05.03.2013

Ламбда смятане

МТ - Машина на Тюринг

$$f(e) = \begin{cases} 1, & \text{ако } \{e\}(e) \text{ - завършва} \\ 0, & \text{ако } \{e\}(e) \text{ не завършва} \end{cases}$$ | Stop-проблем

$f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$

$f(0), f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots$

Имаме ω МТ.

Всички редици са 2^{ω}.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако в } \pi \text{ има } x \text{ поредни } \text{~~единици~~ 7-ци} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

↓ (*)

$\forall x$ в π има x поредни 7-ци

$f(x) = 1$

→

$\exists y$ в π: има y поредни 7-ци ~~единици~~ но няма $y+1$.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ 0, & x > y \end{cases}$$

(*) - не знаем коя машина на Тюринг да изберем.

I^n_k, S, θ.

суперпозиция;
примитивна рекурсия;
минимизация
} частично рекурсивни

Alonzo Church 1932 – 33 г. – λ смятане

Теоретико-множествена дефиниция на функция

* чрез графика $G_f \subseteq A \times B$

$f : A \xrightarrow{\circ} B$

$\forall x\, \exists\, \underbrace{\underline{\text{най-малко } 1}}_{\text{ако е точно 1 – тотална функция}}\, y : (x, y) \in G_f$

При Чърч:

- * променлива x, y, …
- * f(x) – апликация
- * $\lambda_x M$ – абстракция

През 1935г. Клини и Росер доказват, че λ-теорията е противоречива

През 1937г. Тюринг доказва, че чрез λ-смятането могат да се намерят функциите изчислими чрез МТ.

Types and programming languages – B. Pierce

H. Barendregt – Lambda calculus.

Парадокс за пияниците

D(x) – x е пияница

$\exists x\, (D(x) \to \forall y\, D(y))$

1сл. да допуснем, че всички пият:
$\forall y\, D(y)$, за произволен x формулата е вярна

2сл. $\exists x\, \neg D(x)$
$D(x) \to \forall y\, D(y)$

Изпит:
Домашни
+ Тест (теоретичен)
(със задачи)

$\exists\, a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $a^b \in \mathbb{Q}$

1сл $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$

Неконструктивни доказателства.

$a = b = \sqrt{2}$

2сл. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ $b = \sqrt{2}$ $a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 \in \mathbb{Q}$

Теорема (Кнастер–Тарски): Нека Γ е монотонен оператор, т.е. $\forall x, y\, (x \subseteq y \to \Gamma(x) \subseteq \Gamma(y))$. Тогава Γ има най-малка неподвижна точка, т.е.

$$\exists X (\Gamma(x) = x \wedge \forall y (\Gamma(y) = y) \to x \subseteq y)$$

$$\Gamma(X) = \{0\} \cup \{x+1 \mid x \in X\}$$

$$\Downarrow$$

Дефиниция на множество по индукция

Търсим множество Y, за което $0 \in Y$, $\forall x (x \in Y \to x+1 \in Y)$

$\Gamma(\emptyset) = \{0\}$

$\Gamma(\{0\}) = \{0\} \cup \{x+1 \mid x \in \{0\}\} = \{0, 1\}$

$\Gamma(\{0, 1\}) = \{0, 1, 2\}$

$\bigcup_n \Gamma(\{0, \dots, n\}) = \mathbb{N} = \mu\Gamma$ (най-малката неподвижна точка на Γ).

Синтаксис на λ-смятането

~~Дефиниция~~

Азбука на Λ-смятането:

- безкраен набор от променливи $x, y, z, \dots$

  V – изброимо множество от променливи
- λ ( )

Дефиниция: Множеството Λ от λ-термове се дефинира индуктивно по следния начин

1) $x \in V \to x \in \Lambda$

2) $M, N \in \Lambda \to (MN) \in \lambda$ - (апликация на $\underset{\text{ф-я}}{M}$ над $\underset{\text{аргумент.}}{N}$)

3) $x \in V,\ M \in \Lambda \to (\underbrace{\lambda_x M}_{\text{функция, която получава } x \text{ като аргумент и връща } M}) \in \Lambda$ (абстракция на M относно x)

Пример: $I = \lambda_x x$ – идентитет

$\lambda_x y$ – "константна" ф-я, която винаги връща y

$((\lambda_x x)(\lambda_x y)) \rightsquigarrow \lambda_x y$

$(\lambda_x(\lambda_y(\lambda_z((xy)z))))$

$\lambda_{x,y,z}\, xyz$

Нотация: $((((M_1 M_2) M_3) M_4) \dots M_n) \to M_1 M_2 M_3 \dots M_n$

$(\lambda_x(\lambda_y(\lambda_z M))) \longrightarrow \lambda_{x,y,z} M$

05.03.2013

Ламбда смятане

Деф: Свободни променливи на ламбда термове

$FV(M) \subseteq V, \; M \in \Lambda$

1) $FV(x) := \{x\}$
2) $FV(MN) := FV(M) \cup FV(N)$
3) $FV(\lambda_x M) := FV(M) \setminus \{x\}$

Деф: Всички променливи на даден терм:

$VAR(M) \subseteq V, \; M \in \Lambda.$

1) $VAR(x) := \{x\}$
2) $VAR(MN) := VAR(M) \cup VAR(N)$
3) $VAR(\lambda_x M) := VAR(M) \cup \{x\}$

Деф: Свързани променливи:

$BV(M) \subseteq V, \; M \in \Lambda$

$BV(M) := VAR(M) \setminus FV(M)$

Пример: $M := \lambda_{x,y} xyz$ $FV(M) = \{z\}$

$VAR(M) = \{x, y, z\}$

$BV(M) = \{x, y\}$

$N := \lambda x y$

$FV(N) = \{y\}$; $VAR(N) = \{x, y\}$; $BV(N) = \{x\}$

Деф: (Субституция) $M[x := N]$ $M, N \in \Lambda$, $x \in V$.

$\equiv$ - синтактично равенство (съвпадат редиците от символи)

1) $M \equiv x$, $M[x := N] \leftrightharpoons N$
2) $M \equiv y \not\equiv x$ $M[x := N] \leftrightharpoons M$
3) $(M_1 M_2)[x := N] \leftrightharpoons (M_1[x := N] \, M_2[x := N])$
4) $\underset{\overset{\shortparallel}{M}}{(\lambda_x M')}[x := N] \leftrightharpoons (\lambda_x M')$ (променливата е свързана)

5) $(\lambda \underset{\substack{\not\parallel \\ x}}{y} M)[x:=N] \leftrightarrows (\lambda y M'[x:=N])$, позволено, ако $y \notin FV(N)$

$$(\lambda_x M)N \xrightarrow{\beta} M[x:=N]$$ (β-редукция само в едната посока)

Проблем: $\underset{\substack{||| \\ (\lambda_x(\lambda_y(yx)))}}{(\lambda_{x,y}\, yx)}y \xrightarrow{\beta} \lambda_y yx[x:=y] \equiv \lambda_y yy$

Получаване свързано участие на y.

Считаме, че всеки път, когато пишем $\lambda_x M$ за x избираме "нова" променлива и преименуваме всичките ѝ свободни срещания в M

Деф.
$\lambda_x M \overset{\alpha}{\equiv} \lambda_y M[x:=y]$, – α-конверсия
$y \notin FV(M)$

Считаме, че $\equiv$ "поглъща" $\overset{\alpha}{\equiv}$.

Твърдение: Нека $M \in \Lambda$ и $x \notin FV(M)$, тогава
$M[x:=N] \equiv M$

Доказателство: Индукция по деф. на субституцията
1) невъзможно
2) по деф. на субституция
3) $(M_1 M_2)[x:=N] \overset{def}{\equiv} (M_1[x:=N] M_2[x:=N])$
$\overset{и.п.}{\equiv} (M_1 M_2) \overset{def}{\equiv} M$
$x \notin FV(M) = FV(M_1) \cup FV(M_2) \to x \notin FV(M_1)$
$x \notin FV(M_2)$
4) по деф. на субституция
5) $(\lambda_y M')[x:=N] \equiv \lambda_y M'[x:=N] \overset{и.п.}{\equiv} \underset{\substack{|||\,def \\ M}}{\lambda_y M'}$
$x \notin FV(\lambda_y M') = \underset{x\notin}{FV(M')} \setminus \{\underset{\substack{\not\parallel \\ x}}{y}\}$

05.03.2013

Ламбда смятане

Лема за субституцията: $M[x:=N][y:=P] \equiv M[x:=N[y:=P]]$, $y \notin FV(M)$,

$M, N, P \in \Lambda$; $x, y \in V$

Доказателство: Индукция по дефиницията на субституцията.

1) $x[x:=N][y:=P] \overset{def}{\equiv} N[y:=P]$

$x[x:=N[y:=P]] \equiv N[y:=P]$

2) $z[x:=N][y:=P] = z[\underset{|||}{y}:=P]$, понеже $y \notin FV(M) \Rightarrow y \not\equiv z$

$z[x:=N[y:=P]] = z$

3) $M_1M_2[x:=N][y:=P] \overset{def}{\equiv} (M_1[x:=N]M_2[x:=N])[y:=P] \overset{def}{\equiv}$

$((M_1[x:=N][y:=P])(M_2[x:=N][y:=P])) \overset{\text{и.п. } y \notin FV(M_i),\ i=1,2}{\equiv}$

$(M_1[x:=N[y:=P]])(M_2[x:=N[y:=P]]) \overset{def}{\equiv}$

$(M_1M_2)[x:=N[y:=P]]$

4). $(\lambda_x M')[x:=N][y:=P] \overset{def}{\equiv} (\lambda_x M')[y:=P]$

||| Твърдението

$(\lambda_x M')[x:=N[y:=P]] \overset{def}{\equiv} (\lambda_x M')$

$y \notin FV(M) \Rightarrow y \notin FV(M')$

5) $(\lambda_z M')[x:=N][y:=P] \overset{def}{\equiv} (\lambda_z M'[x:=N])[y:=P]$

$\underset{x}{\#}$ $(\lambda_{\underset{\# x}{z}} M')[x:=N[y:=P]] \overset{def}{\equiv} \lambda_z M'[x:=N[y:=P]]$

~~$z \equiv y$~~

~~$(\lambda_z M'[x:=N])[y:=P]$~~

5.1.) $z \equiv y$ $\quad y \notin FV(N)$ (иначе противоречие с конвенцията)

$(\lambda_z M')[x:=N][y:=P] \overset{def}{\equiv} \lambda_z M'[x:=N]$

$(\lambda_z M')[x:=N[y:=P]] \underset{Тв.}{\equiv} \lambda_z M'[x:=N]$

5.2.) $z \not\equiv y$

$(\lambda_z M'[x:=N])[y:=P] \overset{def}{\equiv} \lambda_z M'[x:=N][y:=P] \underset{y \notin FV(M')}{\overset{И.П.}{\equiv}}$

$\lambda_z M'[x:=N[y:=P]]$ ■

Безименни термове:

Деф: Λn – множество, $n \in \mathbb{N}$. Λn – множества от Λ-термове с не повече от n свободни променливи

1) $k \in \Lambda n$, $0 \leq k < n$ $(k \in [0, n-1])$
2) $M \in \Lambda n$, $N \in \Lambda n \to (MN) \in \Lambda n$, $n \geq 0$
3) $M \in \Lambda_{n+1} \to (\lambda M) \in \Lambda n$, $n \geq 0$

$\Lambda_0 \subset \Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \dots$

de Bruijn
Индекси на де Бройн

Примери: $\lambda_{x,y}\, y x$

$yx \to 01 \in \Lambda_2$

$\lambda y\, yx \to \lambda \underset{\text{свързана}}{0}\,\underset{\text{свободна}}{1}$

$\to \lambda\lambda 01$

$\lambda\lambda 10 \rightsquigarrow \lambda_{x,y}\, xy$

$\lambda\lambda 00 \rightsquigarrow \lambda_{x,y}\, yy$

$\lambda\lambda 11 \rightsquigarrow \lambda_{x,y}\, xx$

05. 03. 2013

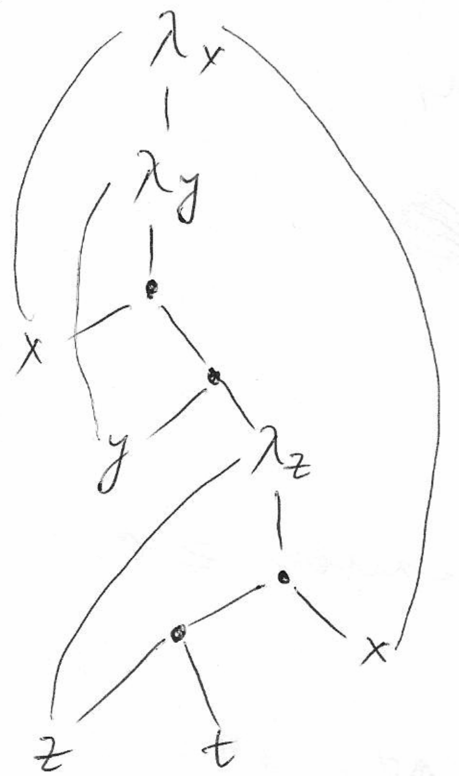
Ламбда смятане

Лема за субституцията:

$$M[x:=N][y:=P] \equiv M[y:=P][x:=N[y:=P]],$$

$$x \not\equiv y,\ x \notin FV(P)$$

$$\lambda_{x,y}\, x(y(\lambda_z\, z\, t\, x)) \rightsquigarrow \lambda\lambda 1(0(\lambda\, 0\, 5 2))$$



Деф: (Контекст от имена) $\Gamma : \{x_0, \dots, x_n\} \to \{0, \dots, n\}$

$\Gamma(x_i) = i$

Γ отбелязваме с $\{x_n, x_{n-1}, \dots, x_0\}$ – редица

$x_i \longrightarrow$ съответства индекс i

променливи

Деф $noname s_\Gamma : \Lambda \to \Lambda_{n+1}$

, Γ – контекст от имена на свободни променливи

$$FV(t) \subseteq dom(\Gamma)$$

$noname s_\Gamma(x) \leftrightharpoons \Gamma(x)$

$noname s_\Gamma(MN) \leftrightharpoons (noname s_\Gamma(M)\ noname s_\Gamma(N))$

$$\text{nonames}_\Gamma(\lambda_x M') \leftrightharpoons (\lambda\, \text{nonames}_{\underbrace{\Gamma, x}_{\Gamma'}}(M'))$$

$$\Gamma' : \{x, x_0, \ldots, x_n\} \to \{0, \ldots, n+1\}$$

$$\Gamma'(x_i) = \Gamma(x_i) + 1 = i + 1$$

домашно: $\text{withnames}_\Gamma : \Lambda n \to \Lambda$

$\text{nonames}_\Gamma(\text{withnames}_\Gamma(M)) \equiv M$

$\text{withnames}_\Gamma(\text{nonames}_\Gamma(M)) \equiv M$

$(\lambda_x M)[y := N] \quad x \notin FV(N)$

$\lambda M[k := N] \quad 0 \notin FV(N)$

Деф. $\uparrow^d_c : \Lambda n \to \Lambda n + d$

увеличава с d всички променливи $\geq c$.

$$\uparrow^d_c(k) = \begin{cases} k, & 0 \leq k < c \\ k+d, & k \geq c \end{cases} \qquad \uparrow^d \leftrightharpoons \uparrow^d_0$$

$$\uparrow^d_c(MN) = \uparrow^d_c(M) \uparrow^d_c(N)$$

$$\uparrow^d_c(\lambda M) \leftrightharpoons \lambda \uparrow^d_{c+1}(M)$$

Деф. (Субституция на безименни термове).

Нека $M \in \Lambda n$, $k \in \mathbb{N}$, $N \in \Lambda m$.

$M[k := N]$

1) $i[k := N] \leftrightharpoons \begin{cases} N & i = k \\ i & i \neq k \end{cases}$

2) $(M_1 M_2)[k := N] \leftrightharpoons (M_1[k := N])(M_2[k := N])$

3) $(\lambda M)[k := N] \leftrightharpoons \lambda M[k+1 := \uparrow^1(N)]$

Пример: 1) $b(\lambda_{x,y}\, b)[b := a]$

~~$0(\lambda\lambda 2)[0 := 3]$~~

$0(\lambda\lambda 2)[0 := 1] \equiv 1(\lambda\lambda 3)$

2) $b(\lambda_x\, b)[b := a(\lambda_z a)]$

$0(\lambda 1)[0 := 1(\lambda 2)] \equiv 1(\lambda 2)(\lambda 1[2 := \lambda 3])$

$\equiv 1(\lambda 2)(\lambda 2(\lambda 3))$

$a(\lambda_z a)(\lambda_x a(\lambda_z a))$

12.03.2013.

Ламбда смятане

Деф: β-редукция $\xrightarrow{\beta}$

1) $\underset{\beta\text{-редекс}}{(\underbrace{\lambda_x M}_{\text{ф-я}})\underbrace{N}_{\text{арг.}}} \xrightarrow{\beta} \underset{\beta\text{-контракт}}{M[x:=N]}$

2) $M \xrightarrow{\beta} N$, то $\lambda_x M \xrightarrow{\beta} \lambda_x N$

3) $M \xrightarrow{\beta} N$, то $MP \xrightarrow{\beta} NP$, $PM \xrightarrow{\beta} PN$

$I = \lambda_x x$ и x не могат да се редуцират

Пример: $\underbrace{(\lambda_{x,y}\, yx)(\lambda_x x)}_{\beta\text{-редекс}}(\lambda_x y')$

$\xrightarrow{\beta} (\lambda_y\, yx[x:=\lambda_x x])(\lambda_x y') \equiv (\lambda_y\, y(\lambda_x x))(\lambda_x y')$

$\xrightarrow{\beta} (y(\lambda_x x))[y:=\lambda_x y'] \equiv (\lambda_x y')(\lambda_x x) \xrightarrow{\beta} y'$

$K \leftrightharpoons \lambda_{x,y} x$ $\quad S \leftrightharpoons \lambda_{x,y,z}\, xz(yz)$

Нотация: $\overset{\beta}{\twoheadrightarrow}$ – многостъпкова β-редукция транзитивно и рефлексивно затваряне на $\xrightarrow{\beta}$.

1) $M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} M$

2) $M \xrightarrow{\beta} N$, то $M \twoheadrightarrow N$

3) $M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} N \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} P$, то $M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} P$.

