Малко контролно I

Име: ФН: Курс: Група:

Задача 1: (*7 точки*) Подредете в асимптотично нарастващ ред функциите:

$$n^{\frac{n}{\lg n}}, \qquad (\lg n)^{2n}, \qquad \sum_{i=1}^{n} \sqrt[3]{i}, \qquad n^{2\lg n}, \qquad 2^{n^{\sqrt{2}}}$$

Задача 2: (*6 точки*) Решете следните рекурентни уравнения:

а) $T(n) = 3T(n-1) + 2n^2$

б) $T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n\log n$

в) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) - T\left(\frac{n}{4}\right) + 4$

г) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right) + n^2 + n\log n$

Задача 3: (*7 точки*) Докажете, че `alg1()` намира дължината на най-дългата подредица от еднакви елементи на масива `a[n]`:

```
int a[n];

int alg1()
{
    int c = 1, m = 1;

    for (int i = 1; i < n; i++)
    {
        if (a[i] == a[i - 1]) c++; else c = 1;
        if (c > m) m = c;
    }

    return m;
}
```

Задача 4: (*6 точки*) Докажете, че за $n \geq 1 : p(1, n) = q(n, 3)$, където p и q са следните рекурсивни функции:

```
int p(int n, int m)
{
     if (m == 1) return n;
     else return p(n + 1, m - 1) + n * m;
}

int q(int n, int m)
{
     if (m == 1) return n;
     else return q(n + 1, m - 1) * n / m;
}
```

Решения

Задача 1:

Правилният ред е:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt[3]{i} \prec n^{2\lg n} \prec n^{\frac{n}{\lg n}} \prec (\lg n)^{2n} \prec 2^{n^{\sqrt{2}}}$$

1) От интегралния критерий:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt[3]{i} = \Theta\left(n^{\frac{4}{3}}\right)$$

Освен това:

$$\lg n^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}\lg n \prec 2\lg^2 n = \lg\left(n^{2\lg n}\right)$$

, така че:

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt[3]{i} \prec n^{2\lg n}$$

2) Тъй като $\lg\left(n^{2\lg n}\right) = 2\lg^2 n \prec n = \lg\left(n^{\frac{n}{\lg n}}\right)$, то $n^{2\lg n} \prec n^{\frac{n}{\lg n}}$

3) Тъй като $\lg\left(n^{\frac{n}{\lg n}}\right) = n \prec 2n\lg\lg n = \lg((\lg n)^{2n})$, то $n^{\frac{n}{\lg n}} \prec (\lg n)^{2n}$

4) Тъй като $\lg((\lg n)^{2n}) = 2n\lg\lg n \prec n^{\sqrt{2}} = \lg\left(2^{n^{\sqrt{2}}}\right)$, то $(\lg n)^{2n} \prec 2^{n^{\sqrt{2}}}$

Задача 2:

а) $T(n) = 3T(n-1) + 2n^2$

Общият вид на това рекурентно уравнение е:

$$T(n) = \alpha_0.1^n + \alpha_1.n.1^n + \alpha_2.n^2.1^n + \beta.3^n = \Theta(3^n)$$

б) $T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n\log n$

$f(n) = n\log n = \Omega\left(n^{\log_4 3+\varepsilon}\right)$ за $0 < \varepsilon \leq 1 - \log_4 3$.

Освен това:

$$\forall n \geq 1 : 3f\left(\frac{n}{4}\right) = 3\frac{n}{4}\log\frac{n}{4} \leq \frac{3}{4}n\log n = \frac{3}{4}f(n)$$

От третия случай на Мастър теоремата имаме: $T(n) = \Theta(n\log n)$.

в) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) - T\left(\frac{n}{4}\right) + 4$

Нека $n = 2^m$ $(m = \lg n)$.

Сега $T(2^m) = 2T(2^{m-1}) - T(2^{m-2}) + 4$ или $S(m) = 2S(m-1) - S(m-2) + 4$
Общият вид на $S(m)$ е:

$$S(m) = \alpha_0 . 1^m + \alpha_1 . m . 1^m + \alpha_2 . m^2 . 1^m = \Theta(m^2) = \Theta(\lg^2 n)$$

г) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right) + n^2 + n \log n$

$$f(n) = n^2 + n \log n = \Theta(n^2) = \Theta\left(n^{\log_{\sqrt{2}} 2}\right)$$

От втория случай на Мастър теоремата имаме: $T(n) = \Theta(n^2 \log n)$.

Задача 3:

Инварианта на цикъла: *На всяка итерация,* c *съдържа дължината на най-дългата подредица от еднакви елементи, завършваща в* $a[i-1]$*, а* m *- дължината на най-дългата такава редица, сред елементите до* $a[i-1]$ *включително.*

База:

В началото на цикъла $i = 1$.

Стойностите са $c = 1$ и $m = 1$. Те отговарят на най-дългата подредица от еднакви елементи завършваща в $a[0]$ и сред елементите до $a[0]$ включително.

Поддръжка:

Нека е вярно за някоя итерация, която не е последна, т.е. $i = k \neq n$.

Имаме, че c съдържа дължината на най-дългата такава редица, завършваща в $a[k-1]$, а m съдържа дължината на най-дългата такава редица сред елементите до $a[k-1]$ включително.

Ако $a[k] = a[k-1]$, то текущата подредица от еднакви елементи продължава, така че дължината на най-дългата такава, завършваща в $a[k]$, е равна на $c + 1$.

В противен случай, $a[k]$ е начало на нова подредица и най-дългата, завършваща в $a[k]$ е с дължина 1 (самият елемент $a[k]$).

Ако подредицата, завършваща в $a[k]$ е по-дълга от най-дългата намерена досега, то m става равно на c. В противен случай m не се променя.

При всички случаи, на следващата итерация имаме $i = k + 1$, c съдържа дължината на най-дългата подредица от еднакви елементи, завършваща в $a[k]$, а m съдържа дължината на най-дългата такава редица сред елементите до $a[k]$ включително - твърдението остава вярно.

Терминация:

На последната итерация $i = n$, c съдържа дължината на най-дългата подредица от еднакви елементи, завършваща в $a[n-1]$, а m съдържа дължината на най-дългата такава редица сред елементите до $a[n-1]$ включително.

Сега цикълът приключва, а програмата връща m, което е търсената стойност.

Задача 4:

Разписваме последователно изразите за $p(1, n)$:

$$p(1,n) = p(2, n-1) + 1.n = p(3, n-2) + 2.(n-1) + 1.n = \ ... =$$

$$= p(n,1) + (n-1).2 + \ ... + 2.(n-1) + 1.n =$$

$$= n + (n-1).2 + \ ... + 1.n = \sum_{i=1}^{n} (n-i+1).i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (n+1).i - \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Аналогично за $q(n, 3)$:

$$q(n,3) = q(n+1,2).\frac{n}{3} = q(n+2,1).\frac{n+1}{2}.\frac{n}{3} = (n+2).\frac{n+1}{2}.\frac{n}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$