|A| = 20$. По-подробно, $|A| = 10 + 12 - 2 = 20$.



Сумата $10 + 12 = 22$ брои прекалено много (overcounting). Тя брои райони I и II правилно, по веднъж, но брои район III неправилно: два пъти.

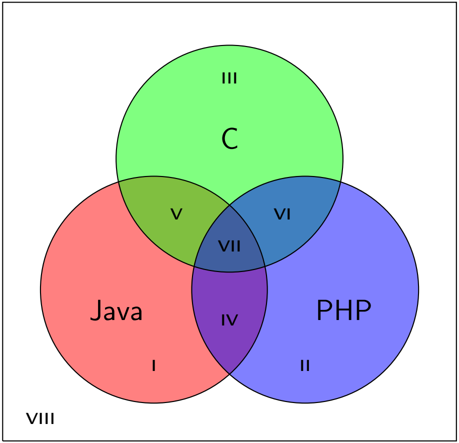
Сумата $10 + 12 - 2 = 20$ брои всеки район точно веднъж.

Дадена е група студенти. 20 посещават практикум по Java, 19 по C и 17 по PHP. 8 посещават Java и C, 7 посещават Java и PHP, 8 посещават C и PHP. 3 посещават и трите практикума. Групата се състои от 46 студенти. Колко студенти не посещават нито един от трите практикума?

Отговорът е

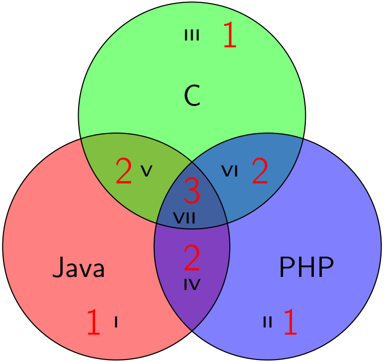
$$46 - (20 + 19 + 17) + (8 + 7 + 8) - 3 = 46 - 56 + 23 - 3 = 10$$

$(20 + 19 + 17) - (8 + 7 + 8) + 3 = 36$ е броят на студентите в поне един практикум. Да видим защо.



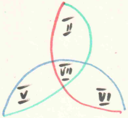
Търсим кардиналността на обединението на Java, C и PHP.

I, ..., VIII са районите. I са тези, които ходят само на Java, V са само на Java и C, и т.н. Ние не знаем кардиналностите на районите, освен на VII. Ако ги знаехме, задачата щеше да е много лесна.



Сумата $20 + 19 + 17$ брои I, II и III по един път, но IV, V и VI биват броени по два пъти, а тримата студенти от VII биват броени три пъти от тази сума.

Заради това 56 е повече от кардиналността на обединението.



8+7+8 брои $\overline{\text{II}}$, $\overline{\text{V}}$ и $\overline{\text{VI}}$
веднъж и $\overline{\text{VII}}$ три пъти.
Тогава $(20+19+17)-(8+7+8)$
брои $\overline{\text{I}}$, $\overline{\text{III}}$, $\overline{\text{IV}}$, $\overline{\text{II}}$, $\overline{\text{V}}$ и $\overline{\text{VI}}$ по
веднъж (правилно!),
но брои $\overline{\text{VII}}$ нула пъти.

$(20+19+17)-(8+7+8)+3$ брои
всеки от районите $\overline{\text{I}}$.. $\overline{\text{VII}}$ веднъж
Тогава 36 студенти ходят
на поне един факт., така че
$46-36=10$ не ходят на
нито един.

Теорема 1

За всяко $n \geqslant 1$, за всеки n множества A_1, A_2, ..., A_n:

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n| \quad (3)$$

Доказателството е с индукция по n.

Базата е $n = 1$. (3) става $|A_1| = |A_1|$. ✓

Индукционното предположение е, че за всеки $n - 1$ множества:

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} |A_i \cap A_j| - \cdots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}| \quad (4)$$

Индукционната стъпка е за стойност на аргумента n.