Деф: $=^{\beta}$ – симетричното затваряне на $\overset{\beta}{\twoheadrightarrow}$.
(β-конверсия)

1) $M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} N$, то $M \overset{\beta}{=} N$

2) $M \overset{\beta}{=} N$, то $N \overset{\beta}{=} M$

Задача: Покажете, че за ~~∀M∈Λ:~~ $\forall M, N, P \in \Lambda$

а) $IM \overset{\beta}{=} M$

$$I = \lambda_x x$$

$$IM \equiv (\lambda_x x)M \xrightarrow{\beta} x[x:=M] \equiv M$$

б) $SMNP \overset{\beta}{=} ?$ ~~M,N,P∈Λ~~ $MP(NP)$

в) $SKK \overset{\beta}{=} ?$ (I^*)

б) ~~$(\lambda_{x,y,z} xz(yz))MNP$~~

$$(\lambda_{x,y,z} xz(yz))MNP \xrightarrow{\beta} MP(NP)$$

в) $(\lambda_{x,y,z} xz(yz))(\lambda_{u,v} u)(\lambda_{s,t} s)$

$$\xrightarrow{\beta} \lambda_z (\lambda_{u,v} u)z((\lambda_{s,t} s)z)$$

$$\xrightarrow{\beta} \lambda_z (\lambda_v z)(\lambda_t z) \xrightarrow{\beta} \lambda_z z = I$$

г) $SKS \overset{\beta}{=} ?$

$$(\lambda_{x,y,z} xz(yz))(\lambda_{u,v} u)\underbrace{(\lambda_{p,q,r} pr(qr))}_{S}$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda_{y,z} \underbrace{(\lambda_{u,v} u)z(yz)})S$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda_{y,z} (\lambda_v z)(yz))S$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda_{y,z} z)S$$

$$\xrightarrow{\beta} \lambda_z z \equiv I$$

12.03.2013

Ламбда смятане

Отклонение: Безименни ламбда термове

$\lambda(\lambda 0)10$

$I \leftrightharpoons \lambda 0$

$K \leftrightharpoons \lambda\lambda 1$

$S \leftrightharpoons \lambda\lambda\lambda 20(10)$

$\uparrow^d_c$

~~$(\lambda M)N \xrightarrow{\beta} \uparrow^{-1}(M[0:=\uparrow^1(N)])$~~

$(\lambda M)N \xrightarrow{\beta} \uparrow^{-1}(M[0:=\uparrow^1(N)])$

$(\lambda_x M)N \xrightarrow{\beta} M[x:=N]$

$size(M[x:=N]) = O(size(M).\ size(N))$

$\underbrace{P \xrightarrow[n]{\beta} N}$ $\qquad O(size(M)^{2^n})$

n-кратна β-редукция

Деф: $\underline{\underline{\eta}}$ (Ета конверсия)

1) $\lambda_x Mx \overset{\eta}{=} M, \quad x \notin FV(M)$

2) $M \overset{\eta}{=}$, то $\lambda_x M \overset{\eta}{=} \lambda_x N$, $MP \overset{\eta}{=} NP$, $PM \overset{\eta}{=} PN$

3) $M \overset{\eta}{=} M$

4) $M \overset{\eta}{=} N$, то $N \overset{\eta}{=} M$

5) $M \overset{\eta}{=} N \overset{\eta}{=} P$, то $M \overset{\eta}{=} P$

$\underline{\underline{\beta\eta}} \leftrightharpoons \underbrace{Trans(\overset{\beta}{=} \cup \overset{\eta}{=})}_{\text{Транзитивно затваряне на обединението}}$ (Бета-ета-конверсия)

$\lambda + ext$ – екстенсионална теория на λ-смятането

$Mx \overset{\beta}{=} Nx$, то $M \overset{\beta}{=} N$, $x \notin FV(MN)$

Твърдение: $\overset{\beta}{=}$ в λ-ext е еквивалентно на $\overset{\beta\eta}{=}$ в λ.

$\Rightarrow$) ~~$Mx \overset{\beta}{=} Nx$, защото Mx~~

Нека $M = N$, защото $Mx \overset{\beta}{\underset{\lambda\text{-ext}}{=}} Nx$, $x \notin FV(MN)$ в λ-ext.

~~$Mx \overset{\beta}{=} \lambda_x Mx \; Nx) \overset{\beta}{=} \lambda_x Nx$) (по дефиниция)~~

$$\lambda \vdash \underset{\underset{M}{\|\eta}}{\lambda_x Mx} \overset{\beta}{=} \underset{\underset{N}{\|\eta}}{\lambda_x Nx}, \quad \lambda \vdash M \overset{\beta\eta}{=} N$$

$\Leftarrow$) Нека $\lambda \vdash Mx \overset{\eta}{=} M$, $x \notin FV(M)$

$\lambda + ext \vdash (\lambda_x Mx)x \overset{\beta}{=} Mx$

от ext $\mapsto \lambda + ext \vdash \lambda_x Mx \overset{\beta}{=} M$

Твърдение:
1) $\lambda_x x \overset{\beta}{=} SKK$ ✓
2) $\lambda_x M \overset{\beta}{=} KM$, $x \notin FV(M)$
3) $\lambda_x MN \overset{\beta}{=} S(\lambda_x M)(\lambda_x N)$

Доказателство: $KM \equiv (\lambda_{x,y} x) M \xrightarrow{\beta} (x, y \notin FV(M))$

$\xrightarrow{\beta} \lambda_y M \equiv \lambda_x M$ (Можем да преименуваме свързаните променливи)

3) $(\lambda_{x,y,z} xz(yz))(\lambda_x M)(\lambda_x N) \xrightarrow{\beta}$

$\xrightarrow{\beta}\!\!\to \lambda_z((\lambda_x M)z((\lambda_x N)z))$ $(x, y, z \notin FV(MN))$

$\xrightarrow{\beta}\!\!\to \lambda_z(M[x:=z] N[x:=z]) \equiv \lambda_x MN.$

Ламбда смятане

Деф: $M \in \Lambda$ наричаме комбинатор ако $FV(M) = \emptyset$.

Твърдение: Всеки ~~Λ-терм~~ комбинатор е β-равен на ~~Λ-терм~~ комбинатор, състоящ се от S, K и апликация.

домашно доказателство на твърдението по индукция

$\lambda_{x,y}\, yx$ - комбинатор

~~$\lambda_{x,y}\, yx \overset{\beta}{=}$~~ $\lambda_{x,y}\, yx \equiv \lambda_x(\lambda_y\, yx) \underset{3)}{\overset{\beta}{=}}$

~~$\underset{3)}{\overset{\beta}{=}} S(\lambda_x y)(\lambda_x x) \underset{2)}{\overset{\beta}{=}} S(Ky)(SKK)$~~

$$\underset{3)}{\overset{\beta}{=}} \lambda_x S(\lambda_y y)(\lambda_y x) \underset{\substack{2)\\1)}}{\overset{\beta}{=}} \lambda_x \underbrace{S(SKK)}_{M}\underbrace{(Kx)}_{N} \underset{3)}{\overset{\beta}{=}}$$

$$\underset{3)}{\overset{\beta}{=}} S(\lambda_x S(SKK))(\lambda_x Kx) \underset{2)}{\overset{\beta}{=}} S(K(S(SKK)))(S(\lambda_x K)(\lambda_x x))$$

$$\underset{\substack{1)\\2)}}{\overset{\beta}{=}} S(K(S(SKK)))(S(KK)(SKK))$$

Теорема за неподвижната точка:

Нека $F \in \Lambda$. Тогава има $X \in \Lambda$, така че $FX \overset{\beta}{=} X$, т.е. X е неподвижна точка на F.

Доказателство:

$Y := \lambda_f(\lambda_x f(xx))(\lambda_x f(xx))$ - Y-комбинатор

$X \leftrightharpoons YF$

$$X \equiv YF \overset{\beta}{=} (\lambda_x F(xx))(\lambda_x F(xx)) \overset{\beta}{=}$$

$$\overset{\beta}{=} F(\lambda_x F(xx))(\lambda_x F(xx)) \overset{\beta}{=} F(YF) \equiv FX$$

Пример: Нека $F := \lambda_f(\lambda_x \text{ if } x=0 \text{ then } 1 \text{ else } f(x-1)*x)$

$X \leftrightharpoons YF$ рекурсия

$\| \text{ext}$

$\lambda_x x!$

$Y' \leftrightharpoons \lambda_f (\lambda_x f(\lambda_y xxy))(\lambda_x f(\lambda_y xxy))) \overset{\eta}{=} Y$

- **домашно:** **Лема:** $M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} N$, то

$$M[x:=P] \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} N[x:=P]$$

Деф: Казваме, че $M \in \Lambda$ е в β-нормална форма, ако $\nexists N: M \xrightarrow{\beta} N$.

Твърдение: M е в β-нормална форма $\iff$ M няма подтерм от вида $(\lambda_x M')M''$.

Деф: (подтерм) : $\leq$

1) ~~$M \leq M$~~ $M \leq M$

2) $M \leq N$, то $M \leq \lambda_x N$

$M \leq NP$

$M \leq PN$

Деф: N е нормална форма на M, ако N е в нормална форма и $M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} N$.

$\omega \leftrightharpoons \lambda_x xx$

$\Omega \leftrightharpoons \omega\omega$ – няма нормална форма

$$\begin{array}{c} \omega\omega \\ \downarrow \beta \\ \omega\omega \end{array}$$

12.03.2013.

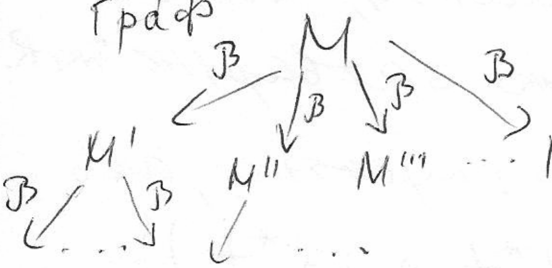
λ-смятане

$$Y = \lambda_f(\lambda_x f(xx))(\lambda_x f(xx)) \xrightarrow{\beta}$$

$$\xrightarrow{\beta} \lambda_f f((\lambda_x f(xx))(\lambda_x f(xx))) \xrightarrow[n]{\beta} \lambda_f f^n(\lambda_x f(xx))(\lambda_x f(xx))$$

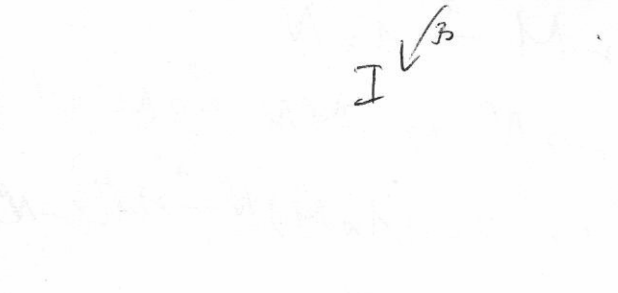
$$(\lambda_x xxx)(\lambda_x xxx) \xrightarrow{\beta} (\lambda_x xxx)(\lambda_x xxx)(\lambda_x xxx)$$

~~Дърво~~ на редукция на терм
Граф



$$\begin{tikzcd}
\underbrace{(\lambda_x y)(\lambda_x x)}((\underbrace{(\lambda_x x)(\lambda_x y)})) \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, "\beta"] & \\
y((\lambda_x x)(\lambda_x y)) \arrow[dr, "\beta"] & \underbrace{(\lambda_x y)(\lambda_x x)}(\lambda_x y) \arrow[d, "\beta"] \\
& y\,\underline{(\lambda_x y)}
\end{tikzcd}$$

Свойство на диаманта (Church–Rosser)



<u>Деф</u>: Ако за даден терм N дървото на редукция е празно, казваме, че термът е силно нормализиран.

Деф: Казваме, че една релация R удовлетворява свойството на диаманта (Church-Rosser), ако ~~[illegible]~~ $\forall x,y,z$ (~~$xRy \wedge yRz \to \exists t(tRx \wedge zRt)$~~

$yRx \wedge yRz \to \exists t(xRt \wedge zRt))$

$$\begin{tikzcd}
 & y \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R"] & \\
x \arrow[dr, "R"'] & & z \arrow[dl, "R"] \\
 & t &
\end{tikzcd}$$

Деф: Казваме, че R е конфлуентна, ако R^* удовлетворява свойството на диаманта, където R^* е рефлексивно и транзитивно затваряне на R.

Деф Казваме, че R е локално конфлуентна, ако $\forall x,y,z(yRx \wedge yRz \to \exists t(xR^*t \wedge zR^*t))$.

Твърдение: Ако R е конфлуентна, то R^* е конфлуентна.

Деф: Казваме, че редукцията $\xrightarrow{*}$ е силно нормализируема, ако всеки терм е силно нормализируем относно нея.

Лема (на Нюман): Ако една редукция е силно нормализируема и локално конфлуентна, то тя е конфлуентна.

Цел: Да докажем, че $\xrightarrow{\beta}$ е конфлуентна.

Деф: $\xrightarrow{1}$

1) $M \xrightarrow{1} M$
2) $M \xrightarrow{1} N$, $\lambda x M \xrightarrow{1} \lambda x N$
3) $M \xrightarrow{1} M'$, $N \xrightarrow{1} N'$, то $MN \xrightarrow{1} M'N'$
4) $M \xrightarrow{1} M'$, $N \xrightarrow{1} N'$, то $(\lambda x M)N \xrightarrow{1} M'[x:=N']$

Лема 1. Ако $M \xrightarrow{1} M'$, $N \xrightarrow{1} N'$, то

$$M[x:=N] \xrightarrow{1} M'[x:=N']$$

Доказателство: I сл. 1) Нека $M' \equiv M$

$$M[x:=N] \xrightarrow{1} M[x:=N]$$

Индукция по M:

1а) $M \equiv x$ ~~$\xrightarrow{1} N'$~~

	M	$M[x:=N]$	$M[x:=N']$	Следва от
1а)	x	N	N'	$N \xrightarrow{1} N'$
1б)	y	y	y	$y \xrightarrow{1} y$
1в)	$P Q$	$P[x:=N]Q[x:=N]$	$P[x:=N']Q[x:=N']$	ИП, 3)
1г)	$\lambda_{\underset{\not\equiv x}{y}} P$	$\lambda_y P[x:=N]$	$\lambda_y P[x:=N']$	ИП, 2)

2) $M \equiv \lambda_y P$, $M' \equiv \lambda_y P'$ и $P \xrightarrow{1} P'$

$M[x:=N] \equiv \lambda_y P[x:=N]$

От ИП имаме: $P[x:=N] \xrightarrow{1} P'[x:=N]$

По клауза 2) $\underset{\overset{\parallel}{M[x:=N]}}{\lambda_y P[x:=N]} \xrightarrow{1} \underbrace{\lambda_y P'[x:=N']}_{M'[x:=N']}$

3) $M \equiv PQ$, $M' \equiv P'Q'$, $P \xrightarrow{1} P'$, $Q \xrightarrow{1} Q'$

$$M[x:=N] \equiv P[x:=N]\,Q[x:=N] \xrightarrow[\text{и.п.}]{1} P'[x:=N']Q'[x:=N'] \equiv$$

$$\equiv M'[x:=N']$$

4) $M \equiv (\lambda_y P)Q$ $M' \equiv P[y:=Q']$, като $P \xrightarrow{1} P'$ и $Q \xrightarrow{1} Q'$

$$M[x:=N] = (\lambda_y \underset{\overset{\Downarrow\,\text{и.п.}}{P'[x:=N']}}{P[x:=N]})\underset{\overset{\text{и.п.}\downarrow 1}{Q'[x:=N']}}{Q[x:=N]} \xrightarrow[\text{по 2) и 3)}]{1} (\lambda_y P'[x:=N'])Q[x:=N'].$$

$M'[x:=N'] \equiv P'[y:=Q'][x:=N']$, $y \notin FV(N')$ по конвенция

$|||$

По лема за субституцията:

$$P'[x:=N'][y:=Q'[x:=N']]$$

<u>Лема 2 (за обръщането):</u>

а) Ако $\lambda_x M \xrightarrow{1} P$, то $P \equiv \lambda_x N$, $M \xrightarrow{1} N$.

б) Ако $MN \xrightarrow{1} P$, то:

или б1) $P \equiv M'N'$, $M \xrightarrow{1} M'$, $N \xrightarrow{1} N'$

или б2) $P \equiv Q'[x:=N']$ и $M \equiv \lambda_x Q$, така че $N \xrightarrow{1} N'$, $Q \xrightarrow{1} Q'$.

<u>Лема 3:</u> $\xrightarrow{1}$ ~~[illegible]~~ изпълнява свойството на диаманта (Church-Rosser).

По точно; ако $M \xrightarrow{1} M_1^*$ и $M \xrightarrow{1} M_2^\#$, то има M_3, така че $M_1 \xrightarrow{1} M_3 \xleftarrow{1} M_2$.

<u>Доказателство.</u> Индукция по деф на $M \xrightarrow{1} M_1$

1) $M_1 \equiv M$, тогава $M_3 \leftrightarrows M_2$

2) $M \equiv \lambda_x P$, $M_1 \equiv \lambda_x P_1$, $P \xrightarrow{1} P_1$.

Тогава по лема 2 имаме:

$M_2 \equiv \lambda_x P_2$, $P \xrightarrow{1} P_2$. Тогава по и.п.

$\exists P_3 : P_1 \xrightarrow{1} P_3$, $P_1 \xrightarrow{1} P_3$.

$M_3 \leftrightarrows \lambda_x P_3$

$$\begin{tikzcd}
 & \lambda_x P \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\lambda_x P_1 \arrow[dr, dash, bend right] & & \lambda_x P_2 \arrow[dl] \\
 & \lambda_x P_3 &
\end{tikzcd}$$

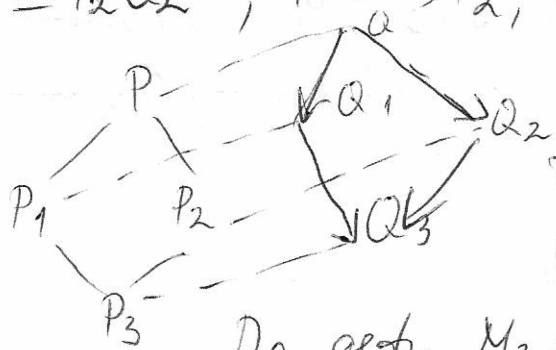
3) $M \equiv PQ$, $M_1 \equiv P_1 Q_1$, $P \xrightarrow{1} P_1$, $Q \xrightarrow{1} Q_1$

~~[illegible]~~

$$\begin{tikzcd}
 & PQ \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\
P_1 Q_1 & & M_2
\end{tikzcd}$$

λ-смятане

3.1.) $M_2 \equiv P_2Q_2$, $P \xrightarrow{1} P_2$, $Q \xrightarrow{1} Q_2$



По И.П. имаме P_3 и Q_3, такива че $P_1 \xrightarrow{1} P_3 \xleftarrow{1} P_2$, $Q_1 \xrightarrow{1} Q_3 \xleftarrow{1} Q_2$.

По деф. $M_3 \leftrightharpoons P_3Q_3$ $M_1 \xrightarrow{1} M_3 \xleftarrow{1} M_2$

3.2. ~~$P_1 \equiv \lambda_x L_1$~~ $P \equiv \lambda_x R$, $M_2 \equiv R_2[x := Q_2]$,

такива че $R \xrightarrow{1} R_2$ и $Q \xrightarrow{1} Q_2$

По лема2: $P \equiv \lambda_x R_1$

$R \xrightarrow{1} R_1$ / $\exists R_3 : R_1 \xrightarrow{1} R_3 \xleftarrow{1} R_2$

$Q \xrightarrow{1} Q_1$ / $\exists Q_3 : Q_1 \to Q_3 \leftarrow Q_2$

$$\begin{tikzcd}
& (\lambda_x R)Q \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\
(\lambda_x R_1)Q_1 \arrow[dr, Rightarrow, "\text{лема1 +4) от деф на } \xrightarrow{1}"'] & & R_2[x := Q_2 \arrow[dl, "1"', "\text{лема 1}"] \\
& \text{Искаме: } M \leftrightharpoons R_3[x := Q_3] &
\end{tikzcd}$$

$R_1 \xrightarrow{1} R_3 \xleftarrow{1} R_2$

$Q_1 \longrightarrow Q_3 \longleftarrow Q_2$

$M_3 \leftrightharpoons R_3[x := Q_3]$

4) $M \equiv (\lambda_x P)Q$ $M_1 \equiv P_1[x := Q_1]$, $P \xrightarrow{1} P_1$, $Q \xrightarrow{1} Q_1$

$$\begin{tikzcd}
& (\lambda_x P)Q \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\
P_1[x := Q_1] & & M_2
\end{tikzcd}$$

4.1.) $M_2 \equiv R_2Q_2$, така че $\lambda_x P \longrightarrow R_2$, $Q \xrightarrow{1} R_2$

$$\frac{\lambda_x P \longrightarrow R_2}{R_2 \equiv \lambda_x P_2,\ P \xrightarrow{1} P_2}\text{лема2}$$

По ИП: $\exists P_3 : P_1 \xrightarrow{1} P_3 \xleftarrow{1} P_2$

ИП $\exists Q_3 : Q_1 \xrightarrow{1} Q_3 \xleftarrow{1} Q_2$

$$\begin{tikzcd}
& (\lambda_x P)Q \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\
P_1[x := Q_1] \arrow[dr, "\text{лема1}"', "1"] & & (\lambda_x P_2)Q_2 \arrow[dl, "1"', "\text{деф. 4) } \xrightarrow{1}"] \\
& M_3 \leftrightharpoons P_3[x := Q_3] &
\end{tikzcd}$$

4.2.)

$$\begin{tikzcd}
 & (\lambda_x P)Q \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\
P_1[x:=Q_1] \arrow[dr, "1"'] & & P_2[x:=Q_2] \arrow[dl, "1"] \\
 & M_3 \leftrightarrows P_3[x:=Q_3] &
\end{tikzcd}$$

$M_2 \equiv P_2[x:=Q_2]$, $P \xrightarrow{1} P_1$, $Q \xrightarrow{1} Q_1$,

ИП: $\exists P_3 : P_1 \xrightarrow{1} P_3 \xleftarrow{1} P_2$

$\exists Q_3 : Q_1 \xrightarrow{1} Q_3 \leftarrow Q_2$

$M_3 \leftrightarrows P_3[x:=Q_3]$ □

Лема 4. $\xrightarrow{\beta} \subseteq \xrightarrow{1} \subset \overset{\beta}{\twoheadrightarrow}$.

