УСЛОВИЯ И ОТГОВОРИ

1. Подредете функциите по порядък: 3^{n^2}, 5^n, n^{4n}, $\log^6 n$, n^5.

Отговор: $\log^6 n \prec n^5 \prec 5^n \prec n^{4n} \prec 3^{n^2}$.

2. Решете рекурентните уравнения:

$T(n) = 128T\left(\frac{n}{2}\right) + n^7$; $T(n) = \frac{16}{9}T\left(\frac{3n}{4}\right) + n\sqrt{2n}$; $T(n) = 4T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$.

Отг. $T(n) = \Theta\left(n^7 \log n\right)$. **Отг.** $T(n) = \Theta\left(n^2\right)$. **Отг.** $T(n) = \Theta\left(n^2\right)$.

3. $T(n) = 13T(n-1) - 40T(n-2) + 9n^2 5^n$ **Отговор:** $T(n) = \Theta\left(8^n\right)$.

$T(n) = T(n-1) + \sqrt[9]{n}$ **Отговор:** $T(n) = \Theta\left(n^{10/9}\right)$.

---

1. Подредете функциите по порядък: 5^{2n}, 8^n, $\log^{2015} n$, n^6, $\sqrt{n^{15}}$.

Отговор: $\log^{2015} n \prec n^6 \prec \sqrt{n^{15}} \prec 8^n \prec 5^{2n}$. .

2. Решете рекурентните уравнения:

$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + 1{,}5^n$; $T(n) = 125T\left(\frac{n}{5}\right) + 1000\, n^2$; $T(n) = 32T\left(\frac{n}{2}\right) + n^5$.

Отг. $T(n) = \Theta\left(1{,}5^n\right)$. **Отг.** $T(n) = \Theta\left(n^3\right)$. **Отг.** $T(n) = \Theta\left(n^5 \log n\right)$.

3. $T(n) = 12T(n-1) - 20T(n-2) + 4n\ 15^n$ **Отговор:** $T(n) = \Theta\left(n \,.\, 15^n\right)$.

$T(n) = T(n-1) + n^{2/15}$ **Отговор:** $T(n) = \Theta\left(n^{17/15}\right)$.

---

1. Подредете функциите по порядък: 3^{n^2}, 5^n, n^{4n}, $\log^6 n$, n^5.

Отговор: $\log^6 n \prec n^5 \prec 5^n \prec n^{4n} \prec 3^{n^2}$.

2. Решете рекурентните уравнения:

$T(n)=128T\left(\frac{n}{2}\right)+n^7$; $T(n)=\frac{16}{9}T\left(\frac{3n}{4}\right)+n\sqrt{2n}$; $T(n)=4T\left(\frac{n}{4}\right)+n^2$.

Отг. $T(n)=\Theta\left(n^7 \log n\right)$. **Отг.** $T(n)=\Theta\left(n^2\right)$. **Отг.** $T(n)=\Theta\left(n^2\right)$.

3. $T(n)=17T(n-1)-72T(n-2)+9n^2 5^n$ **Отговор:** $T(n)=\Theta\left(9^n\right)$.

$T(n)=T(n-1)+\sqrt[7]{n}$ **Отговор:** $T(n)=\Theta\left(n^{8/7}\right)$.

---

1. Подредете функциите по порядък: 5^{2n}, 8^n, $\log^{2015} n$, n^6, $\sqrt{n^{15}}$.

Отговор: $\log^{2015} n \prec n^6 \prec \sqrt{n^{15}} \prec 8^n \prec 5^{2n}$. .

2. Решете рекурентните уравнения:

$T(n)=9T\left(\frac{n}{3}\right)+1{,}5^n$; $T(n)=125T\left(\frac{n}{5}\right)+1000\,n^2$; $T(n)=32T\left(\frac{n}{2}\right)+n^5$.

Отг. $T(n)=\Theta\left(1{,}5^n\right)$. **Отг.** $T(n)=\Theta\left(n^3\right)$. **Отг.** $T(n)=\Theta\left(n^5 \log n\right)$.

3. $T(n)=16T(n-1)-63T(n-2)+4n\ 15^n$ **Отговор:** $T(n)=\Theta\left(n\,.\,15^n\right)$.

$T(n)=T(n-1)+n^{4/29}$ **Отговор:** $T(n)=\Theta\left(n^{33/29}\right)$.

4. Какво връща следният алгоритъм? **Отг.** `n!`

Формулирайте използваема инварианта на цикъла. **Отг.** `s = (k-1)!`

```
Alg(n: integer): integer
s ← 1
for k ← 1 to n
    s ← s * k
return s
```

---

4. Какво връща следният алгоритъм? **Отг.** Индекса на първото четно число.

Формулирайте използваема инварианта на цикъла.

Отг. Числата `A[1] , A[2] , ... , A[k-1]` са нечетни.

```
Alg(A[1...n]: array of integers): integer
for k ← 1 to n
    if A[k] е четно
        return k
return -1
```

---

4. Какво връща следният алгоритъм? **Отг.** `true` $\Leftrightarrow$ `A` $= (1, 2, \ldots, n)$.

Формулирайте използваема инварианта на цикъла.