В сила е

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1} \cup A_n| = |\underbrace{(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})}_{X} \cup \underbrace{A_n}_{Y}| =$$

$$|\underbrace{A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}}_{X}| + |\underbrace{A_n}_{Y}| - |\underbrace{(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})}_{X} \cap \underbrace{A_n}_{Y}| \quad (5)$$

тъй като $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$ (от (3) при $n = 2$).

Знаем колко е $|A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}|$ от (4). Да разгледаме $|(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cap A_n|$.

В сила е

$$(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cap A_n = (A_1 \cap A_n) \cup \dots \cup (A_{n-1} \cap A_n) \qquad (6)$$

заради дистрибутивността на сечението спрямо обединението.

Дясната страна на (6) е обединение на $n-1$ множества и (4) е в приложимо. Съгласно (4):

$$\begin{aligned} |(A_1 \cap A_n) \cup \dots \cup (A_{n-1} \cap A_n)| = &+ \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |A_i \cap A_n| \\ &- \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} |(A_i \cap A_n) \cap (A_j \cap A_n)| + \\ &+ \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n-1} |(A_i \cap A_n) \cap (A_j \cap A_n) \cap (A_k \cap A_n)| \\ &\dots \\ &+ (-1)^{n-2} |(A_1 \cap A_n) \cap \dots \cap (A_{n-1} \cap A_n)| \qquad (7) \end{aligned}$$

Опростявайки дясната страна на (7) и предвид (6), получаваме

$$
\begin{aligned}
|(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cap A_n| = &+ \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |A_i \cap A_n| \\
&- \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} |A_i \cap A_j \cap A_n| + \\
&+ \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n-1} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_n| \\
&\cdots \\
&+ (-1)^{n-2} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n| \qquad (8)
\end{aligned}
$$

В дясната страна на (5) заместваме съгласно (4) и (8) и получаваме

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1} \cup A_n| = \\
&\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n-1} |A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-2}|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}|\right) \\
&+ |A_n| \\
&- \left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n-1} |A_i \cap A_n| - \cdots + (-1)^{n-2}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n|\right) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-2}|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}| \\
&- \sum_{1\leqslant i\leqslant n-1} |A_i \cap A_n| + \cdots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n|
\end{aligned}
\tag{9}
$$

В дясната страна на (9) групираме събираемите от горния и долния ред по подходящ начин:

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n-1} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-2} |A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}|$$

$$- \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |A_i \cap A_n| + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} |A_i \cap A_j \cap A_n| - \cdots + (-1)^{n-2} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{n-2} \leqslant n-1} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{n-2}} \cap A_n| + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n| =$$

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-2} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{n-1} \leqslant n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{n-1}}| + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$$

Получихме дясната страна на (3). $\square$

Принцип на включването и изключването (12)

Символно, групирания и опростявания в дясната страна на (9) са следните

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i| \text{ не се групира с нищо;}$$

$$-\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} |A_i \cap A_n| = -\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j|;$$

$$\sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n-1} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} |A_i \cap A_j \cap A_n| = \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k|;$$

$$\ldots$$

$$(-1)^{n-2}|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}| \text{ се групира с } (-1)^{n-2} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{n-2} \leqslant n-1} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{n-2}} \cap A_n|;$$

$$(-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n| \text{ не се групира с нищо.}$$

Принцип на включването и изключването (13)

Това е лесно следствие от Теорема 1.

Следствие 1

За всяко $n \geqslant 1$, за всеки n множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$, намиращи се в произволен универсум U:

$$|\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n}| = |U| - \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i| + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| - \cdots + (-1)^n |A_1 \cap \cdots \cap A_n| \quad (10)$$

Доказателство: Имаме

$$|\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n}| = |U| - |A_1 \cup \cdots \cup A_n| \quad (11)$$

от принципа на изваждането.

Лявата страна на (11) е $|\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n}|$ по обобщения закон на De Morgan, а в дясната му страна заместваме $|A_1 \cup \cdots \cup A_n|$ с израза от (3). Получаваме (10). □

КРАЙ