Теорема (Church-Rosser): $\overset{\beta}{\twoheadrightarrow}$ е конфлуентна.

Следствие 1: Ако $M \overset{\beta}{=} N$, тогава $\exists P : (M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} P \twoheadleftarrow N)$.

Следствие 2. Всеки терм M има най-много една нормална форма

С трансфинитна индукция по дървото на редукция на M

I сл. M е в нормална форма $M \equiv M_1 \equiv M_2$

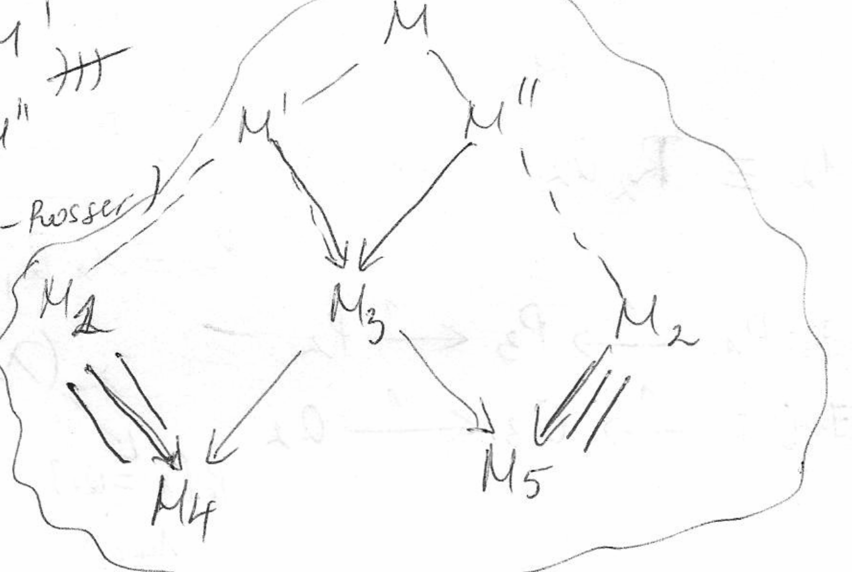
II сл. $\exists M' : M \xrightarrow{\beta} M'$

1) $M' \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} M_1$ По ИП: $M_1 \equiv M_2$.

$M' \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} M_2$

2) $M \xrightarrow{\beta} M' \not\equiv$

$M \xrightarrow{\beta} M''$



По CR(Church-Rosser)

$\exists M_3 : M' \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} M_3 \twoheadleftarrow M''$

$$\begin{tikzcd}
 & M_3 \arrow[dl, "\text{по CR}"'] \arrow[dr] & \\
M_1 & & M_2
\end{tikzcd}$$

По ИП: $M_1 \equiv M_2$

— Не се получава нищо съществено ново

ТВ Нека $\mathcal{A}$ - стр-ра; $\mathcal{A}$ е 1-$\varkappa$-наситена точно когато $\mathcal{A}$ е n-$\varkappa$-наситена

(←) ясно

(→) индукция по n. Да видим $n \longmapsto n+1$: разглеждаме

$\Sigma(x_1 \dots x_{n+1})$ - непротиворечив относно $\mathcal{A}_{A_0}$, $A_0 \subseteq |\mathcal{A}|$, $\overline{\overline{A_0}} < \varkappa$

Нека $\mathcal{B} \models \Sigma'(x_1 \dots x_{n+1}) [\![b_1 \dots b_{n+1}]\!]$. ~~Нека~~

~~[illegible]~~

19.03.2013

Ламбда - смятане

Стратегии за редукция

def $F : \Lambda \longrightarrow \Lambda$ наричаме едностъпкова стратегия за редукция, ако за всяко M или $M \xrightarrow{\beta} F(M)$, или $M \equiv F(M)$.

ТВ Всеки λ-терм може да се представи в точно една от следните форми: (1) $\lambda_{x_1 \dots x_n} y M_1 \dots M_m$ (пишем съкратено $\lambda_{\vec{x}} y \vec{M}$) — главна нормална форма (head normal form)

(2) $\lambda_{\vec{x}} \underbrace{(\lambda_y M) N}_{\text{главен редекс}} \vec{P}$: Първа позиция след λ-префикса: главна позиция

Док-во: (I) $y \in \Lambda$ - форма 1 (II) $\lambda x.M$: по ИП M е във форма (1) или (2), и $\lambda x.M$ ще е в същата

(III) $(Q_1 Q_2)$ ~~Разглеждаме случаи по Q_1: Ако Q_1 е var~~

По ИП, Q_1 е във форма (1) или (2): Ако е във форма (1), $Q_1 \equiv \lambda\vec{x}.y\vec{M}$, то ако $\vec{x}$ е празен, то $(Q_1 Q_2)$ е във форма (1); иначе - във форма (2). Ако Q_1 е във форма (2), то и $(Q_1 Q_2)$ е във форма (2)

def Нормална стратегия NR

(1) $NR(\lambda\overline{x}.(\lambda y.M) N \overline{P}) \leftrightharpoons \lambda\overline{x}. M[y/=N] \overline{P}$

(2) $NR(\lambda\overline{x}. y \overline{M} (N) \overline{P}) \leftrightharpoons \lambda\overline{x}. y \overline{M} NR(N) \overline{P}$,

където N е първият терм след главната позиция, който <u>не е</u> в НФ.

$$SKK \equiv \underbrace{(\lambda xyz.((x z)(y z)))(\lambda uv.u)}(\lambda pq.p) \xrightarrow{\beta}$$

$$\xrightarrow{\beta} \underbrace{\lambda yz.(((\lambda uv.u) z)(y z))(\lambda pq.p)} \xrightarrow{\beta}$$

$$\xrightarrow{\beta} \lambda z.(\underbrace{((\lambda uv.u) z)}((\lambda pq.q) z)) \xrightarrow{\beta}$$

$$\xrightarrow{\beta} \lambda z.(\underbrace{(\lambda v.z)((\lambda pq.q) z)}) \xrightarrow{\beta}$$

$$\xrightarrow{\beta} \lambda z.z$$

def Апликативна стратегия:

(1) $AR(\lambda \bar{x}.(\lambda y M) N \bar{P}) \leftrightharpoons \lambda \bar{x} M[y:=N] \bar{P}$, ако M и N са в нормална форма

(2) $AR(\lambda \bar{x}. Q \bar{M} (N) \bar{P}) \leftrightharpoons \lambda \bar{x}. Q \bar{M}\, AR(N) \bar{P}$

Q и $\bar{M}$ са в нормална форма, а N не е

(3) $AR(\lambda \bar{x}. Q \bar{M}) \leftrightharpoons \lambda \bar{x}. AR(Q) \bar{M}$

Q не е в нормална форма

Редуцира най-вътрешния ляв редекс, а предната — най-външния. Първото оценяване е мързеливо (~ call-by-name), второто е апликативно: оценяват се първо ф-ята и аргументите, и чак после се прилага функцията.

Как тези стратегии могат да се направят истински call-by-value и call-by-name?

$$SKK \equiv \underbrace{(\lambda xyz.((x z)(y z)))(\lambda uv.u)}(\lambda pq.p) \xrightarrow{\beta}$$

$$\xrightarrow{\beta} \lambda yz.(((\lambda uv.u) z)(y z))(\lambda pq.p) \xrightarrow{\beta}$$

[eager стратегия]

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda yz.((\lambda v.z)(y z)))(\lambda pq.p) \xrightarrow{\beta}$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda yz.z)(\lambda pq.p) \xrightarrow{\beta}$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda z.z)$$

Тази стратегия заема много по-малко място (в термините ~~на~~ памет)

$K \Omega I$? $\Omega \leftrightharpoons \omega\omega$ $\omega \leftrightharpoons \lambda x.(x x)$

~~NR: $K\Omega I = (\lambda xy.x) \Omega I \xrightarrow{\beta}$~~

$KI\Omega$ NR: $KI\Omega \equiv (\lambda xy.x) \Omega I \xrightarrow{\beta} (\lambda y.I) \Omega \xrightarrow{\beta} I$

AR: $KI\Omega \equiv (\lambda xy.x) \Omega I \equiv \underbrace{(\lambda xy.x)(\lambda z.z)}((\lambda u.uu)(\lambda v.vv))$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda y.(\lambda z.z))(\underbrace{(\lambda u.uu)(\lambda v.vv)}) \xrightarrow{\beta}$$

$$\xrightarrow{\beta} (\lambda y.(\lambda z.z))(\underbrace{(\lambda v.vv)(\lambda w.ww)}) \xrightarrow{\beta} \ldots$$

– има НФ, но тази стратегия не води до нея!

19.03.2013 Ламбда смятане

<u>def</u> CBV (call-by-value) (прилича на AR) ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ – не оценява λ-функции! λ-термове вече представляват стойности в нашия език!

(1) $CBV(\lambda x.M) \leftrightharpoons \lambda x.M$

(2) $CBV((\lambda y.M)N\overline{P}) \leftrightharpoons M[y:=N]\overline{P}$, ако M, N са в НФ

(3) $CBV(~~y~~\ Q\overline{M}N\overline{P}) \leftrightharpoons$ ~~CBV~~ $(Q\overline{M}\ CBV(N)\ \overline{P})$, ако Q и $\overline{M}$ са в НФ, а N не е.

(4) $CBV(Q\overline{M}) \leftrightharpoons CBV(Q)\overline{M}$.

<u>def</u> CBN (call-by-name) (прилича на NR)

(1) $CBN(\lambda x.M) \leftrightharpoons \lambda x.M$

(2) $CBN((\lambda y.M)N\overline{P}) \leftrightharpoons M[y:=N]\overline{P}$

(3) $CBN(y\overline{M}(N)\overline{P}) \leftrightharpoons y\overline{M}\ CBN(N)\ \overline{P}$, ако $\overline{M}$ са в НФ, а N не е.

○ Домашно: CBV и CBN върху SKK

Теорема (на Къри за нормализацията): Ако $M \xrightarrow{\beta} N$, N е в НФ, то има $n \in \mathbb{N}$, за което $NR^n(M) \equiv N$ (нормалната стратегия винаги достига до НФ, ако такава изобщо има)

Числа на Чърч

<u>def</u> $M^n N$: (1) $M^0 N \leftrightharpoons N$ (2) $M^{n+1}N \leftrightharpoons (M\ M^n N)$

<u>def</u> Нумерали на Чърч: комбинатори, които кодират числа

$c_n \leftrightharpoons \lambda fx.f^n x$

$c_0 \leftrightharpoons \lambda fx.x$ [false; ~~[illegible]~~ true $\leftrightharpoons K$]

$c_1 \leftrightharpoons \lambda fx.(f\ x)$

$c_2 \leftrightharpoons \lambda fx.(f\ (f\ x))$

...

~~[illegible]~~ $c_1 \overset{\eta}{=} I$

Задача: Комбинатор Succ, който добавя единица?

~~Succ [illegible]~~

$Succ \leftrightharpoons$ ~~[illegible]~~ $\lambda c.\lambda f.\lambda x.(f\ (c\ f\ x))$

$Succ \leftrightharpoons \lambda c.\lambda f.\lambda x.((c\ f)(f\ x))$

$Plus \leftrightharpoons \lambda c.\lambda d.\lambda f.\lambda x.((c\ f)\ (d\ f\ x))$

$Times \leftrightharpoons \lambda c.\lambda d.\lambda f.\lambda x.((c\ (d\ f))\ x)$

$Power \leftrightharpoons \lambda c.\lambda d.\lambda f.\lambda x.((d\ c)\ (f\ x))$ $\quad c^d$

$Tower \leftrightharpoons \lambda c.\lambda d.(d(\lambda y.(power\ y\ c))\ c)$ $\quad c^{c^{\cdot^{\cdot^{c}}}}\}d$

$c^{c^{\cdot^{\cdot^{c}}}}\}$ d на брой c-та в кулата

Има и начин да се напише Times чрез Plus

○ Функцията на Акерман?

$Times \leftrightharpoons \lambda c.\lambda d.(c\ (plus\ d)\ 0)$ $\qquad Power \leftrightharpoons \lambda c.\lambda d.(d\ c)$

◎ Степенуване - директно; кула $n^{n^{\cdot^{\cdot^{n}}}}\}$ m пъти

<u>def</u> (λ-определимост): Нека $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$. Казваме, че f е λ-определима, ако има комбинатор F, такъв, че

$$\forall k_1 \dots k_n \left(F\, c_{k_1} \dots c_{k_n} \overset{\beta}{=} c_{f(k_1 \dots k_n)} \right)$$

Нека $f : N^n \to N$. Казваме, че f е λ-определима, ако има комбинатор F, такъв, че

$$\forall k_1 \dots k_n \left(\left(!f(k_1 \dots k_n) \Rightarrow F\, c_{k_1} \dots c_{k_n} \overset{\beta}{=} c_{f(k_1 \dots k_n)} \right) \& \left(\neg ! f(k_1 \dots k_n) \Rightarrow F\, c_{k_1} \dots c_{k_n} \text{ няма НФ} \right) \right)$$

<u>Th</u> Изчислимите ф-ии съвпадат с λ-определимите ф-ии

Док-во: $\mathcal{O}, I^n_k, S$ са λ-определими; композиция, рекурсия и μ запазват λ-определимост; и, за обратната посока, λ-термовете се кодират и операциите над тях са изчислими.

Типово λ-смятане

<u>def</u> Тип - чисто синтактичен обект; анотира терм

int f (int x) $\qquad$ int → int

Множество (изброимо) от типови променливи $\alpha_0, \alpha_1 \dots$

Множество от базови (неинтерпретирани) типове $\mu_0, \mu_1 \dots$

(например int, bool, string...)

19.03.2013

Ламбда смятане

Индуктивна дефиниция на тип: (1) α е тип (2) μ е тип
(3) ако ρ, σ са типове, то и $\rho \to \sigma$ е тип (тип на функция, която приема аргумент от тип ρ и връща резултат от тип σ)

$f : \rho \to \sigma$ $\quad x : \rho$ влече $(f x) : \sigma$

Степен (ниво) на тип: $deg(\alpha) = deg(\mu) = 0$, $deg(\rho \to \sigma) = $
$= max\{deg(\rho) + 1, deg(\sigma)\}$

Примери: $\alpha \to \mu$ (степен 1), $(\mu \to (\mu \to \mu))$ (степен 1)

Означение: вместо $\rho_1 \to (\rho_2 \to (\rho_3 \to \dots) \to \rho_n) \dots)$ пишем
$\rho_1 \to \rho_2 \to \dots \to \rho_n$ или
$\bar{\rho} \to \rho_n$ (групиране на аргументи)

$deg((\mu \to \mu) \to \mu) = 2$

Има два основни стила (Къри и Чърч) в типовото λ-смятане

def Стил на Curry: Ако $M \in \Lambda$ и σ е тип, то $M : \sigma$ наричаме типово съждение ("M е от тип σ")

def Типов контекст: Ако ~~{~~$x_1 \dots x_n$~~}~~ ~~[illegible]~~ са различни λ-променливи, а ~~[illegible]~~ $\sigma_1 \dots \sigma_n$ ~~[illegible]~~ са типове, то $\Gamma \doteq \{x_1 : \sigma_1 \dots x_n : \sigma_n\}$ наричаме типов контекст (Γ е мн-во)

def Типов извод: Дървета, чиито възли са типови съждения. Правила за извод:

(1) $\dfrac{}{x : \sigma}$ е типов извод, ако $x \in Var$, $\sigma \in \mathbb{T}yp$

(2) $\dfrac{M : \rho \to \sigma \quad N : \rho}{(M N) : \sigma}$ $\quad M, N \in \Lambda$, $\rho, \sigma \in \mathbb{T}yp$

(3) $\dfrac{\begin{matrix}[x : \rho] \\ \vdots \\ M : \sigma\end{matrix}}{\lambda x . M : \rho \to \sigma}$

Нека имаме типов извод. [ако в някое ~~[illegible]~~ листа се среща $x : \rho$, то] Тогава можем да изведем $\lambda x . M : \rho \to \sigma$, като маркираме всички листа, които говорят за типа на x; за тези листа казваме, че "не са свободни" (Такива може и да няма!)

Казваме, че $\Gamma \vdash M : \sigma$, ако има типов извод, чиито свободни листа са сред елементите на Γ, а коренът е $M : \sigma$. Ако $\Gamma = \emptyset$, то пишем $\vdash M : \sigma$ и казваме, че M има тип σ. (Тогава има типов извод на $M : \sigma$ без свободни листа)

Пример: $\{x : \mu \to \mu,\ y : \mu\} \vdash (x\ y) : \mu$ по правило (2).

$I : \rho \to \rho$ за произволно ρ : $\dfrac{[x:\rho]}{\lambda x.x : \rho \to \rho}$

$\vdash K : \rho \to \sigma \to \rho$

~~$\vdash KI : \rho \to \sigma \to \sigma$, $\vdash IK : \rho \to \sigma \to \rho$~~

$\vdash KI :$ ~~$(\rho \to \rho) \to \sigma \to (\rho \to \rho)$~~ $\rho \to \sigma \to \sigma$

$\vdash IK : \rho \to \sigma \to \rho$

$$\underline{\overset{\text{знам}}{K : (\sigma \to \sigma) \to \rho \to (\sigma \to \sigma)}\ ,\ \overset{\text{знам}}{I : \sigma \to \sigma}}$$

$KI : \rho \to \sigma \to \sigma$

~~$(\rho \to (\rho \to \sigma) \to \tau) \to (\rho \to \sigma) \to \rho \to \tau$~~

$\lambda xyz.((x\ z)(y\ z))$

$\rho \quad \rho \to (\sigma) \to \tau \quad \rho \to \sigma$

$\vdash S : (\rho \to \sigma \to \tau) \to (\rho \to \sigma) \to \rho \to \tau$

Задача: Да се докаже, че $\lambda x.(x\ x)$ няма тип.

Решение: Да допуснем, че е от тип σ.

$$\dfrac{\dfrac{x : \tau \to \rho \to \sigma \quad x : \tau}{(x\ x) : \rho \to \sigma}\ x:\rho}{\lambda x.(x\ x) : \sigma}$$

Значи $\rho = \tau = \tau \to \rho \to \sigma$ ↯

<u>ТБ</u> $\Gamma \subseteq \Delta$ и $\Gamma \vdash M : \sigma$ влече $\Delta \vdash M : \sigma$

<u>ТБ</u> Ако $\Gamma \vdash M : \sigma$, то $FV(M) \subseteq Var[\Gamma]$.

Д-во: по индукция

<u>ТБ</u> Ако $x \notin FV(M)$ и $\Gamma \cup \{x : \rho\} \vdash M : \sigma$, то $\Gamma \vdash M : \sigma$.