Отг. `A[i] = i`, $\forall$ `i` $= 1, 2, \ldots, k-1$.

```
Alg(A[1...n]: array of integers): boolean
for k ← 1 to n
    if A[k] ≠ k
        return false
return true
```

---

4. Какво връща следният алгоритъм? **Отг.** Най-голямата стойност в масива.

Формулирайте използваема инварианта на цикъла:

Отг. `s = max` $\{$ `A[1] , ... , A[k-1]` $\}$.

```
Alg(A[1...n]: array of integers): integer
s ← A[1]
for k ← 2 to n
    if A[k] > s
        s ← A[k]
return s
```

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ

1. Подредете функциите по порядък: 3^{n^2}, 5^n, n^{4n}, $\log^6 n$, n^5.

Отговор: $\log^6 n \prec n^5 \prec 5^n \prec n^{4n} \prec 3^{n^2}$.

Доказателство: Проверяваме всяко сравнение поотделно, като прилагаме подходяща техника.

1) $\log^6 n \prec n^5 \Leftrightarrow \log n \prec n^{5/6}$, което следва от границата

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{5/6}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{\frac{5}{6} n^{-1/6}} = \lim_{n\to\infty} \frac{6}{5n^{5/6}} = \frac{6}{\infty} = 0.$$

2) Логаритмуваме двете страни:

$\log\left(n^5\right) = 5 \log n \asymp \log n$; $\log\left(5^n\right) = n \log 5 \asymp n$;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0.$$ Следователно

$\log n \prec n$, т.е. $\log\left(n^5\right) \prec \log\left(5^n\right)$. Понеже $5^n \to \infty$ при $n \to \infty$, то следва, че $n^5 \prec 5^n$ (антилогаритмуването усилва разликите).

3) Неравенствата $5^n \prec n^{4n} \prec 3^{n^2}$ също се доказват чрез логаритмуване:

$\log\left(5^n\right) = n \log 5 \asymp n$,

$\log\left(n^{4n}\right) = 4n \log n \asymp n \log n$,

$\log\left(3^{n^2}\right) = n^2 \log 3 \asymp n^2$,

като се отчете фактът, че $n \prec n \log n \prec n^2$
(тези неравенства на свой ред се доказват с помощта на граници).

2. Тази задача се решава чрез мастър-теоремата. Всяко от трите рекурентни уравнения попада в различен случай на мастър-теоремата.

3. **а)** Да се реши уравнението $T(n) = 13T(n-1) - 40T(n-2) + 9n^2 5^n$.

Решение: Това е линейно-рекурентно уравнение. От хомогенната част получаваме характеристичното уравнение $x^n = 13x^{n-1} - 40x^{n-2}$, което при $x \neq 0$ е равносилно на уравнението $x^2 - 13x - 40 = 0$ с корени 5 и 8. От свободния член се получават още три петици, които заедно с корените образуват мултимножеството $\{ 5 \; ; \; 5 \; ; \; 5 \; ; \; 5 \; ; \; 8 \}_М$. Следователно
$T(n) = C_1 5^n + C_2 n\, 5^n + C_3 n^2 5^n + C_4 n^3 5^n + C_5 8^n \asymp 8^n$.

Отговор: $T(n) = \Theta\left(8^n\right)$.

б) Да се реши уравнението $T(n) = T(n-1) + \sqrt[9]{n}$.

Решение: Тук не можем да приложим метода от подточка "а" поради дробната степен на свободния член. Уравнението се решава чрез развиване:

$$T(n) = T(n-1) + \sqrt[9]{n} = T(n-2) + \sqrt[9]{n-1} + \sqrt[9]{n} = T(n-3) + \sqrt[9]{n-2} + \sqrt[9]{n-1} + \sqrt[9]{n} =$$

$$= \ldots = T(0) + \sqrt[9]{1} + \ldots + \sqrt[9]{n-1} + \sqrt[9]{n} \asymp 1^{1/9} + 2^{1/9} + \ldots + n^{1/9} \asymp n^{10/9}.$$

Отговор: $T(n) = \Theta\left(n^{10/9}\right)$.

4. Какво връща следният алгоритъм? **Отг.** `n!`

Формулирайте използваема инварианта на цикъла. **Отг.** `s = (k-1)!`

```
Alg(n: integer): integer
s ← 1
for k ← 1 to n
    s ← s * k
return s
```

Доказателство на инвариантата: чрез индукция.

База: При първото изпълнение на проверката $k \overset{?}{\leq} n$ имаме $s = 1$ и $k = 1$. Тогава $(k–1)! = 0! = 1$, т.е. равенството $s = (k–1)!$ е в сила.

Поддръжка: Нека $s = (k–1)!$ при някое изпълнение на проверката за край на цикъла, което да не е последно (т.е. $k \leq n$). След една итерация стойността на s се умножава по k, т.е. $s = (k–1)!\; k = k!$; обаче и стойността на k се увеличава с единица, затова в равенството $s = k!$ (което се отнася за новата стойност на s и старата стойност на k) заменяме k с $k - 1$ (старото k е с едно по-малко от новото). Така отново $s = (k–1)!$, с което инвариантата е доказана.

Доказателство на твърдението за върнатата стойност: Цикълът завършва при $k = n + 1$. Алгоритъмът връща $s = (n+1–1)! = n!$ (според инвариантата).