Семестриално контролно по "Дискретни структури" за специалност "Информатика", I курс, СУ, ФМИ, 14 май 2016 г.

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	Общо
получени точки							
максимум точки	*20*	*20*	*20*	*20*	*20*	*20*	*120*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.*

Забележка 2: *За отлична оценка са достатъчни 100 точки.*

Задача 1. Всяка точка в пространството $\mathbb{R}^3$ е оцветена или в синьо, или в червено, или в жълто. Докажете, че както и да са оцветени точките, за всяко $r > 0$ съществуват две едноцветни точки на разстояние, равно на r.

Задача 2. Нека p, q и r са произволни съждения. Нека x и y са произволни реални числа, а $P(x,y)$ е предикатът $x + y = 0$.

а) Проверете дали следните две съставни съждения

$$\big(\, p \rightarrow q \,\big) \leftrightarrow \big(\, p \rightarrow r \,\big)$$

$$\big(\, q \wedge r \,\big) \;\vee\; \neg p$$

са еквивалентни.

б) Докажете или опровергайте всяко от следните две съждения:

$$\forall x\; \exists y : P(x,y)$$
$$\exists y\; \forall x : P(x,y)$$

Задача 3. Съществува ли биекция, която да е и релация на еквивалентност?

Задача 4. Нека A, B и C са множества, за които е в сила включването $B \subset A \cup C$. Докажете, че $B \cap \Big(A \cup \overline{C} \,\Big) = A \cap B$.

Задача 5. По колко начина може да се състави парола от седем различни арабски цифри и три различни малки латински букви? Цифрите и буквите могат да бъдат навсякъде в паролата.

Забележка: Има 26 латински букви и 10 арабски цифри.

Задача 6. Да се докаже, че за всяко естествено число $n \geq 3$ можем да изразим числото 30 чрез n петици и произволен брой скоби и знаци за събиране, изваждане, умножение и деление.

Пример: За $n = 3$ *можем да съставим израза* $5 \times 5 + 5$ *със стойност* 30. *Трябва да покажете, че и за останалите стойности на* n *има такива изрази.*

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Да разгледаме правилен тетраедър $ABCD$ с дължина на ръба r. Четирите върха на тетраедъра са оцветени в три цвята. От принципа на Дирихле следва, че някои два върха, например A и B, са оцветени в един и същи цвят. Освен това $|AB| = r$, така че точките A и B удовлетворяват всички изисквания от условието на задачата.

Задача 2.

а) Двете съставни съждения не са еквивалентни: ако p е вярно съждение, а q и r — неверни, то $\left(p \to q\right) \leftrightarrow \left(p \to r\right)$ е вярно съждение, а $\left(q \wedge r\right) \vee \neg p$ — невярно.

б) Съждението $\forall x\ \exists y : P(x, y)$ е вярно: за всяко реално число x съществува реално число y, такова, че $x + y = 0$, а именно $y = -x$.

Съждението $\exists y\ \forall x : P(x, y)$ е невярно. Да допуснем противното: че съществува реално число y, такова, че $x + y = 0$, т.е. $x = -y$, за всяко реално число x. С други думи, всички реални числа са равни помежду си (защото са равни на $-y$), което, както знаем, не е така. Полученото противоречие показва, че направеното допускане не е вярно. Значи, съждението $\exists y\ \forall x : P(x, y)$ е неистинно.

Задача 3. За да бъде функцията f и релация на еквивалентност, тя трябва да е от вида $f : A \to A$, т.е. дефиниционното и функционалното множество съвпадат. Освен това f трябва да бъде:

а) рефлексивна: $f(x) = x$ за $\forall x \in A$;

б) симетрична: за $\forall x \in A$, $\forall y \in A$, ако $f(x) = y$, то и $f(y) = x$, т.е. $f^{-1} = f$;

в) транзитивна: за $\forall x \in A$, $\forall y \in A$, $\forall z \in A$, ако $f(x) = y$ и $f(y) = z$, то $f(x) = z$, т.е. $f = f \circ f$.

От рефлексивността следва, че f може да бъде само идентитетът, тоест $f(x) = x$ за $\forall x \in A$. Не е трудно да се провери, че идентитетът притежава и другите две свойства:

— симетричност: ако $f(x) = y$, то $y = x$, следователно $f(y) = y = x$;

— транзитивност: ако $f(x) = y$ и $f(y) = z$, то $y = x$ и $z = y$, следователно $f(x) = x = y = z$.

И така, идентитетът е релация на еквивалентност. Освен това идентитетът е биекция, защото $\forall y \in A$ има единствен първообраз $x \in A$, а именно $x = y$: $f(x) = x = y$.

Отговор: Идентитетът (и само той) е едновременно биекция и релация на еквивалентност.

Задача 4. Използваме табличния метод.

A	B	C	$A \cup C$	$B \subset A \cup C$	$\overline{C}$	$A \cup \overline{C}$	$B \cap \left(A \cup \overline{C}\right)$	$A \cap B$
0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0				
0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1	1

Доказаното тъждество следва от равенството на последните две колонки.

Задача 5. Първо да изберем (без определен ред) седем различни арабски цифри. Тъй като избираме цифрите без определен ред, то имаме комбинации; а понеже избираме различни цифри, то имаме комбинации без повторение. Техният брой е C_{10}^{7} (от десет цифри избираме седем): $C_{10}^{7} = \frac{\cancel{10!}}{\cancel{7!}\,3!} = \frac{10\,.\,9\,.\,8}{1\,.\,2\,.\,3} = \frac{720}{6} = 120$, тоест има 120 начина да изберем седем от десет цифри без определен ред.