Следствие: $\Gamma \vdash M : \sigma$, $\Gamma' \leftrightharpoons \{x : \rho \mid x : \rho \in \Gamma \ \&\ x \in FV(M)\}$ влече $\Gamma' \vdash M : \sigma$

Лема: (1) Ако $\Gamma \vdash x : \sigma$, то $x : \sigma \in \Gamma$ (2) Ако $\Gamma \vdash (MN) : \sigma$, то има ρ, такова, че $\Gamma \vdash M : \rho \Rightarrow \sigma$ и $\Gamma \vdash N : \rho$

(3) Ако $\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma$, то има ρ, τ, такива, че $\sigma \equiv \rho \to \tau$ и $\Gamma \cup \{x : \rho\} \vdash M : \tau$

Следствие: Ако $\Gamma \vdash M : \sigma$ и N е подтерм на M, то има контекст Δ и тип ρ, такива, че $\Delta \vdash N : \rho$ (ако даден терм има тип, то и всичките му подтермове имат типове)

Следствие: Y-комбинаторът няма тип.

<u>def</u> Типова <u>субституция</u>: (1) $\alpha[\alpha := \rho] \leftrightharpoons \rho$ (2) $\beta[\alpha := \rho] \leftrightharpoons \beta$ (3) $\mu[\alpha := \rho] \leftrightharpoons \mu$ (4) $(\sigma \to \tau)[\alpha := \rho] \leftrightharpoons \sigma[\alpha := \rho] \to \tau[\alpha := \rho]$.

26.03.2013

λ - смятане

Curry стил (Типово λ-смятане)

*) μ, α, $\rho \Rightarrow \sigma$

*) типово съждение $\underset{\text{терм}}{M} : \underset{\text{тип}}{\tau}$

*) $x : \tau$ $\qquad$ $\dfrac{M : \rho \Rightarrow \sigma \quad N : \rho}{MN : \sigma}$

$$\begin{array}{c} [x : \rho] \\ \vdots \\ M : \sigma \\ \hline \lambda_x M : \rho \Rightarrow \sigma \end{array}$$

*) Γ - типов контекст

$\{x_1 : \rho_1, \ldots, x_n : \rho_n\}$

$\Gamma \vdash M : \tau$

*) $\sigma[\alpha := \rho]$

Лема за субституцията:

а) $\Gamma \vdash M : \sigma$, то $\Gamma[\alpha := \rho] \vdash M : \sigma[\alpha := \rho]$ (индукция по σ)

б) $\Gamma, x : \rho \vdash M : \sigma$, $\Gamma \vdash N : \rho$, то $\Gamma \vdash M[x := N] : \sigma$

└ индукция по M

Теорема (запазване на тип при редукция)

$\Gamma \vdash M : \sigma$, $M \xrightarrow{\beta} N$, то $\Gamma \vdash N : \sigma$

Доказателство: 1) $M \equiv (\lambda_x P) Q$

$N \equiv P[x := Q]$

$\Gamma \vdash (\lambda_x P) Q : \sigma$

$\Gamma \vdash \lambda_x P : \rho \Rightarrow \sigma$, за някое ρ

$\Gamma \vdash Q : \rho$

$\Gamma, x : \rho \vdash P : \sigma$

| лемата (бТ) : $\Gamma \vdash P[x := Q] : \sigma$ ∎

2) $M \equiv PQ \qquad P \xrightarrow{\beta} P'$

$N \equiv P'Q$

$$\frac{\Gamma \vdash P : \rho \Rightarrow \sigma \qquad \Gamma \vdash Q : \rho}{\Gamma \vdash PQ : \sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P' : \rho \Rightarrow \sigma \qquad \Gamma \vdash Q : \rho}{\Gamma \vdash \underbrace{P'Q}_{\equiv\, N} : \sigma}$$

3) $M \equiv PQ \qquad Q \xrightarrow{\beta} Q'$ (аналогично на 2)

$N \equiv PQ'$

4) $M \equiv \lambda_x P \qquad P \xrightarrow{\beta} P'$

$N \equiv \lambda_x P'$

$\Gamma, x : \rho \vdash P : \tau$, където $\rho \Rightarrow \tau = \sigma$

по ИП $\Rightarrow \Gamma, x : \rho \vdash P' : \tau$

$\Gamma \vdash \underbrace{\lambda_x P'}_{\equiv\, N} : \underbrace{\rho \Rightarrow \tau}_{=\, \sigma}$

26.03.2013

λ-смятане

Вярно ли е следното:

$\Gamma \vdash N:\rho$, $M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} N$, то $\Gamma \vdash M:\rho$?

$\vdash N:\rho$, $M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} N$, то $\vdash M:\rho$? , M, N - затворени

↳ не е вярно

Контрапример:

$SK \equiv (\lambda_{x,y,z}\, xz(yz))(\lambda_{u,v}\, u)$

$\xrightarrow{\beta} (\lambda_{y,z}(\lambda_{u,v}u)z(yz)) \xrightarrow{\beta} (\lambda_{y,z}(\lambda_{v}z)(yz))$

$\xrightarrow{\beta} \lambda_{y,z} z$

$\vdash \lambda_{y,z} z : \rho \Rightarrow \sigma \Rightarrow \sigma$ за произволни ρ и σ

$\nvdash SK : \rho \Rightarrow \sigma \Rightarrow \sigma$ Типът на SK? – $(\sigma \Rightarrow \sigma) \Rightarrow \sigma \Rightarrow \sigma$

Следствие от теоремата: $\Gamma \vdash M:\rho$, $M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} N$, то $\Gamma \vdash N:\rho$.

Въпроси: 1) Дадено M - затворен терм и σ - тип. Вярно ли е, че $\vdash M:\sigma$? ($M:\sigma$?) (проверка на тип typecheck)

2) Даден е M - затворен терм. Има ли тип σ, такъв че $\vdash M:\sigma$? ($M:$?)
(типизируемост, type inference)

3) Даден е σ - тип. Има ли затворен терм M, такъв че $\vdash M:\sigma$? (? : σ)
(обитаемост, type inhabitance)

Деф: Казваме, че типът τ е обитаем, ако има затворен терм M, такъв че $\vdash M:\tau$.

Пример: *) $\lambda_x x : \rho \Rightarrow \sigma \Rightarrow \rho$, за фиксирани ρ и σ.

$\vdash \lambda_x x : \rho \Rightarrow \sigma \Rightarrow \rho$

$x : \rho \vdash x : \sigma \Rightarrow \rho$

Въпрос 1) е разрешим.

*) $\lambda_x xx : \rho$, за произволен тип ρ ~~[illegible]~~

$\vdash \lambda_x x : ?$

Въпрос 2) – разрешим.

Пример: типизиране на $S \equiv \lambda_{x,y,z}\, xz(yz)$

Нека $x : \alpha$ $\quad yz : \rho$ ~~ако~~ то $\beta = \delta_1 \Rightarrow \rho$

$y : \beta$

$z : \delta_1$ $\quad xz(yz)$, то $\alpha = \delta_1 \Rightarrow \rho \Rightarrow \delta$

$\vdash S : \alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \delta_1 \Rightarrow \delta$

$\vdash S : \delta_1 \Rightarrow \rho \Rightarrow \delta \Rightarrow \delta_1 \Rightarrow \rho \Rightarrow \delta_1 \Rightarrow \delta$

Твърдение: Ако $\vdash M : \sigma$, то има най-общ тип ρ, така че ако $\vdash M : \tau$, то τ се получава от ρ чрез субституция (унификация – prolog)

*) $(\rho \Rightarrow \rho) \Rightarrow \rho$ – няма затворен терм от този тип

$x : \rho \Rightarrow \rho$

I сл. $$\dfrac{\dfrac{N : \sigma \Rightarrow \rho \qquad P : \sigma}{xP \equiv M : \rho}}{\lambda_x M : (\rho \Rightarrow \rho) \Rightarrow \rho}$$

Има алгоритъм, който по даден тип σ, който:

1) ако има затв. M: $\vdash M : \sigma$, връща M

2) ако няма такова M, връща „не".

26.03.2013

λ - смятане

към типовете добавяме $\forall\alpha\,\sigma$

*) $\mu, \alpha, \rho \Rightarrow \sigma, \forall\alpha\,\sigma$

$$\frac{M : \forall\alpha\,\sigma}{M : \sigma[\alpha := \rho]} \qquad \frac{M : \sigma}{M : \forall\alpha\,\sigma}\ *$$

* в свободните листа да не се използва α.

Полиморфизъм.

Church стил:

Деф: (Типизирани λ-термове)

1) x^σ, x^σ е типизирана променлива

2) Ако $M^{\rho\Rightarrow\sigma}$ и N^ρ, то $(MN)^\sigma$.

3) Ако x^ρ - променлива и M^σ, то $(\lambda_x M)^{\rho\Rightarrow\sigma}$

Изброимо множество от типизирани променливи x^σ, за всеки тип σ има безкрайно (изброимо) много променливи.

Недостатък - нямаме полиморфизъм на идентитета

Предимство - няма нужда от типови изводи, всеки терм си носи типа.

Деф: $FV(x^\sigma) = \{x^\sigma\}$

$FV((MN)^\sigma) = FV(M^{\rho\Rightarrow\sigma}) \cup FV(N^\rho)$

$FV((\lambda_{x^\rho} M^\sigma)) = FV(M^\sigma) \setminus \{x^\rho\}$.

BV - свързани променливи

субституция: $[x^\rho := N^\rho]$

Деф: (Изтриване на типове)

1) $|x^{\sigma}| \leftrightharpoons x$

2) $|(M^{\rho\Rightarrow\sigma}N^{\rho})^{\sigma}| \leftrightharpoons |M^{\rho\Rightarrow\sigma}||N^{\rho}|$

3) $|(\lambda_{x^{\rho}}M^{\sigma})^{\rho\Rightarrow\sigma}| \leftrightharpoons \lambda_x|M^{\sigma}|$

Твърдение: (Church → Curry):
Ако M^{σ} е типизиран λ-терм (Λ^{T}),
$FV(M^{\sigma}) = \{x_1^{\rho_1}, \dots, x_n^{\rho_n}\}$, то
$\Gamma \vdash |M^{\sigma}| : \sigma$, където $\Gamma = \{x_1 : \rho_1, \dots, x_n : \rho_n\}$

Доказателство:

1) $M^{\sigma} \equiv x^{\sigma}$, то $\Gamma = \{x : \sigma\}$

$|x^{\sigma}| = x \qquad \Gamma \vdash x : \sigma$

2) $M^{\sigma} \equiv N^{\rho\Rightarrow\sigma}P^{\rho}$

По И.П. $\Gamma_1 \vdash |N^{\rho\Rightarrow\sigma}| : \rho \Rightarrow \sigma$

$\Gamma_2 \vdash |P^{\rho}| : \rho$

$$\left.\begin{array}{l} FV(N) \subseteq FV(M) \\ FV(P) \subseteq FV(M) \end{array}\right| \; \Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Gamma$$

$$\frac{\Gamma \vdash |N^{\rho\Rightarrow\sigma}| : \rho \Rightarrow \sigma \qquad \Gamma \vdash |P^{\rho}| : \rho}{\Gamma \vdash |N^{\rho\Rightarrow\sigma}P^{\rho}| : \sigma}$$

(от деф на изтриване)

3) $M^{\sigma} \equiv \lambda_{x^{\rho}}N^{\tau} \qquad \sigma = \rho \Rightarrow \tau$

По И.П. ~~$\Gamma \setminus \{x : \rho\} \vdash |N^{\tau}| : \tau$~~

$\Gamma_1 \vdash |N^{\tau}| : \tau$; $\Gamma = \Gamma_1 \setminus \{x : \rho\}$

$\Gamma_1, x : \rho \vdash |N^{\tau}| : \tau$; $\Gamma \vdash |\lambda_{x^{\rho}}N^{\tau}| : \sigma = \rho \Rightarrow \tau.$

26.03.2013

λ- смятане

Твърдение: (Curry → Church).

Ако $M \in \Lambda$, $\Gamma \vdash M : \sigma$, където

$\Gamma = \{x_1 : \rho_1, \ldots, x_n : \rho_n\}$, тогава има

$N^\sigma \in \Lambda^T$, така че $|N^\sigma| \equiv M$.

$FV(N^\sigma) = \{x_1^{\rho_1}, \ldots, x_n^{\rho_n}\}$.

Доказателство: 1) $M \equiv x$ $\quad x : \sigma \vdash x : \sigma$

$N^\sigma \leftrightharpoons x^\sigma$

2) $\Gamma \vdash P : \rho \Rightarrow \sigma$

$\Gamma \vdash Q : \rho$

По ИП $|P_0^{\rho \Rightarrow \sigma}| \equiv P$; $|Q_0^\rho| \equiv Q$

$N^\sigma \leftrightharpoons (P_0^{\rho \Rightarrow \sigma} Q_0^\rho)$

3) $\Gamma, x : \rho \vdash N : \tau$ $\quad \rho \Rightarrow \tau = \sigma$

$M \equiv \lambda_x P$

По ИП. $|P_0^\tau| \equiv P$

$N^\sigma \leftrightharpoons \lambda_{x^\rho} P_0$.

Деф: (β-редукция): Казваме, че $M^\rho \xrightarrow{\beta} N^\rho$, ако:

~~1) $M^\rho \equiv P^{\sigma \Rightarrow \rho} Q^\sigma$~~

1) $M^\rho \equiv (\lambda_{x^\sigma} P^\rho) Q^\sigma$

$N^\rho \equiv P^\rho[x^\sigma := Q^\sigma]$

$(\lambda_{x^\sigma} P^\rho) Q \xrightarrow{\beta} P^\rho[x^\sigma := Q^\sigma]$

2) Ако $P^{\rho \Rightarrow \sigma} \xrightarrow{\beta} P'^{\rho \Rightarrow \sigma}$, то $P^{\rho \Rightarrow \sigma} Q^\rho \xrightarrow{\beta} P'^{\rho \Rightarrow \sigma} Q^\rho$

3) Ако $P^\rho \xrightarrow{\beta} P'^\rho$, то $Q^{\rho \Rightarrow \sigma} P^\rho \xrightarrow{\beta} Q'^{\rho \Rightarrow \sigma} P^\rho$

4) Ако $N^\rho \xrightarrow{\beta} N'^\rho$, то $\lambda_{x^\sigma} N^\rho \xrightarrow{\beta} \lambda_{x^\sigma} N'^\rho$

Деф: (η-редукция):

$\lambda_{x^\rho} M^{\rho\Rightarrow\sigma} x^\rho \xrightarrow{\eta} M^{\rho\Rightarrow\sigma}$, ако $x \notin FV(M^{\rho\Rightarrow\sigma})$

Домашно: Деф: Слабо типизирани λ-термове:

1) $x \in \Lambda^{WT}$, ако x е променлива
2) $M \in \Lambda^{WT}$, $N \in \Lambda^{WT}$, то $MN \in \Lambda^{WT}$
3) $M \in \Lambda^{WT}$, то $\lambda_{x:\rho} M \in \Lambda^{WT}$, ρ е тип.

Правилата за типов извод са същите, с изключение на:

$$\frac{\begin{array}{c} x : \rho \\ \vdots \\ M : \sigma \end{array}}{\lambda_{x:\rho} M : \rho \Rightarrow \sigma}$$

Да си докажем, че $\forall M \in \Lambda^{WT}$, σ, ρ - типове, ако $\left.\begin{array}{l} \Gamma \vdash M : \sigma \\ \Gamma \vdash M : \rho \end{array}\right\}$, то $\sigma = \rho$. (имаме единствен тип при слабо типизираните термове)

Теорема за силната нормализация:

Деф: Казваме, че терм M^σ е силно нормализируем, ако ~~множеството $Red(M) = \{N^\sigma \mid M^\sigma \xrightarrow{\beta} N^\sigma\}$ е крайно~~ Няма как да получим безкрайна редукционна редица: $\underset{\overset{|||}{M}}{M_0} \xrightarrow{\beta} M_1 \xrightarrow{\beta} M_2 \xrightarrow{\beta} \dots \xrightarrow{\beta} M_n \xrightarrow{\beta} \dots$

Ще докажем, че всички типизирани термове са силно нормализируеми.

Вярно ли е, че β-редукцията е конфлуентна при типизирани термове? - Да (чрез изтриване на типове).

26. 03. 2013.

~~λ-термове~~

λ-смятане

Щом е конфлуентна, то имаме поне една нормална форма. Ще покажем, че има точно една.

Неуспешен опит: Индукция по дефиницията на Λ^T.

1) x^σ - силно нормализируем (с.н.)
2) $\lambda x^\rho M^\sigma$ е с.н. ако M^σ е с.н.
3) $\underbrace{M^{\rho\Rightarrow\sigma} N^\rho}_{\boxed{\text{проблем. не знаем, че е така}}}$, ако знаем че $M^{\rho\Rightarrow\sigma}$ е с.н. и N^ρ е с.н.

Деф: (SN) - силна нормализируемост.

$$SN := \{ M \mid N \in SN, M \xrightarrow{\beta} N \}.$$

$M \in SN$, ако за всяко N, [redacted] за което $M \xrightarrow{\beta} N$, то $N \in SN$

~~**Твърдение:** Един терм M е силно нормализируем $\Longleftrightarrow M \in SN$.~~

~~**Доказателство:**~~

~~$\Rightarrow$) Нека M е с.н. Нека $M \xrightarrow{\beta} N$, то N също е с.н.~~

~~Искаме да видим, че $N \in SN$.~~

~~Индукция по $|Red(M)|$~~

~~$Red(N) \subsetneq Red(M)$, защото $M \notin Red(N)$~~

Твърдение: Ако $M \in SN \Rightarrow M$ е силно нормализируем.

Доказателство: Индукция по SN.

Нека $M \in SN$. ~~и $M \xrightarrow{\beta} N$~~.

Да допуснем, че имаме безкрайна редица:

$$\underset{\substack{\equiv \\ M}}{M_0} \xrightarrow{\beta} M_1 \xrightarrow{\beta} M_2 \xrightarrow{\beta} \dots \xrightarrow{\beta} M_n \xrightarrow{\beta} \dots$$

Тогава по дефиниция $M_1 \in SN$ – противоречие, тъй като по И.П. M_1 е с. н.

Деф: (Силно изчислими предикати).

SC^τ с индукция по τ

1) $SC^\mu := \{ M^\mu \mid M \in SN \}$

2) $SC^\alpha := \{ M^\alpha \mid M \in SN \}$

3) $SC^{\rho \Rightarrow \sigma} := \{ M^{\rho \Rightarrow \sigma} \mid (\forall N \in SC^\rho)(MN \in SC^\sigma) \}$

Цел: Искаме да покажем, че $\Lambda^T \subseteq SC \subseteq SN$, където $SC = \bigcup_{\rho\text{-тип}} SC^\rho$.

Лема 1: Ако $M^\sigma \xrightarrow{\beta} N^\sigma$, то $M \in SC^\sigma \Rightarrow N \in SC^\sigma$.

Доказателство: С индукция по σ.

1) $\sigma = \mu$ или $\sigma = \alpha$ ~~очевидно, понеже~~

~~$M^\sigma \in SN \Rightarrow$~~ $M \in SC^\sigma = SN^\sigma$, ~~и~~ където

$SN^\sigma := \{ M^\sigma \mid M \in SN \}$.

по деф. $N \in SN^\sigma = SC^\sigma$.

~~$M \in SC^\sigma = SN^\sigma$~~

26.03.2013

λ-смятане

2) Нека $M^{\sigma} \in SC^{\rho \Rightarrow \tau}$ $\sigma = \rho \Rightarrow \tau$. $N \in SC^{\rho \Rightarrow \tau}$

Нека $P \in SC^{\rho} \xrightarrow{деф.} MP \in SC^{\tau}$.

По И.П. $MP \xrightarrow{\beta} NP$, то $NP \in SC^{\tau}$.

Лема: $M^{\sigma} \in SC^{\sigma} \cap SN$, то $x^{\sigma \Rightarrow \tau} M^{\sigma} \in SN$

Доказателство: Индукция по SN.

~~Нека $M^{\sigma} \xrightarrow{\beta} N^{\sigma}$, $N^{\sigma} \in SN$.~~

~~От предната лема знаем, че $N^{\sigma} \in SC^{\sigma}$, т.е.~~

~~$N^{\sigma} \in SC^{\sigma} \cap SN$.~~

~~По И.П. $x^{\sigma \Rightarrow \tau} N^{\sigma} \in SC^{\tau} \cap SN$.~~

~~За да докажем, че $x^{\sigma \Rightarrow \tau} M^{\sigma} \in SN$, трябва да вземем произволно $xM \xrightarrow{\beta} P$. $P \equiv xR$, $M \xrightarrow{\beta} R$.~~
~~$\in SN$, откъдето $xM \in SN$.~~

Д-во: Искаме да видим, че $x^{\sigma \Rightarrow \tau} M^{\sigma} \in SN$.

За целта е ~~необходимо~~ достатъчно $xM \xrightarrow{\beta} P$ и да докажем, че $P \in SN$.

По деф. на $\xrightarrow{\beta}$ знаем, че $P \equiv xN$

$M \xrightarrow{\beta} N \to N \in SC^{\sigma}$ (Лемата)

$\to N \in SN$ (Деф на SN)

$N \in SC \cap SN$, по И.П. $xN \in SN$.

Твърдение: $Mx \in SN$, то $M \in SN$.

чрез индукция по SN

Доказателство: Нека N е такова че $M \xrightarrow{\beta} N$.

Искаме $N \in SN$.

$Mx \xrightarrow{\beta} Nx$, то по деф. на SN $Nx \in SN$.

По ИП $N \in SN$.

Лема: ~~1) SC^ρ~~ $\subseteq SN$ 1) $SC^\rho \subseteq SN$

2) $x^\rho \in SC^\rho$

Доказателство: Едновременна индукция по ρ.

I) $\rho = \mu$ – базов тип.

1) $SC^\mu = SN^\mu$ – по деф.

2) $x \in SN = SC^\mu$

$\forall M\ (\underbrace{x \xrightarrow{\beta} M}_{\text{няма такива}})\ M \in SN$ (x е в н. ф.)

II $\rho = \alpha$ – аналогично

III $\rho = \sigma \Rightarrow \tau$

1) Нека $M \in SC^{\sigma \Rightarrow \tau}$ Искаме $M \in SN$.

Взимаме $M^{\sigma \Rightarrow \tau} \xrightarrow{\beta'} N^{\sigma \Rightarrow \tau}$. Искаме $N \in SN$.

По лемата за затвореност на SC относно $\xrightarrow{\beta}$ имаме, че $N \in SC^{\sigma \Rightarrow \tau}$

Тъй като $x \in SC^\sigma$ по и.п. 2) знаем, че

$Nx \in SC^\tau$ по деф. $\xrightarrow[\text{и.п.1)}]{}$ $Nx \in SN \xrightarrow[\text{Тв}]{} N \in SN$

2) Искаме $x^{\sigma \Rightarrow \tau} \in SC^{\sigma \Rightarrow \tau}$.

Нека $M \in SC^\sigma$. $xM \in SC^\tau$ по лемата. (TODO!)

Теорема: $\Lambda^T \subseteq SC$.

Дефиниция: Субституция: $\xi : V^T \to \Lambda^T$, така че $\xi(x^\rho) = M^\rho$ (запазва типа)

~~Деф: Субституция на~~

Деф: Прилагане на субституция над терм:

1) $x\xi \leftrightharpoons \xi(x)$

2) $(MN)\xi \leftrightharpoons (M\xi)(N\xi)$

3) $(\lambda_x M)\xi \leftrightharpoons \lambda_x M\xi_x^x$

$$\xi_x^M(y) \leftrightharpoons \begin{cases} M & y \equiv x \\ \xi(y) & y \not\equiv x \end{cases}$$

26.03.2013.

λ-смятане

Твърдение: Ако $\xi(x) \in SC$ за всяко x, то $M^\sigma \xi \in SC^\sigma$ за произволен терм M.

Д-во: Индукция по M.

1) $M \equiv x$, тогава $x\xi = \xi(x) \in SC$ (по деф)

2) $M^\sigma \equiv N^{\rho \Rightarrow \sigma} P^\rho$

$$M^\sigma \xi = \underbrace{(N\xi)}_{\in SC^{\rho\Rightarrow\sigma}} \underbrace{(P\xi)}_{\in SC^\rho} \text{ (по И.П.).}$$

Тогава по деф. на $SC^{\rho \Rightarrow \sigma}$: $M\xi \in SC^\sigma$.

3) $M^\sigma \equiv \lambda x^\rho N^\tau$ $\quad \sigma = \rho \Rightarrow \tau$.

$M\xi = \lambda x^\rho (N\xi^x_x)^\tau$ по И.П. $N\xi \in SC^\tau$

Имаме, че:

$$(M\xi)^\sigma \in SC^{\rho\Rightarrow\tau} \leftrightarrow \forall P \in SC^\rho ((M\xi)P \in SC^\tau)$$

Нека $P^\rho \in SC^\rho$

$$(M\xi)P^\rho \equiv (\lambda x^\rho N\xi^x_x) P \xrightarrow{\beta} \underset{N\xi^P_x}{\underset{|||}{N\xi^x_x [x := P]}}$$

За ξ^P_x можем да използваме И.П.

$(N\xi^P_x) \in SC^\tau$

09.04.2013 λ-смятане

Деф: Терм M е силно нормализируем, ако не съществува $M \equiv M_0 \xrightarrow{\beta} M_1 \xrightarrow{\beta} \ldots \xrightarrow{\beta} M_n \xrightarrow{\beta} \ldots$

Деф: $M \in SN \leftrightharpoons \forall N (M \xrightarrow{\beta} N \to N \in SN)$

*база на индукцията -

Деф: SC^{τ} - силно изчислими термове

$SC^{M} \leftrightharpoons SN \leftrightharpoons SC^{\alpha}$

$M \in SC^{\rho \Rightarrow \sigma} \leftrightharpoons \forall N (N \in SC^{\rho} \to MN \in SC^{\sigma})$

$SC \leftrightharpoons \bigcup_{\tau} SC^{\tau}$

$\Lambda \subseteq SC \subseteq SN \subseteq \Lambda$ (Тогава ще имаме равенство)

Лема 1. $M \in SN \longleftrightarrow M$ е силно нормализируем

→) Индукция по SN.

Нека $M \in SN$, да допуснем, че за всички $M \xrightarrow{\beta} N$ е вярно.

Да допуснем, че M не е силно норм.

$\Rightarrow \exists\ M \equiv M_0 \xrightarrow{\beta} M_1 \xrightarrow{\beta} \ldots \xrightarrow{\beta} M_n \xrightarrow{\beta} \ldots$

$\Rightarrow M_1 \in SN \underset{\text{и.п.}}{\Rightarrow} M_1$ е силно нормализируем. ↯

←) Да допуснем, че $M \notin SN$ ~~и M е силно~~

$\Rightarrow \exists\ M_1 \xleftarrow{\beta} M,\ M_1 \notin SN \Rightarrow$ ~~$\exists M_2 \xleftarrow{\beta} M_1$~~

$\exists M_2 \notin SN\ M_1 \xrightarrow{\beta} M_2$

Тогава можем да построим безкрайна редица - противоречие! ↯

Лема 2. $M^{\tau} \xrightarrow{\beta} N^{\tau}$ $M^{\tau} \in SC^{\tau} \longrightarrow N^{\tau} \in SC^{\tau}$ (от предния път)

(вярно е и за $\xrightarrow{\beta}\!\!\!\rightarrow$)

Доказателство: ~~За M и L~~

$M \in SN$ ~~$\in SN$~~ ~~$N \in SN$.~~

~~Ако $M \in SN \longrightarrow N \in SN$ (по деф.)~~

~~Ако $N \in SN$ с индукция по $\xrightarrow{\beta}$~~

~~получаваме, че $M \in SN$.~~

~~**Твърдение:** $\overset{\rho\to\sigma}{M} N^{\rho} \in SC^{\sigma} \longrightarrow (\lambda x^{\rho} M^{\rho\to\sigma} x^{\rho}) N^{\rho} \in SC^{\sigma}$~~

~~$M, N \in SN$.~~

~~**Доказателство:** Индукция по SN~~

~~Допускаме, че за $M \xrightarrow{\beta} M' \in SN$, то за тях е~~

~~$N \xrightarrow{\beta} N' \in SN$ изпълнено~~

~~Допускаме, че $MN \in SC$~~ $M(N) = M[x := N]$

Твърдение 1 Нека $M, N, \vec{P} \in SN$., такива че $\boxed{(x \notin FV(M))}$

~~Ако~~ $(M(N)\vec{P})^{\mu}$ ~~…~~

Ако $(M(N)\vec{P})^{\mu} \in \overset{\overset{SN}{\shortparallel}}{SC^{\mu}}$, то $(\lambda_x M x) N \vec{P} \in SC^{\mu}$

$(M\vec{P} \leftrightharpoons (\ldots((MP_1)P_2)P_3 \ldots P_n)$

Доказателство: Индукция по SN за $M, N, \vec{P}$

$SC^{\mu} = SN$ (по деф.)

Нека $MN\vec{P} \in SN$. Нека $(\lambda_x M(x)) N \vec{P} \xrightarrow{\beta} Q$

Искаме да покажем, че $Q \in SN$

I сл. $M \xrightarrow{\beta} M'$ или $N \xrightarrow{\beta} N'$ или $P_i \xrightarrow{\beta} P_i'$.

във всеки случай ~~тя~~ имаме, че $M \xrightarrow{\beta} M'$, $N \xrightarrow{\beta}\!\!\!\rightarrow N'$, $\vec{P} \xrightarrow{\beta} P'$. Тогава

$Q \equiv (\lambda_x M(x)) N' \vec{P}'$ и по ИП <u>$Q \in SN$</u>

09.04.2013

λ- смятане

<u>II сл.</u> $(\lambda_x M x) N \vec{P} \longrightarrow ((Mx)[x := N]) \vec{P}$ ~~$\equiv$~~

$$\overset{|||}{M N \vec{P}} \in SN \text{ по деф.}$$

<u>Твърдение:</u> 2 Нека $M^\rho \in SC^\rho \cap SN$.

Тогава $x^{\rho \Rightarrow \mu} M^\rho \in SC^{\mu} = SN$

<u>Доказателство:</u> Индукция по $M \in SN$

(ако $M \xrightarrow{\beta} N$, то за N е вярно)

Нека $xM \xrightarrow{\beta} P \Rightarrow P \equiv x N^\rho$ и $M^\rho \to N^\rho$.

По $\boxed{\overset{\text{лема 2}}{\text{лема}}}$ $N^\rho \in SC^\rho$, но $N^\rho \in SN$ (по деф).

По И.П. $xN \equiv P \in SN$.

<u>Твърдение:</u> 3 Ако $M^{\rho \Rightarrow \sigma} x^\rho \in SN$, то $M^{\rho \Rightarrow \sigma} \in SN$.

<u>Доказателство:</u> Индукция по SN

Нека $M \xrightarrow{\beta} N$. <u>Искаме да покажем, че $N \in SN$.</u>

$M^{\rho \Rightarrow \sigma} x^\rho \xrightarrow{\beta} N^{\rho \Rightarrow \sigma} x^\rho$ и по И.П. получаваме $N \in SN$.

<u>Лема:</u> 1) ~~$SC^\tau \subseteq SN$~~ $SC^\rho \subseteq SN$

2) ~~$x^\tau \in SC^\tau$~~ $x^\rho \in SC^\rho$

<u>Доказателство:</u> Едновременна индукция по типа

<u>I сл.)</u> ρ е базов $\rho = \mu$

1) тривиално

2) $SC^\rho = SN$

$x \in SN$, понеже е в нормална форма

<u>II сл.)</u> $\rho = \sigma \Rightarrow \tau$

1) $M \in SC^{\sigma \Rightarrow \tau}$. Той като ~~знаем~~ по И.П.$^{2)}$ ~~за~~

$x^\sigma \in SC^\sigma$, то $Mx \in SC^\tau$ (деф на SC)

по ИП 1) $Mx \in SN \to M \in SN$ (от Тв. 3)

2) $x^{\sigma\Rightarrow\tau} \in SC^{\sigma\Rightarrow\tau}$? ~~Доказател~~

Проблем: τ не е базов тип и не можем да приложим твърдението (Тв2)

$$x^{\sigma\Rightarrow\tau} \in SC^{\sigma\Rightarrow\tau} \Longleftrightarrow \forall M^{\sigma} \in SC^{\sigma}\left((xM)^{\tau} \in SC^{\tau}\right)$$

Нека $\rho = \vec{\sigma} \Rightarrow \mu$

$$\rho = \underset{\sigma}{\underset{\|}{\sigma_1}} \Rightarrow \sigma_2 \Rightarrow \sigma_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow \sigma_n \Rightarrow \mu$$

Нека
$$\left.\begin{array}{l} M_1^{\sigma_1} \in SC^{\sigma_1} \\ M_2^{\sigma_2} \in SC^{\sigma_2} \\ \text{— — — —} \\ M_n^{\sigma_n} \in SC^{\sigma_n} \end{array}\right\} \subseteq SN \left(\begin{array}{l}\text{по И.П. за} \\ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\end{array}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$x\vec{M} \in SC^{\mu} \text{ (от Тв.4)}$$

Твърдение 4. (По-силна форма на Тв. 2) Ако
$M_1^{\sigma_1} \in SC^{\sigma_1} \cap SN$
$M_2^{\sigma_2} \in SC^{\sigma_2} \cap SN$
— — — —
$M_n^{\sigma_n} \in SC^{\sigma_n} \cap SN$, то

$$x^{\sigma_1 \Rightarrow \sigma_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \sigma_n \Rightarrow \mu} \vec{M} \in SC^{\mu} = SN.$$

Доказателство: Индукция по $\vec{M} \in SN$

Нека $x\vec{M} \xrightarrow{\beta} P \Rightarrow \exists M_i : M_i \xrightarrow{\beta} M_i'$ и

$M_j' \equiv M_j$ за $j \neq i$, тогава

$P \equiv xM_1' \dots M_n' = x\vec{M'} \in SN$.

09.04.2013. λ-смятане

Деф: $\xi : Var \to \Lambda$, така че $(\xi(x^\tau))^\tau$, то ξ наричаме субституция.

Деф: Ако за всяко x^τ $\xi(x^\tau) \in SC^\tau$, то наричаме ξ силно изчислима.

Деф: $x^\tau \xi \leftrightharpoons \xi(x^\tau)$

$$(MN)\xi \leftrightharpoons (M\xi)(N\xi)$$

$$(\lambda_x M)\xi \leftrightharpoons \lambda_x M \xi_x^x$$

Деф: Нека ξ е субституция, x^τ е променлива, $M^\tau \in \Lambda^\tau$

$$\xi_x^M(y) \leftrightharpoons \begin{cases} \xi(y), & y \not\equiv x \\ M, & y \equiv x \end{cases}$$

Лема: Ако ξ е силно изчислима, то $M^\tau \xi \in SC^\tau$

Доказателство: Индукция по M

I сл. $M^\tau \equiv x^\tau$

$M\xi \equiv \xi(x) \in SC^\tau$ (по деф)

II сл. $M \equiv P^{\sigma \Rightarrow \tau} Q^\sigma$

$(PQ)\xi = (P\xi)^{\sigma \Rightarrow \tau} (Q\xi)^\sigma$ по ИП $P\xi \in SC^{\sigma \Rightarrow \tau}$

$Q\xi \in SC^\sigma$

По деф на $SC^{\sigma \Rightarrow \tau}$: $(P\xi)(Q\xi) \in SC^\tau$

III сл.

III сл. $M \equiv \lambda x^{\rho} P^{\sigma}$ $\tau = \rho \Rightarrow \sigma$

$(\lambda x^{\rho} P^{\sigma})\xi \equiv \lambda x^{\rho} P^{\sigma}\xi^{x}_{x}$ по ИП. получаваме:

$P\xi^{x}_{x} \in SC^{\sigma}$.

Достатъчно е да видим, че:

$(\lambda_x P\xi^{x}_{x}) N \in SC^{\sigma}$ $\quad \Big\} \; P\xi^{x}_{x} \in SC^{\sigma}$ $\quad (P\xi^{x}_{x})^{N}_{x} \equiv$

$N \in SC^{\rho}$ $\quad \equiv P\xi^{N}_{x}$

С индукция по ρ можем да видим, че

$(MN\vec{P})^{\rho} \in SC^{\rho}$, то $(\lambda_x Mx)N\vec{P} \in SC^{\rho} \leq SN$

Базовият случай е Тв.1.

Сега, нека $\rho = \sigma \Rightarrow \tau$, като знаем, че е вярно за σ.

Нека $Q \in SC^{\sigma}$. Трябва имаме, че:

$MN\vec{P}Q \in SC^{\tau}$ (по деф на SC^{ρ})

По ИП получаваме $(\lambda_x Mx)N\vec{P}Q \in SC^{\tau}$

Следствие: Всеки λ-терм е силно изчислим

$\Lambda \subseteq SC \leq SN$.

Доказателство: Използва се, че $\xi(x) \leq X$ и предната Лема.

Доказателство в Types & Programming Languages

Normalization for simple types

09.04.2013 λ - смятане

Нормализация чрез оценяване

Деф: Нека е дадено изображение $[\![\ ]\!]$, което на всеки затворен тип τ съпоставя множество $[\![\tau]\!]$ и на всеки затворен терм M^τ съпоставя $[\![M^\tau]\!] \in [\![\tau]\!]$.

$[\![\ ]\!]$ - наричаме λ-интерпретация.

Деф: Ако M^τ и N^τ са затворени термове и $M^\tau \overset{\beta\eta}{=} N^\tau \longrightarrow [\![M^\tau]\!] = [\![N^\tau]\!]$, то $[\![\ ]\!]$ е модел на типизираното λ-смятане.

Пример: $[\![\tau]\!] \leftrightharpoons \{0\}$ $[\![M^\tau]\!] \leftrightharpoons 0$ - тривиален модел.

Деф: Нека е дадена фамилия от множества $\{A_\mu\}$ за всеки базов тип μ. Дефинираме следната интерпретация:

$$[\![\mu]\!] \leftrightharpoons A_\mu$$

$$[\![\rho \Rightarrow \sigma]\!] \leftrightharpoons [\![\sigma]\!]^{[\![\rho]\!]} = \{ f : [\![\rho]\!] \to [\![\sigma]\!] \}$$

Разглеждаме оценка ξ.

$$\xi : Var^\tau \longrightarrow [\![\tau]\!].$$

$$[\![x^\tau]\!]_\xi \leftrightharpoons \xi(x)$$

$$[\![M^{\rho\Rightarrow\sigma} N^\rho]\!]_\xi \leftrightharpoons [\![M]\!]_\xi([\![N]\!]_\xi)$$

$$[\![\lambda x^\rho M^\sigma]\!](\underset{\in [\![\rho]\!]}{a}) \leftrightharpoons [\![M]\!]_{\xi^a_x}$$

} за отворени (произволни) термове

Теоретико-множествена интерпретация.

$\llbracket M \rrbracket \leftrightharpoons \llbracket M \rrbracket_{\xi^*}$, M - затворен терм; ξ - произволна оценка

Теорема: Всяка теоретико-множествена λ-интерпретация е λ-модел.