След това да изберем (отново без определен ред) три различни малки латински букви. Поради същите причини работим с комбинации без повторение. Техният брой е равен на $C_{26}^{3} = \frac{\cancel{26!}}{3!\,\cancel{23!}} = \frac{26\,.\,25\,.\,24}{1\,.\,2\,.\,3} = \frac{26\,.\,25\,.\,\cancel{24}}{\cancel{6}} = 26\,.\,25\,.\,4 = 26\,.\,100 = 2600$, тоест има 2600 начина да изберем три от двадесет и шест латински букви без определен ред.

Всеки избор на цифри може да бъде комплектуван с всеки избор на латински букви, затова прилагаме правилото за умножение: седем арабски цифри и три малки латински букви могат да бъдат избрани без определен ред по $120\,.\,2600 = 312\,000$ начина.

Обаче две пароли се различават не само по избора на знаците, но и по техния ред. Затова сега трябва да вземем под внимание и реда на знаците. Нека сме избрали десет различни знака (седем цифри и три букви). Да ги разместим по всички възможни начини. Редиците се различават само по реда на знаците, т.е. това са пермутации (без повторение: не съдържат еднакви знаци). Следователно броят на редиците е равен на $P_{10} = 10! = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7\,.\,8\,.\,9\,.\,10 = 3\,628\,800$.

От всеки избор на седем различни арабски цифри и три различни малки латински букви се получават $3\,628\,800$ редици. От всичките $312\,000$ избора на десет знака се получават общо $312\,000\;.\;3\,628\,800 = 1\,132\,185\,600\,000$ пароли.

Втори начин: Първо избираме местата на цифрите, т.е. избираме седем позиции от десет. Изборът протича без повторение (не можем да изберем една позиция два пъти) и без наредба (все едно е дали ще изберем например петата и седмата, или седмата и петата позиция); т.е. имаме комбинации без повторение. Броят им е C_{10}^{7} (от десет позиции взимаме седем): $C_{10}^{7} = \frac{\cancel{10!}}{\cancel{7!}\,3!} = \frac{10\,.\,9\,.\,8}{1\,.\,2\,.\,3} = \frac{720}{6} = 120$, тоест има 120 начина да изберем седем от десет позиции без определен ред. Разбира се, можем да изберем позициите на трите букви, но то е същото: $C_{10}^{3} = \frac{\cancel{10!}}{3!\,\cancel{7!}} = \frac{10\,.\,9\,.\,8}{1\,.\,2\,.\,3} = \frac{720}{6} = 120$.

След това избираме седем различни арабски цифри: без повторение (щом са различни) и в определен ред (подреждаме ги отляво надясно на местата, избрани за цифри). Следователно имаме вариации без повторение: $V_{10}^{7} = \frac{10!}{(10-7)!} = \frac{\cancel{10!}}{\cancel{3!}} = 10\,.\,9\,.\,8\,.\,7\,.\,6\,.\,5\,.\,4 = 604\,800$.

Аналогично, три различни малки латински букви могат да бъдат избрани в определен ред (подредени по местата отляво надясно) по $V_{26}^{3} = \frac{26!}{(26-3)!} = \frac{\cancel{26!}}{\cancel{23!}} = 26\,.\,25\,.\,24 = 15\,600$ начина.

Всеки избор на цифри се комплектува с всеки избор на букви и с всеки избор на позиции, затова прилагаме правилото за умножение: $120\;.\;604\,800\;.\;15\,600 = 1\,132\,185\,600\,000$ е броят на всички възможности.

Отговор: Парола от седем различни арабски цифри и три различни малки латински букви може да се състави по $1\,132\,185\,600\,000$ начина.

Задача 6. Използваме математическа индукция по n.

Индуктивна стъпка: Нека A_n е аритметичен израз със стойност 30, съставен от n петици. Тогава $A_{n+2} = A_n + 5 - 5$ е израз със стойност $30 + 5 - 5 = 30$, съставен от $n + 2$ петици. Индукцията върви от n към $n + 2$, т.е. отделно по четните и по нечетните n, затова базата се състои от две последователни стойности на n.

База: случаите $n = 3$ и $n = 4$. Всеки от изразите $A_3 = 5 \times 5 + 5$ и $A_4 = (5 : 5 + 5) \times 5$ има стойност 30.

Примери: От базовия случай $n = 3$ получаваме решение за всички нечетни стойности на n чрез добавяне и изваждане на петици:
$A_3 = 5 \times 5 + 5$,
$A_5 = 5 \times 5 + 5 + 5 - 5$,
$A_7 = 5 \times 5 + 5 + 5 - 5 + 5 - 5$,
$A_9 = 5 \times 5 + 5 + 5 - 5 + 5 - 5 + 5 - 5$
и т.н.

Аналогично, от другия базов случай $(n = 4)$ получаваме решение за четните стойности на n:
$A_4 = (5 : 5 + 5) \times 5$,
$A_6 = (5 : 5 + 5) \times 5 + 5 - 5$,
$A_8 = (5 : 5 + 5) \times 5 + 5 - 5 + 5 - 5$
и т.н.

Забележка: Има и други решения, например $A_{n+2} = (A_n) \times 5 : 5$, т.е. всеки израз се получава чрез умножение и деление вместо чрез събиране и изваждане.
Трети начин: $A_n = 5 \times 5 + 5 + (5 - 5) \underbrace{\times 5 \times 5 \times \ \ldots \ \times 5}_{n-5 \text{ пъти}}$ при $n \geq 5$; за A_3 и A_4 — вж. по-горе.