Доказателство: $M \overset{\beta\eta}{=} N$, то $\llbracket M \rrbracket = \llbracket N \rrbracket$

Достатъчно е да видим, че $M \xrightarrow{\beta} N$, то $\llbracket M \rrbracket = \llbracket N \rrbracket$
$M \xrightarrow{\eta} N$, то $\llbracket M \rrbracket = \llbracket N \rrbracket$.

1. $\lambda_x Mx \xrightarrow{\eta} M$, където $x \notin FV(M)$

$$\llbracket \lambda_x Mx \rrbracket (a) = \llbracket Mx \rrbracket_{x \mapsto a} = \llbracket M \rrbracket_{x \mapsto a} \big(\underbrace{\llbracket x \rrbracket_{x \mapsto a}}_{a} \big) =$$

$$= \llbracket M \rrbracket (a)$$ (M е затворен терм)

2. $(\lambda_x M)N \xrightarrow{\beta} M[x:=N]$

$$\llbracket (\lambda_x M)N \rrbracket = \llbracket \lambda_x M \rrbracket (\llbracket N \rrbracket) = \underline{\llbracket M \rrbracket_{x \mapsto \llbracket N \rrbracket}}.$$

$$\llbracket M[x:=N] \rrbracket = \underline{\llbracket M \rrbracket_{x \to \llbracket N \rrbracket}}$$ (с индукция по M)

3) Ако $M \xrightarrow{\beta\eta} M'$, то $MN \xrightarrow{\beta\eta} M'N^*$

$$\llbracket MN \rrbracket = \llbracket M \rrbracket (\llbracket N \rrbracket) = \llbracket M' \rrbracket (\llbracket N \rrbracket) \overset{\text{ип}}{=} \llbracket M'N \rrbracket$$

4) $NM \xrightarrow{\beta\eta} NM'$ - аналогично

5) $\lambda_x M \xrightarrow{\beta\eta} \lambda_x M'$

$$\llbracket \lambda_x M \rrbracket_\xi (a) = \llbracket M \rrbracket_{\xi^a_x} \overset{\text{ип}}{=} \llbracket M' \rrbracket_{\xi^a_x} = \llbracket \lambda_x M' \rrbracket (a).$$

(С индукция по $\xrightarrow{\beta}$, $\xrightarrow{\eta}$ $M \xrightarrow{\beta\eta} N$, то $\llbracket M \rrbracket_\xi = \llbracket N \rrbracket_\xi$.)

09.04.2013 λ - смятане

Разглеждаме теоретико-множествен модел с интерпретация на базовите типове $\{\Lambda^\mu\}_\mu$

Ще дефинираме две изображения за тип τ:

$\uparrow_\tau : \Lambda^\tau \longrightarrow [\![\tau]\!]$ (reflect; рефлексия)

$\downarrow_\tau : [\![\tau]\!] \longrightarrow \Lambda^\tau$ (reify, реификация)

Деф: С едновременна индукция по τ.

- $\downarrow_\mu(M) \leftrightharpoons M$
- $\uparrow_\mu(M) \leftrightharpoons M$
- $\downarrow_{\rho\Rightarrow\sigma}(a) \leftrightharpoons \lambda x^\rho \downarrow_\sigma(\underbrace{a(\uparrow_\rho x^\rho)}_{\in[\![\sigma]\!]})$
- $\uparrow_{\rho\Rightarrow\sigma}(M^{\rho\Rightarrow\sigma})(\underset{\in[\![\rho]\!]}{a}) \leftrightharpoons \uparrow_\sigma(M(\downarrow_\rho a))^\sigma$

a - теоретико множествена ф-я от ρ в σ

$\downarrow[\![M]\!] \equiv \ell nf(M)$ (дълга нормална форма на M)

Деф: Казваме, че един терм M^τ е в дълга нормална форма, ако M е в нормална форма и $\exists P^\tau$: [illegible], $P^\tau \xrightarrow{\eta} M^\tau$.
↳ в β-нормална форма

Домашно: Не съществува безкрайна редица

$M \equiv M_0 \xleftarrow{\eta} M_1 \xleftarrow{\eta} M_2 \xleftarrow{\eta} \dots \xleftarrow{\eta} M_n \xleftarrow{\eta} \dots$

(ограничени сме от типа) M_i са в β-нормална форма

η-експанзията е и конфлуентна (с точност до преименуване на ~~променливата~~ свързаните променливи).

Деф: $lnf(M)$ → единственият терм в дълга нормална форма така че:

$$lnf(M) \xrightarrow{\eta} M \quad ; \quad M \xrightarrow{\beta} lnf(M)$$

домашно:

Лема 1: Нека имаме типовете $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \sigma$.
Нека $a_i \in [\![\rho_i]\!]$, $M^{\vec{\rho} \Rightarrow \sigma}$.
Тогава:

$$(\uparrow_{\vec{\rho} \Rightarrow \sigma} M)(a_1)(a_2)(a_3)\dots(a_n) = \uparrow_\sigma (M \downarrow_{\rho_1} a_1 \downarrow_{\rho_2} a_2 \dots \downarrow_{\rho_n} a_n)$$

Теорема (Коректност): M - произволен терм.

$$\downarrow_\tau [\![M^\tau]\!]_{\uparrow_\tau} \equiv lnf(M)$$

домашно
Лема 2: Ако M е в дълга нормална форма, то:
или 1) $M \equiv \lambda_x N$, където N е в дълга нормална форма, или
2) $M \equiv x^{\vec{\rho} \Rightarrow \iota}\vec{M}$, където $\vec{M}$ са в дълги н. ф.

Доказателство: ~~Достатъчно е да докажем~~
Нека N е произволен терм, тогава

$$[\![N]\!]_{\uparrow_\tau} = [\![lnf(N)]\!]_{\uparrow_\tau}$$ (достатъчно е да докажем за термове в дълга н. ф.)

Нека M е в дълга н. ф.
Индукция по M (Лема 2)

1) $M^{\rho \Rightarrow \sigma} \equiv \lambda_{x^\rho} N^\sigma$

$$\downarrow_{\rho \Rightarrow \sigma}([\![M]\!]_{\uparrow_\tau}) \equiv \lambda \underbrace{y^\rho}_{\text{нова пром.}} \downarrow_\sigma [\![\cancel{\lambda_x} N]\!]_{\uparrow_\tau}(\uparrow_\rho y^\rho) \equiv \lambda_{y^\rho} \downarrow_\sigma \underset{\underset{[\![N[x:=\cancel{y}]]\!]}{|||}}{[\![N]\!]_{(\uparrow_\tau)_x^{\uparrow_\rho y^\rho}}} \equiv$$

09.07.2013 λ - смятане

$\lambda_y \rho\underbrace{[\![N[x:=y]]\!]_\uparrow}_{\text{ип}} \equiv \lambda_y\, \mathrm{lnf}(N[x:=y]) \equiv \mathrm{lnf}(M).$

2) $M^{\mu} \equiv x\vec{N}^{\vec{\rho}}$

$\downarrow_\mu([\![x\vec{N}]\!]_\uparrow) = [\![x\vec{N}]\!]_\uparrow = [\![x]\!]_\uparrow([\![N_1]\!]_\uparrow)\dots([\![N_n]\!]_\uparrow) =$

$= \uparrow x([\![N_1]\!]_\uparrow)\dots([\![N_n]\!]_\uparrow) \underset{\text{лема 1}}{=} \downarrow_\mu(x(\downarrow[\![N_1]\!]_\uparrow)(\downarrow[\![N_2]\!]_\uparrow)\dots(\downarrow[\![N_n]\!]_\uparrow)) =$

$\underset{\text{ип}}{=} x(\mathrm{lnf}(N_1))(\mathrm{lnf}(N_2))\dots(\mathrm{lnf}(N_n)) = \mathrm{lnf}(M).$

Безименни термове (с тип) – Λ_n^τ

1) $i^\tau \in \Lambda_n^\tau$, ако $0 \le i < n$

2) $M^{\rho\Rightarrow\sigma} \in \Lambda_n^{\rho\Rightarrow\sigma}$, $N^\rho \in \Lambda_n^\rho$, то

$(M^{\rho\Rightarrow\sigma}N^\rho)^\sigma \in \Lambda_n^\sigma$

3) $M^\sigma \in \Lambda_{n+1}^\sigma$, то $(\lambda_\rho M^\sigma)^{\rho\Rightarrow\sigma} \in \Lambda_n^{\rho\Rightarrow\sigma}$.

~~$\lambda_x x(\lambda_y y x(y)$~~) $\lambda_x x(\lambda_y y x)$

$\lambda 0 (\lambda 0 1)$

$(\lambda M)N \xrightarrow{\beta} \uparrow^{-1} M[0:=\uparrow N]$

Def: Термово семейство (term family) наричаме функция, която по дадено естествено число дава терм.

$f^\tau : \mathbb{N} \to \Lambda^\tau$

16.04.2013

λ-смятане

Нормализация чрез оценяване

$\{N \longrightarrow \Lambda^{\mu}_{\cancel{n}}\}_{\mu}$ – термови семейства (фамилия) носител на модела

Работим с безименни термове:

- $i^{\tau} \in \Lambda^{\tau}_{n}$, ако $0 \le i < n$ (Λ^{τ}_{0} – всички затворени термове)
- $\left.\begin{array}{l} M^{\rho\Rightarrow\sigma} \in \Lambda^{\rho\Rightarrow\sigma}_{n} \\ N^{\rho} \in \Lambda^{\rho}_{n} \end{array}\right\}$, то $(MN)^{\sigma} \in \Lambda^{\sigma}_{n}$
- $M \in \Lambda^{\sigma}_{n+1}$, то $(\lambda_{\rho} M)^{\rho\Rightarrow\sigma} \in \Lambda^{\rho\Rightarrow\sigma}_{n}$

<u>Пример:</u> $X^{\tau}_{n}(k) \leftrightharpoons (k-n)^{\tau}$

$(\lambda\lambda\, 0\, 1 \iff \lambda_x \lambda_y\, y\, x)$

$(\lambda x_1 \lambda x_2 \dots \lambda x_n \dots$

<u>Деф.:</u> $(f_1 f_2)(k) \leftrightharpoons f_1(k)\, f_2(k)$ $\Big\}$ $[\![\mu]\!] \leftrightharpoons N \longrightarrow \Lambda^{\mu}$

$\downarrow_{\tau} : [\![\tau]\!] \longrightarrow (N \to \Lambda^{\tau})$

$\uparrow_{\tau} : (N \to \Lambda^{\tau}) \longrightarrow [\![\tau]\!]$

~~$\downarrow_{\mu}(a)(k) \leftrightharpoons$~~

- $\downarrow_{\mu}(f) \leftrightharpoons f$
- $\uparrow_{\mu}(f) \leftrightharpoons f$
- $\downarrow_{\rho\Rightarrow\sigma}(\underset{[\![\sigma]\!]^{[\![\rho]\!]}}{\underset{\Cap}{a}})(k) \leftrightharpoons \lambda \downarrow_{\sigma}(\underbrace{a(\underset{[\![\rho]\!]}{\underset{\Cap}{\uparrow_{\rho} X^{\rho}_{k+1}}})}_{\in [\![\sigma]\!]})(k+1)$

- $\uparrow_{\rho\Rightarrow\sigma}(\overset{\rho\Rightarrow\sigma}{f})(a) \leftrightharpoons \uparrow_\sigma(f(\downarrow_\rho a))^{[\![\sigma]\!]}$

<u>Лема:</u> $\uparrow_{\vec\rho\Rightarrow\sigma}(f)(a_1)(a_2)\dots(a_n) = \uparrow_\sigma(f(\downarrow_{\rho_1}a_1)(\downarrow_{\rho_2}a_2)\dots(\downarrow_{\rho_n}a_n))$

$$\vec\rho\Rightarrow\sigma \leftrightharpoons \rho_1\Rightarrow\rho_2\Rightarrow\rho_3\Rightarrow\dots\Rightarrow\rho_n\Rightarrow\sigma$$

<u>Лема:</u> Ако M е в дълга β-нормална форма (lnf), то:

1) $M \equiv \lambda N$, N е в lnf
2) $M \equiv x\vec{N}$, x е от тип $\vec\rho\Rightarrow\mu$, $\vec{N}$ са в lnf.

$$\downarrow[\![M]\!]_\uparrow \equiv lnf(M)$$

<u>Оценка за безименни термове:</u> $\xi_\tau : \mathbb{N} \to [\![\tau]\!]$

$[\![i^\tau]\!]_\xi \leftrightharpoons \xi(i)$

$[\![MN]\!]_\xi \leftrightharpoons [\![M]\!]_\xi([\![N]\!]_\xi)$

$[\![\lambda M]\!]_\xi(a) \leftrightharpoons [\![M]\!]_{\xi a}$

ξa – модифицирана оценка

$$\xi a \leftrightharpoons \begin{cases} a, & i=0\\ \xi(i-1), & i>0\end{cases}$$

$$\xi_{n,\tau}(k) \leftrightharpoons \uparrow_\tau x^\tau_{n-k}$$

~~Твърдение~~

<u>Теорема за коректност:</u> $\downarrow_\tau([\![M]\!]_{\xi_n})(n) \equiv lnf(M)$

<u>Доказателство:</u>

Достатъчно е да докажем за термове в lnf, тъй като $[\![M]\!]_\xi \equiv [\![lnf(M)]\!]_\xi$.

Б.О.О. M е в lnf.

16.04.2013

λ-смятане

Нормализация чрез оценяване

$\{N \to \Lambda^{\mu}_{\cancel{n}}\}_{\mu}$ – термови семейства (фамилия) носител на модела

Работим с безименни термове:

- $i^{\tau} \in \Lambda^{\tau}_{n}$, ако $0 \leq i < n$ (Λ^{τ}_{0} – всички затворени термове)
- $\left.\begin{array}{l} M^{\rho \Rightarrow \sigma} \in \Lambda^{\rho \Rightarrow \sigma}_{n} \\ N^{\rho} \in \Lambda^{\rho}_{n} \end{array}\right\}$, то $(MN)^{\sigma} \in \Lambda^{\sigma}_{n}$
- $M \in \Lambda^{\sigma}_{n+1}$, то $(\lambda_{\rho} M)^{\rho \Rightarrow \sigma} \in \Lambda^{\rho \Rightarrow \sigma}_{n}$

<u>Пример:</u> $X^{\tau}_{n}(k) \leftrightharpoons (k-n)^{\tau}$

$(\lambda\lambda 0 1 \Longleftrightarrow \lambda_x \lambda_y y x)$

$(\lambda x_1 \lambda x_2 \ldots \lambda x_n \ldots$

<u>Деф.:</u> $(f_1 f_2)(k) \leftrightharpoons f_1(k)\, f_2(k)$

$\downarrow_{\tau} : \llbracket \tau \rrbracket \longrightarrow (N \to \Lambda^{\tau})$

$\uparrow_{\tau} : (N \to \Lambda^{\tau}) \longrightarrow \llbracket \tau \rrbracket$

$\Big\}\ \llbracket \mu \rrbracket \leftrightharpoons N \to \Lambda^{\mu}$

~~$\downarrow_{\mu}(a)(k) \leftrightharpoons$~~

- $\downarrow_{\mu}(f) \leftrightharpoons f$
- $\uparrow_{\mu}(f) \leftrightharpoons f$
- $\downarrow_{\rho \Rightarrow \sigma}(\underset{\llbracket \sigma \rrbracket^{\llbracket \rho \rrbracket}}{\underset{\cap}{a}})(k) \leftrightharpoons \lambda \downarrow_{\sigma} \underbrace{\Big(a\big(\underset{\llbracket \rho \rrbracket}{\underset{\cap}{\uparrow_{\rho} X^{\rho}_{k+1}}}\big)\Big)}_{\in \llbracket \sigma \rrbracket}(k+1)$

16.04.2013 λ-смятане

I сл. $M \equiv k\vec{N}$ $\sigma \equiv \vec{\rho} \Rightarrow \mu$

$\downarrow_{\mu}(\llbracket k\vec{N}\rrbracket_{\xi_n})(n) \equiv$ [illegible] $(\llbracket k\rrbracket_{\xi_n}(\llbracket N_1\rrbracket_{\xi_n})(\llbracket N_2\rrbracket_{\xi_n})\dots(\llbracket N_\ell\rrbracket_{\xi_n}))(n) \equiv$

$|||$

$\xi_n(k) \equiv \uparrow_\sigma x^\sigma_{n-k}$

~~$\equiv \uparrow_\sigma \llbracket k\rrbracket_{\xi_n}(\downarrow_{\rho_1}\llbracket N_1\rrbracket_{\xi_n})(\downarrow_{\rho_2}\llbracket N_2\rrbracket_{\xi_n})\dots(\downarrow_{\rho_\ell}\llbracket N_\ell\rrbracket_{\xi_n})(n) \equiv$~~

~~$\equiv \uparrow_\sigma(\llbracket k\rrbracket_{\xi_n})(n)(\downarrow_{\rho_1}\llbracket N_1\rrbracket_{\xi_1})(n)\dots(\downarrow_{\rho_\ell}\llbracket N_\ell\rrbracket_{\xi_n})(n)$~~

~~$|||$ по и.п. N_1 $|||$ по и.п. N_ℓ~~

~~$\equiv \uparrow_\mu x^\sigma_{n-k}(\downarrow_{\rho_1}\llbracket N_1\rrbracket_{\xi_n}(n))\dots(\downarrow_{\rho_\ell}\llbracket N_\ell\rrbracket_{\xi_n}(n))$~~

~~$|||$ и.п. N_1 $|||$ и.п. N_ℓ~~

$\equiv \uparrow_\mu(x^\sigma_{n-k}(n)(\downarrow_{\rho_1}\llbracket N_1\rrbracket_{\xi_n}(n))\dots(\downarrow_{\rho_\ell}\llbracket N_\ell\rrbracket_{\xi_n}(n))) \equiv k\vec{N}.$

$|||$ $|||$ по и.п. $|||$ по и.п.

$n-(n-k)$ N_1 N_ℓ

$|||$

k

II сл. [illegible] $(\downarrow_{\rho\Rightarrow\sigma}\llbracket\lambda_\rho N^\sigma\rrbracket_{\xi_n})(n) \equiv \lambda\downarrow_\sigma(\llbracket\lambda_\rho N^\sigma\rrbracket_{\xi_n}(\uparrow_\rho x^\rho_{n+1}))(n+1) \equiv$

$\equiv \lambda\downarrow_\sigma(\llbracket N\rrbracket^\sigma_{\xi_n^{\overset{\in\llbracket\rho\rrbracket}{\uparrow_\rho x_{n+1}}}})(n+1) \overset{\equiv}{\text{и.п.}} \lambda N$

$= \xi_{n+1}(0)$

[illegible] $\xi_n^{\uparrow_\rho x_{n+1}}(i) \leftrightharpoons \begin{cases} \uparrow_\rho x^\rho_{n+1}, & i=0 \\ \xi_n(i-1), & i>0 \end{cases}$

$\|$ $\|$

[illegible] $\xi_{n+1}(i)$ $\uparrow x_{n-i+1}$

$\|$

$\xi_{n+1}(i)$

[illegible] $\xi_n^{\uparrow_\rho x_{n+1}} = \xi_{n+1}$

Теория на доказателствата

$\mathcal{L} = \langle C, F, P \rangle$

Var – изброимо мн-во от променливи

C – константи
F – функционални символи
P – предикатни символи

} крайни множества

Def: (Терм):

1) $c \in C$ е терм
2) $x \in Var$ е терм
3) $f(t_1, \dots, t_n)$ е терм, ако $f \in F$ е n-местен ~~предикатен~~ функционален символ и $t_1, \dots, t_n$ – термове

Def: формула:

1) $p(t_1, \dots, t_n)$ е атомарна формула
$p \in P$ е n-местен предикатен символ;
$t_1, \dots, t_n$ – термове
2) $A \to B$, $A \land B$, $A \lor B$ е формула, ако A и B са формули
3) $\forall_x A$, $\exists_x A$ – формули, ако $x \in Var$, A – формула.

Ще считаме, че имаме 0-местен предикатен символ $\bot \in P$. (bottom)

$\neg A \leftrightharpoons A \to \bot$

$\tilde{\exists}_x A \leftrightharpoons \neg \forall_x \neg A$ (слабо съществуване)
(различава се със ∃ при интуиционистката логика)

16.04.2013 λ - смятане

Логически системи:

1) Минимална логика
2) Интуиционистка логика (конструктивна)
3) Класическа логика.

(*Забележка: Колкото по-надолу е логиката, толкова по-силна е тя (Има повече теореми)).

3) $\neg\neg A \to A$ (стабилност в класическата логика)

2) $\bot \to A$ (в интуиционистката логика; efq)

Хилбертови системи (аксиоматични)

$\to$) $A \to (B \to A)$

$(A \to (B \to C)) \to (A \to B) \to (A \to C)$

$\wedge$) $A \to B \to A \wedge B$ ~~$A \wedge B$~~ -

$A \wedge B \to A$

$A \wedge B \to B$

$\vee$) $A \to A \vee B$

$B \to A \vee B$

$(A \vee B \to C) \to (A \to C) \to (B \to C) \to C$

$\forall$) $\forall_x A \to A[x := t]$

$\forall_x (B \to A) \to (B \to \forall_x A)$, ако $x \notin FV(B)$

$\exists$) $A[x := t] \to \exists_x A$

$\forall_x (A \to B) \to (\exists_x A \to B)$, ако $x \notin FV(B)$

Хилбертова аксиоматична система за минималната логика — H_m.

$$H_i \leftrightharpoons H_m + \underbrace{\bot \to A}_{\text{аксиома}}$$

$$H_c \leftrightharpoons H_m + (\underbrace{\neg\neg A \to A}_{\text{аксиома}})$$

H_c разширение ли е на H_i?

$$((A \to \bot) \to \bot) \to A$$

$$\bot \to A.$$

Def. Нека Γ е ~~редица~~ множество от формули (контекст)

$\Gamma \vdash_{i,m,c} A$, ако:

1) $A \in \Gamma$ (
2) $A \in H_m$ (H_i, H_c) (А е аксиома)
3) $\Gamma \vdash B \to A$ и $\Gamma \vdash B$, за някоя ф-ла B.
4) $\Gamma \vdash B$ и $x \notin FV(\Gamma)$ и $A \equiv \forall x B$.

Задача: $\neg\neg A \to A \vdash_m \bot \to A$ (Класическата логика разширява интуиционистката)

$$((A \to \bot) \to \bot) \to A \vdash_m \bot \to A$$

Ще докажем първо $\bot \vdash_m (A \to \bot) \to \bot$

$\vdash \bot \to (A \to \bot) \to \bot$ (аксиома 1)

(1) $\bot \vdash \bot \to (A \to \bot) \to \bot$ (разширяване)

(2) $\bot \vdash \bot$ (аксиома)

(1) (2) по MP: $\bot \vdash (A \to \bot) \to \bot$

~~[illegible]~~ $A \vdash B$, то $B \to C \vdash A \to C$

16.04.2013

λ - смятане

$\vdash \bot \to (A \to \bot) \to \bot$ (аксиома $\overset{Ax1}{}$ 1 $A = \bot$; $B = \neg A$

$\neg\neg A \to A \vdash \bot \to (A \to \bot) \to \bot$ (1)

$\vdash (\neg\neg A \to A) \to (\bot \to (\neg\neg A \to A))$ (Ax1 $\neg\neg A \to A$, $\bot$)

$\neg\neg A \to A \vdash \neg\neg A \to A$

$\neg\neg A \to A \vdash \bot \to (\neg\neg A \to A)$ (MP)

$\neg\neg A \to A \vdash (\bot \to (\neg\neg A \to A)) \to (\bot \to \neg\neg A) \to (\bot \to A)$

(Ax2 ($\bot$, $\neg\neg A$, A))

$\neg\neg A \to A \vdash (\bot \to \neg\neg A) \to (\bot \to A)$ (MP)

$\neg\neg A \to A \vdash \bot \to A$ (MP)

$K: \alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \alpha$ (Ax1)

$S: (\alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)$ (Ax2)

} като термове в λ-смятането

Задачи:

① $\vdash_m A \to \neg\neg A$

② $\vdash_c ((A \to B) \to A) \to A$ (Закон на Пиърс)

③ $\vdash_c \exists_x A \longleftrightarrow \tilde{\exists}_x A$

④ $\vdash_m \neg(A \vee B) \longleftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

⑤ $\vdash_c A \vee B \longleftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$

{ B вместо $\bot$ }

① $\Longleftrightarrow \vdash_m A \to ((A \to B) \to B)$

$\vdash_m A \to (A \to \bot) \to \bot$

① $A \vdash_m \neg\neg A$

– <u>домашно:</u> ① и ③

23.04.2013 λ - смятане

Секвенциално смятане (Sequent calculus)

G1[m i c]

G3[m i c]

Деф: $\Gamma \Rightarrow \Delta$ наричаме секвенти, където Γ, Δ са мултимножества от формули. $\left(\bigvee_{A\in\Gamma} A \to \bigvee_{B\in\Delta} B\right)$

G1c A_x: $A \Rightarrow A$ $\quad$ $L\bot$: $\bot \Rightarrow$

Структурни правила:

LW: $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ left-weakening $\qquad$ RW: $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$ right weakening

LC: $\dfrac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ left contraction $\qquad$ RC: $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$ right contraction

---

Логически правила:

$L_i\wedge$ $\dfrac{A_i, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $i=0,1$ $\qquad$ $R\wedge$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \;;\; \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$

$L\vee$ $\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \;;\; B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $R_i\vee$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_i}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_0 \vee A_1}$ $i=0,1$

$L\to$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \;;\; B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \to B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $R\to$ $\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B}$

$L\forall$ $\dfrac{A[x:=t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $R\forall$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A}$ $x \notin FV(\Gamma\Delta)$

$L\exists$ $\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $x \notin FV(\Gamma\Delta)$ $\qquad$ $R\exists$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x:=t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A}$

Деф. Казваме, че A е изводима, ако имаме дърво на извод, което завършва в $\Rightarrow A$.

G1i: за всички възли $\Gamma \Rightarrow \Delta$, искаме Δ да се състои от най-много 1 формула.

G1m: G1i − $L\bot$ (без аксиома за $\bot$)

$\Rightarrow A \land B \to A$ (в G1m)

$$\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \text{ - аксиома.}}{A \land B \Rightarrow A}\,L\land}{\Rightarrow A \land B \to A}\,R\to$$

$\Rightarrow A \to (B \to A \land B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{A, B \Rightarrow A}\,LW \qquad \dfrac{B \Rightarrow B}{A, B \Rightarrow B}\,LW}{A, B \Rightarrow A \land B}}{A \Rightarrow B \to A \land B}\,R\to}{\Rightarrow A \to (B \to A \land B)}\,R\to$$

От предния път:

$A \lor B \to (A \to C) \to (B \to C) \to C$

Така трябва да е аксиомата

(домашно): 1) $A \to A \lor B$

2) $B \to A \lor B$

3) $(A \lor B \to C) \to (A \to C) \land (B \to C)$

23.04.2013

λ-смятане

$K : A \to B \to A$

$$R\!\to\ \dfrac{R\!\to\ \dfrac{LW\ \dfrac{A \Rightarrow W}{A, B \Rightarrow A}}{A \Rightarrow B \to A}}{\Rightarrow A \to B \to A}$$

$S : (A \to (B \to C)) \to (A \to B) \to A \to C$

$$R\!\to\ \dfrac{R\!\to\ \dfrac{R\!\to\ \dfrac{L\!\to\ \dfrac{LW\ \dfrac{A \Rightarrow A}{A, (A \to (B \to C)) \Rightarrow A} \qquad L\!\to\ \dfrac{LW\ \dfrac{A \Rightarrow A}{A, B \Rightarrow A} \quad L\!\to\ \dfrac{(*)}{(B \to C), A, B \Rightarrow C}}{B, (A \to (B \to C)), A \Rightarrow C}}{A \to (B \to C),\ \underset{\sim\sim}{A \to B},\ A \Rightarrow C}}{A \to (B \to C),\ A \to B \Rightarrow A \to C}}{A \to (B \to C) \Rightarrow (A \to B) \to A \to C}}{\Rightarrow (A \to (B \to C)) \to (A \to B) \to A \to C}$$

$$(*)\ L\!\to\ \dfrac{LW\ \dfrac{B \Rightarrow B}{A, B \Rightarrow B} \qquad LW\ \dfrac{LW\ \dfrac{C \Rightarrow C}{B, C \Rightarrow C}}{A, B, C \Rightarrow C}}{(B \to C) A, B \Rightarrow C.}$$

$\Rightarrow \forall x A \to \exists x A$

$$R\!\to\ \dfrac{R\exists\ \dfrac{L\forall\ \dfrac{A \Rightarrow A \quad (\text{тривиална субституция})}{\forall x A \Rightarrow A \quad (\text{заместване } x \text{ с } x)}}{\forall x A \Rightarrow \exists x A}}{\Rightarrow \forall x A \to \exists x A}$$

$\Rightarrow \exists x (A \to \forall x A)$

(парадоксът за пияниците)

~~$A \Rightarrow \forall x A,\ \exists x (A \to \forall x A)$~~

~~$\Rightarrow A \to \forall x A,\ \exists x (A \to \forall x A)$~~

~~$\Rightarrow \exists x (A \to \forall x A),\ \exists x (A \to \forall x A)$~~

~~$\Rightarrow \exists x (A \to \forall x A)$~~

Парадокс за пияниците

$$R\forall\ \dfrac{A[x:=c] \Rightarrow A[x:=c]\ (Ax')}{A[x:=c] \Rightarrow \forall x A}$$

$$Lw\ \dfrac{A[x:=c] \Rightarrow \forall x A}{A[x:cc], A[x:=c] \Rightarrow \forall x A}$$

$$R\to\ \dfrac{A[x:cc], A[x:=c] \Rightarrow \forall x A}{A[x:=c] \Rightarrow \exists x(A \to \forall x A)}$$

$$R\exists\ \dfrac{A[x:=c] \Rightarrow \exists x(A \to \forall x A)}{A[x:=c] \Rightarrow \exists x(A \to \forall x A)}$$

$$L\exists\ \dfrac{A[x:=c] \Rightarrow \exists x(A \to \forall x A)}{\exists x A \Rightarrow \exists x(A \to \forall x A)}$$

$$\boxed{Ax}$$

$$\dfrac{A[x:=c] \Rightarrow A[x:=c]}{A[x:=c] \Rightarrow A[x:=c], \forall x A}$$

$$\dfrac{A[x:=c] \Rightarrow A[x:=c], \forall x A}{\Rightarrow A[x:=c], A[x:=c] \to \forall x A}$$

$$\dfrac{\Rightarrow A[x:=c], A[x:=c] \to \forall x A}{\Rightarrow A[x:=c], \exists x(A \to \forall x A)} \qquad \textcircled{L_\bot}\ \dfrac{\bot \Rightarrow}{}$$

$$\dfrac{\Rightarrow \exists x A, \exists x(A \to \forall x A); \quad \bot \Rightarrow \exists x(A \to \forall x A)}{\exists x A \to \bot \Rightarrow \exists x(A \to \forall x A)}$$

Закон на Пиърс

$$RW\ \dfrac{A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A, B}$$

$$R\to\ \dfrac{A \Rightarrow A, B}{\Rightarrow A \to B, A}$$

$$L\to\ \dfrac{\Rightarrow A \to B, A \quad ; \quad A \Rightarrow A}{(A \to B) \to A \Rightarrow A}$$

$$R\to\ \dfrac{(A \to B) \to A \Rightarrow A}{\Rightarrow ((A \to B) \to A) \to A}$$

домашно:

$$(A \to B) \lor (B \to A)$$

$$\Gamma, A \Rightarrow \Delta, A \qquad \bot \Rightarrow \Delta$$

(за да премахнем правилата за отслабване променяме аксиомите)

$$Cut\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma\Gamma' \Rightarrow \Delta\Delta'}$$

$$Cut_{cs}\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

CS - context sharing

~~$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma \Rightarrow \Delta\Delta'}$ CS (context sharing)~~

Теорема: (Отстраняване на сечението):

$G1[mic] + Cut \vdash A$

$G1[mic] \vdash A$

23.07.2013

λ-смятане

$P \wedge \neg P \Rightarrow \bot$

$$\dfrac{\dfrac{P \Rightarrow P}{P \Rightarrow \bot, P}\,RW \qquad \dfrac{\bot \Rightarrow \bot}{\bot, P \Rightarrow \bot}\,LW}{P, \neg P \Rightarrow \bot}\,L\neg$$

$$L\wedge\ \dfrac{P, \neg P \Rightarrow \bot}{P \wedge \neg P, \neg P \Rightarrow \bot}$$

~~$P \wedge \neg P \Rightarrow \bot$ $\neg P, P \wedge \neg P \Rightarrow \bot$~~

$$L\wedge\ \dfrac{}{P \wedge \neg P, P \wedge \neg P \Rightarrow \bot}$$

$$LC\ \dfrac{P \wedge \neg P, P \wedge \neg P \Rightarrow \bot}{P \wedge \neg P \Rightarrow \bot}$$

правилата за контракция (LC; RC)

~~Деф. (Подформула)~~

~~1) A е подформула на $\neg A$~~

~~2) A, B са подформули на $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$.~~

~~3) $A[x:=t]$ е подформула на $\exists x A$, $\forall x A$, за произволен терм t.~~

Деф. (Подформула)

1) A е подформула на A
2) Ако A е подформула на B, то A е подформула на $B \wedge C$, $C \wedge B$, $B \to C$, $C \to B$, $B \vee C$, $C \vee B$.
3) Ако A е подформула на $B[x:=t]$, то A е подформула на $\exists x A$, $\forall x A$

за някой терм t.

Твърдение: Ако имаме извод на секвента $\Gamma \Rightarrow \Delta$ и $A \Rightarrow A$ е аксиома, използвана в извода, то A е подформула на някоя от формулите в Γ или Δ.

домашно: $A \Rightarrow A$ е изводимо в G1m от $P \Rightarrow P$, P – атом

Индукция по построението на формулата

$$\dfrac{\dfrac{p(x) \Rightarrow p(x)}{p(x) \Rightarrow \exists x p(x)}}{\exists x p(x) \Rightarrow \exists x (p(x))}$$

Пример

G3 = G1 без структурни правила

G3c: Ax: $A, \Gamma \Rightarrow \Delta, A$ (A е атомарна)

$L_\bot$: $\Gamma, \bot \Rightarrow \Delta$

Логически правила:

$$L_\wedge \ \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad R_\wedge \ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

$$L_\vee \ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad R_\vee \ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}$$

$$L_\rightarrow \ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \Delta} \qquad R_\rightarrow \ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}$$

$$L_\forall \ \frac{\forall x A, A[x:=t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad R_\forall^* \ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A}$$

$$L_\exists^* \ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad R_\exists \ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A, A[x:=t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A}$$

* – допълнително условие
($x \notin FV(\Gamma\Delta)$)

G3i – отново имаме само 1 формула отдясно

G3m = G3i – $L\bot$. (See "Basic Proof Theory" for G3i

$$\frac{}{A \Rightarrow A}$$

$$\text{LW, RW} \ \frac{A \Rightarrow A}{A[x:=c], A \Rightarrow A, \forall x A}$$

$$R\rightarrow \ \frac{A[x:=c], A \Rightarrow A, \forall x A}{A[x:=c] \Rightarrow A, A \rightarrow \forall x A}$$

$$R\exists \ \frac{A[x:=c] \Rightarrow A, A \rightarrow \forall x A}{A[x:=c] \Rightarrow A, \exists x (A \rightarrow \forall x A)}$$

$$R\forall \ \frac{A[x:=c] \Rightarrow A, \exists x (A \rightarrow \forall x A)}{A[x:=c] \Rightarrow \forall x A, \exists x (A \rightarrow \forall x A)}$$

$$R\rightarrow \ \frac{A[x:=c] \Rightarrow \forall x A, \exists x (A \rightarrow \forall x A)}{\Rightarrow A[x:=c] \rightarrow \forall x A, \exists x (A \rightarrow \forall x A)}$$

$$R\exists \ \frac{\Rightarrow A[x:=c] \rightarrow \forall x A, \exists x (A \rightarrow \forall x A)}{\Rightarrow \exists x (A \rightarrow \forall x A), \exists x (A \rightarrow \forall x A)}$$

$$RC \ \frac{\Rightarrow \exists x (A \rightarrow \forall x A), \exists x (A \rightarrow \forall x A)}{\Rightarrow \exists x (A \rightarrow \forall x A)}$$

23.03.2013

λ-смятане

Системи за естествен извод

Изводът са дървета от формули (а не от секвенти). Листата в този извод имат етикети и различните формули имат различни етикети. Етикетите са изброимо множество.

Nm

A^u – листо (четем нека е дадено A)

маркираме всички ~~листа~~ с някой етикет $\underline{\underline{u}}$, чиято ф-ла е $\underline{\underline{A}}$

$$\to_i \quad \dfrac{\begin{array}{c}[A^u]\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \to B}\,u$$

ако имаме B при допускане от вида „нека е дадено A^u", то имаме $A \to B$ без това допускане

$$\to_e \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A \to B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ A\end{array}}{B}$$

$$\wedge_i \quad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ B\end{array}}{A \wedge B}$$

$$\wedge_e \quad \dfrac{A_0 \wedge A_1}{A_0} \qquad \wedge_e \quad \dfrac{A \wedge A_1}{A_1}$$

маркираме всички листа с етикети $\underline{\underline{u}}$ и $\underline{\underline{v}}$

$$\vee_i^0 \quad \dfrac{A_0}{A_0 \vee A_1} \qquad \vee_i^1 \quad \dfrac{A_1}{A_0 \vee A_1} \qquad \vee_e \quad \dfrac{A \vee B \qquad \begin{array}{c}[A^u]\\ \vdots\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B^v]\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\,u, v$$

~~$A \vee B$~~

$$\forall_i \quad \dfrac{A}{\forall x A}\,x$$

($x \notin FV(A^u)$; A^u, които не са маркирани)

$$\forall_e \quad \dfrac{\forall x A \qquad t}{A[x := t]}$$

маркираме всички листа с етикет $\underline{\underline{u}}$

$$\exists_i \quad \dfrac{A[x := t]}{\exists x A} \qquad \exists_e \quad \dfrac{\exists x A \qquad \begin{array}{c}[A[x:=t]^u]\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\,x, u$$

$x \notin FV(C)$

$x \notin FV(B^v)$

B^v, които не са маркирани

$$N_i = N_m + \dfrac{\bot}{A}$$

$$N_c = N_m + \dfrac{\begin{matrix}[\neg A^{u}] \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{A}\,u$$

маркиране всички места с етикет u

---

① $A \to (B \to A)$?

$$\dfrac{\dfrac{A^{u}}{B \to A}\,v}{A \to (B \to A)}\,u$$

Деф. (Изводима ф-ка)

Формулата A наричаме изводима, ако имаме ~~изв~~ извод с корен A, в който всички места са маркирани

② $$\dfrac{\dfrac{A_0 \wedge A_1^{u}}{A_0}}{A_0 \wedge A_1 \to A_0}\,u$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A_0^{u} \qquad A_1^{v}}{A_0 \wedge A_1}}{A_1 \to A_0 \wedge A_1}\,v}{A_0 \to A_1 \to A_0 \wedge A_1}\,u$$

③ $$\dfrac{\dfrac{A_0^{u}}{A_0 \vee A_1}}{A_0 \to A_0 \vee A_1}\,u$$

$A \vee B \to (A \to C) \to (B \to C) \to C$

$$\dfrac{A \vee B^{q} \qquad \dfrac{A^{u} \qquad A \to C^{t}}{C} \qquad \dfrac{B^{v} \qquad B \to C^{p}}{C}}{C}\,u, v$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{C}{(B \to C) \to C}\,p}{(A \to C) \to (B \to C) \to C}\,t}{A \vee B \to (A \to C) \to (B \to C) \to C}\,q$$

④ $\forall x(A \to B) \longleftrightarrow (\exists x A \to B)$ $x \notin FV(B)$

⇒) $\forall x(A \to B) \to (\exists x A \to B)$

$$\dfrac{\exists x A^{u} \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x(A \to B)^{v}}{A \to B}x \qquad A^{w}}{B}}{B}\, w, x$$

$$\dfrac{\dfrac{B}{\exists x A \to B}\,u}{\forall x(A \to B) \to (\exists x A \to B)}\,v$$

⇐) $(\exists x A \to B) \to \forall x(A \to B)$

$$\dfrac{\exists x A \to B^{u} \qquad \dfrac{A^{v}}{\exists x A}}{}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B}{A \to B}\,v}{\forall x(A \to B)}\,x}{(\exists x A \to B) \to \forall x(A \to B)}\,u$$

14.05.2013

λ-смятане

①

$\vdash_m A \to \neg\neg A$ $\qquad$ $\nvdash_m \neg\neg A \to A$

$A \to (A \to \bot) \to \bot$ $\qquad$ $\vdash_c \neg\neg A \to A$

$$\left.\dfrac{\dfrac{\dfrac{A^{u} \qquad (A\to\bot)^{v}}{\bot}\,MP}{(A\to\bot)\to\bot}\,v}{A\to(A\to\bot)\to\bot}\,u\right\} \leftrightharpoons P$$

②

$\vdash_m \neg\neg\neg A \to \neg A$

$(((A\to\bot)\to\bot)\to\bot) \to A \to \bot$

~~$(((A\to\bot)\to\bot)\to\bot)$~~

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(((A\to\bot)\to\bot)\to\bot)^{w} \qquad \begin{matrix} A^{u} \\ \mid P \\ ((A\to\bot)\to\bot) \end{matrix}}{\bot}}{A\to\bot}\,u}{(((A\to\bot)\to\bot)\to\bot)\to A\to\bot}\,w$$

домашно: $\neg(A\vee B) \longleftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
$\vdash_m$

$\vdash_c A \tilde{\vee} B \longleftrightarrow A \vee B$, където
$A \tilde{\vee} B \leftrightharpoons \neg(\neg A \wedge \neg B)$

③ $\neg\neg(A\to B)\to(\neg\neg A\to\neg\neg B)$

$$\vdash_m ((A\to B)\to\bot)\to\bot\to(((A\to\bot)\to\bot)\to(B\to\bot)\to\bot)$$

$$(((A\to B)\to\bot)\to\bot)^u \quad ((A\to\bot)\to\bot)^v \quad (B\to\bot)^w$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{((A\to\bot)\to\bot)^v \quad \dfrac{\dfrac{(B\to\bot)^w \quad \dfrac{A^t \quad (A\to B)^s}{B}}{\bot}}{A\to\bot}\,t}{\dfrac{\bot}{(B\to\bot)\to\bot}\,w}}{((A\to\bot)\to\bot)\to(B\to\bot)\to\bot}\,v}{(((A\to B)\to\bot)\to\bot)\to((A\to\bot)\to\bot)\to(B\to\bot)\to\bot}\,u$$

④ $\vdash_i (\neg\neg A\to\neg\neg B)\to\neg\neg(A\to B)$

$$\dfrac{\neg(A\to B)^u \qquad \neg\neg A\to\neg\neg B}{\bot}$$

$$(A\to B)\to\bot^u \qquad ((A\to\bot)\to\bot)\to(B\to\bot)\to\bot^v$$

14. 05. 2013

λ - смятане

$$\dfrac{A \to \bot^{s} \quad A^{p}}{\bot} \quad ⓘ$$

A^{t}

$$(A \to B) \to \bot^{u} \quad \dfrac{B}{A \to B}\, p$$

$$\dfrac{\dfrac{((A \to \bot) \to \bot) \to (B \to \bot) \to \bot^{v} \quad \dfrac{\bot}{A \to \bot \to \bot}\, s}{(B \to \bot) \to \bot} \quad \dfrac{\dfrac{(A \to B) \to \bot^{u} \quad \dfrac{B^{w}}{A \to B}\, t}{\bot}}{B \to \bot}\, w}{\dfrac{\dfrac{\bot}{\neg\neg(A \to B)}\, u}{(\neg\neg A \to \neg\neg B) \to \neg\neg(A \to B)}\, v}$$

⑤ $\vdash_{m} \quad \neg\neg\forall x A \to \forall x \neg\neg A$

$$((\forall x A \to \bot) \to \bot) \to \forall x ((A \to \bot) \to \bot)$$

$$(\forall x A \to \bot) \to \bot^{u} \quad A \to \bot^{v} \quad \forall x A^{w}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x A \to \bot) \to \bot^{u} \quad \dfrac{\dfrac{A \to \bot^{v} \quad \dfrac{\forall x A^{w}}{A}\, x}{\bot}}{\forall x A \to \bot}\, w}{\bot}}{\dfrac{(A \to \bot) \to \bot}{\forall x \neg\neg A}\, x}\, v}{\neg\neg\forall x A \to \forall x \neg\neg A}\, u$$

⑥ $\vdash_c \tilde{\exists} x A \longleftrightarrow \exists x A$

$\exists x A \leftrightharpoons \neg\forall x \neg A$

$$\dfrac{A[x:=t]}{\exists x A}$$

$$\dfrac{\exists x A \qquad \begin{matrix} A^u \\ \vdots P \\ C \end{matrix}}{C}\,u,x$$

x не е свободна в отворените допускания на P с изкл. на A

→)

$\vdash_c ((\forall x(A\to\bot)\to\bot)\to\exists x A$

←)

$\vdash_c \exists x A \to \forall x(A\to\bot)\to\bot$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists x A^u \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x(A\to\bot)^v}{A\to\bot}\qquad A^w}{\bot}}{\bot}\,w,x}{\forall x(A\to\bot)\to\bot}\,v}{\exists x A\to(\forall x(A\to\bot)\to\bot)}\,u$$

→) $(\forall x(A\to\bot)\to\bot)^u \qquad \exists x A\to\bot^v \qquad A^w$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\bot}}{A\to\bot}\,w}{\forall x(A\to\bot)}\,x}{\bot}}{A}\,v}{\exists x A}$$

14.05.2013

λ-смятане

Brouwer — Heyting — Kolmogorov

1) атомарна формула: вярна логически без да е нужен свидетел

2) $A \to B$: от всеки свидетел за A трябва да можем да построим свидетел за B.

3) $A \wedge B$: да имаме свидетел за A и свидетел за B

4) $A \vee B$: да имаме свидетел за A или за B и да знаем за кое от двете

5) $\forall x A$: ~~по~~ всеки затворен терм x да можем да построим свидетел за A. (зависещ от x)

6) $\exists x A$: да имаме свидетел t за x и свидетел за $A[x:=t]$.

Изоморфизъм на Curry-Howard

$$\dfrac{\begin{matrix}\mid M \\ A \to B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mid N \\ A\end{matrix}}{B} \quad \rightsquigarrow \quad M(N)$$

$$\dfrac{\begin{matrix}A^{u} \\ \mid M \\ B\end{matrix}}{A \to B} \quad \rightsquigarrow \quad \lambda u M$$

доказателства	термове
етикет на допускане(ия)	променлива (x)
импликация (→)	функция (⇒)
модус-поненс	апликация MN
освобождаване от допускане	абстракция $\lambda_x M$
формула	тип
атомарна формула	базов тип
аксиоми	константи
редукция	β-редукция
нормално доказателство	нормален терм
формула да е доказуема	типът да е населен
търсим доказателство	търсим затворен терм от даден тип

28.05.2013

λ- смятане

$$M ::= \underbrace{u^A \mid (\lambda_{u^A} M^B)^{A\to B} \mid (M^{A\to B} N^A)^B \mid (\lambda_{x^\rho} M^A)^{\forall x^\rho A}_{(*)} \mid (M^{\forall x^\rho A} t^\rho)^{A[x:=t]}}_{\to,\ \forall}$$

$$\wedge^+_{A,B} : A \to B \to A \wedge B \mid \wedge^-_{A,B,C}\ A\wedge B \to (A \to B \to C) \to C \mid$$

$$\vee^{+,1}_{A,B} : A \to A \vee B \mid \vee^{+,2}_{A,B} : B \to A \vee B \mid \vee^-_{A,B,C} : A \vee B \to (A \to C) \to (B \to C) \to C \mid$$

$$\exists^+_A : \forall x^\rho (A \to \exists x^\rho A) \mid \exists^-_{x,A,C} : \exists x^\rho A \to \forall x^\rho (A \to C) \to C \underset{(*)\ x \notin FV(C)}{} \mid$$

$$\underbrace{efq_A : \bot \to A}_{i} \qquad \underbrace{stab_A : \neg\neg A \to A}_{c} \ (\text{стабилност})$$

<u>Твърдение:</u> Нека A е формула, в която не участват $\vee, \exists$. Тогава $\{stab_{R(\vec{x})}\} \vdash_m stab_A$

<u>Доказателство:</u> Индукция по A.

1) A - атомарна
   $A \equiv R(\vec{x})$ ✓

2) $A \equiv B \to C$. $M : \neg\neg B \to B$, $N : \neg\neg C \to C$
   По и.п. имаме доказателства

Искаме да построим $P : \neg\neg A \to A \equiv \neg\neg(B \to C) \to B \to C$

$$P \leftrightharpoons \lambda_{u^{\neg\neg(B\to C)}, v^B}\ N(\lambda_{w^{\neg C}}\, u\,(\lambda_{z^{B\to C}}\, w^{C\to\bot}(z\,v)))$$

$$P \leftrightharpoons \lambda_{u,v}\, N(\lambda_w\ u(\lambda_z\ w(z\,v)))$$

3) $A \equiv \forall x B$ $\quad \underset{|||}{(B \to \bot)} \to \bot$

По и.п. $\quad M : \neg\neg B \to B$

$$P^{\neg\neg \forall x B \to \forall x B} \leftrightharpoons \lambda_{\underset{(\forall x B \to \bot) \to \bot}{u^{\neg\neg \forall x B}}}, x\, M(\lambda_{v^{\neg B}}\, u(\lambda_{w^{\forall x B}}\, v(wx)))$$

$$P \leftrightharpoons \lambda_{u,x}\, M(\lambda_v\, u(\lambda_w\, v(wx)))$$

4) $A \equiv B \wedge C$ $\quad$ ~~$<M,N> \leftrightharpoons \wedge^{+}_{A,B} MN$; $M_L \leftrightharpoons \wedge^{-}$~~

По и.п. $\quad M : \neg\neg B \to B \quad N : \neg\neg C \to C$

$$P^{\neg\neg(B \wedge C) \to B \wedge C} \leftrightharpoons \lambda_{u^{\neg\neg(B\wedge C)}} < M(\lambda_{v_B^{\neg B}}\, u(\lambda_{w^{B \wedge C}}\, v_B(w_L))), N(\lambda_{v_C^{\neg C}}\, u(\lambda_{w^{B\wedge C}}\, v_C(w_{\lrcorner})))>$$

$$<M,N> \leftrightharpoons \wedge^{+}_{A,B} MN$$

$$M_L \leftrightharpoons \wedge^{-}_{A,B,A} M(\lambda_{u,v}\, u)$$

$$M_{\lrcorner} \leftrightharpoons \wedge^{-}_{A,B,B} M(\lambda_{u,v}\, v)$$

~~5)~~ $P^{\neg\neg(B \vee C) \to B \vee C} \leftrightharpoons \lambda_{u^{\neg\neg(B\vee C)}}\, \vee^{+,1}_{B,C} (M(\lambda_{v^{\neg B}}\, u(\lambda_{w^{B \vee C}}\, \vee^{-}_{B,C,\bot} (w\, v(\lambda_{z^C}$ — . —

Не работи

~~6)~~ $A \equiv \exists x B$

$M : \neg\neg B \to B$

$$P^{\neg\neg \exists x B \to \exists x B} \leftrightharpoons \lambda_{u^{\neg\neg \exists x B}} < d, M[x := d](\lambda_{v^{\neg B[x:=d]}}\, u(\lambda_{w^{\exists x B}}\, \exists^{-}_{x,B,\bot} w(\lambda_{x,z^B}$$

Не работи

$$<t, M> \leftrightharpoons \exists^{+}_{A}\, t M$$

28.05.2013

λ- смятане

<u>Деф:</u> A^g - Gödel-Gentzen транслация:

1) $(P(\vec{x}))^g \leftrightharpoons \neg\neg P(\vec{x})$

2) $\bot^g \leftrightharpoons \bot$

3) $(A \to B)^g \leftrightharpoons A^g \to B^g$

4) $(\forall x A)^g \leftrightharpoons \forall x A^g$

5) $(A \wedge B)^g \leftrightharpoons A^g \tilde{\wedge} B^g$

6) $(A \vee B)^g \leftrightharpoons A^g \tilde{\vee} B^g$

7) $(\exists_x A)^g \leftrightharpoons \tilde{\exists}_x A^g$

$A \tilde{\wedge} B \leftrightharpoons (A \to B \to \bot) \to \bot$

$A \tilde{\vee} B \leftrightharpoons (A \to \bot) \to (B \to \bot) \to \bot$

$\tilde{\exists}_x A \leftrightharpoons (\forall x (A \to \bot)) \to \bot$

домашно:

[illegible] $\vdash_c \tilde{\wedge}^+, \tilde{\wedge}^-$

[illegible] $\vdash_c \tilde{\vee}^{+,1}, \tilde{\vee}^{+,2}, \tilde{\vee}^-$

[illegible] $\vdash_c \tilde{\exists}^+, \tilde{\exists}^-$

~~участват само~~ [illegible]

формулите използват само →, ∀.

$\mathcal{P}: \forall x (A \to \tilde{\exists}_x A) \equiv \forall x (A \to (\forall x (A \to \bot) \to \bot))$

$\mathcal{P} \leftrightharpoons \lambda_{x}, u^A, v^{\forall x (A \to \bot)}\, v x u$

$\lambda_{x,u,v}\, v x u$

$\mathcal{P}: \tilde{\exists}_x A \to \forall x (A \to C) \to C \equiv (\forall x (A \to \bot) \to \bot) \to \forall x (A \to C) \to C$

$x \notin FV(C)$

$\mathcal{P} \leftrightharpoons \lambda_{u^{\tilde{\exists}_x A}, v^{\forall x (A \to C)}}\, stab_C (\lambda_{w^{\neg C}}\, u (\lambda_{x, z^A}\, w(v(xz))))$

<u>Наблюдение:</u> В A^g участват само →, ∀.

$(\neg A)^g \equiv (A \to \bot)^g \equiv A^g \to \bot^g \equiv \neg A^g$

Лема 1 $\vdash_m \neg\neg A^g \to A^g$

Доказателство: По твърдението имаме ~~stab A~~ $stab_{A^g}$ от $stab_{R(\vec{x})}$. – не върши работа

Индукция по A:

1) $\mathcal{P}^{\neg\neg\neg\neg P(\vec{x}) \to \neg\neg P(\vec{x})}$

$$\leftrightharpoons \lambda_{u^{\neg^4 P(\vec{x})}, v^{\neg P(\vec{x})}} u\left(\lambda_{w^{\neg\neg P(\vec{x})}} w v\right)$$

$$\leftrightharpoons \lambda_{u,v} u(\lambda_w w v).$$

$(\bot \to \bot) \to \bot$

$\equiv$

2) $\mathcal{P}^{\neg\neg\bot \to \bot} \leftrightharpoons \lambda_{u^{\neg\neg\bot}} u(\lambda_{v^\bot} v)$

3) и 4) аналогично на твърдението

5), 6), 7) работят аналогично на домашното

Теорема 1: $\Gamma \vdash_c A$, то $\Gamma^g \vdash_m A^g$

Доказателство: С индукция по M^A построяваме $\overline{M}^{A^g}$.

$FA(M) \subseteq \Gamma$ FA – свободни допускания ~~[illegible]~~

$FA(\overline{M}) \subseteq \Gamma^g$ $\Gamma^g = \{A^g \mid A \in \Gamma\}$.

1) $M \equiv u^A$ $\overline{M} \leftrightharpoons \overline{u}^{A^g}$

~~2) $M \equiv stab_A^{\neg\neg A \to A}$, търсим $\overline{M}: \neg\neg A^g \to A^g$~~

2) $M \equiv stab_A^{\neg\neg A \to A}$, търсим $\overline{M}: \neg\neg A^g \to A^g$? (Лемата)

3) $M \equiv (\lambda_{u^B} N^C)^{B \to C}$, търсим ~~$\overline{M}: \neg\neg(B^g \to C^g) \to$~~ $B^g \to C^g$

$\overline{M}: B^g \to C^g$?

По И.П. $\Gamma^g, \overline{v}^{B^g} \vdash \overline{N}^{C^g}$ $\overline{M} \leftrightharpoons \lambda_{\overline{v}^{B^g}} \overline{N}^{C^g}$

28.05.2013 λ-смятане

4) NP, $\lambda_x N$, Nt - аналогично

За всички останали случаи използваме домашното.
По този начин влагаме класическата логика в минималната

<u>Теорема 2.</u> Ако $\Gamma^g \vdash_m A^g$ и в Γ, A не участват $\underline{\underline{\vee}}$ и $\underline{\underline{\exists}}$,
то $\Gamma \vdash_c A$

<u>Доказателство:</u> $\left\{ \right.$ <u>Лема 2</u> $\vdash_c A \longleftrightarrow A^g$, ако в A не участват $\vee, \exists$.

За атомарни формули: $stab_{P(\vec{x})}$
за $\bot$: тривиално
за $\rightarrow$, $\forall$ по И.П.
за $\wedge$ $\vdash_c A \wedge B \longleftrightarrow A \tilde{\wedge} B$ от домашното и по И.П. ∎

$\vdash_c \Gamma^g \longleftrightarrow \Gamma$ или $\vdash_c B^g \longleftrightarrow B$ за всяко $B \in \Gamma$
$\vdash_c A^g \longleftrightarrow A$

т.е. имаме $M_B^{\rightarrow} : B^g \longrightarrow B$ $\quad M_A^{\rightarrow} : A^g \rightarrow A$
$M_B^{\leftarrow} : B \rightarrow B^g$ $\quad M_A^{\leftarrow} : A \rightarrow A^g$

$M : A^g \quad FA(M) \subseteq \Gamma^g$
и също така
Искаме да построим $\overline{M}$:
$\overline{M} : A \quad FA(\overline{M}) \subseteq \Gamma$

$$\overline{M} \leftrightharpoons M_A^{\rightarrow}(M[v^{B^g} := M_B^{\leftarrow} v^B]) ∎$$

$$\begin{tikzcd}
m(\to,\forall) \arrow[r, bend left, "\vee,\exists"] \arrow[d, leftrightarrow, "g"'] \arrow[d, bend left, "\mathrm{stab}_{P(\vec{x})}"] & m \arrow[d, bend left, "\mathrm{stab}_A"] \\
c(\to,\forall) \arrow[r, bend right, "\vee,\exists"'] & c \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}$$

$\boxed{(\to,\forall)}$

Ще дефинираме редукция на доказателства.

Деф: 1) $((\lambda_{u^A} M^B)^{A\to B} N^A)^B \longmapsto M^B[u^A := N^A]$

2) $((\lambda_{x^\rho} M^A)^{\forall x^\rho A} t^\rho)^{A[x^\rho := t^\rho]} \longmapsto M^{A[x^\rho := t^\rho]}[x^\rho := t^\rho]$

1)
$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} A^u \\ \mid M \\ B \end{array}}{A \to B} \qquad \begin{array}{c} \mid N \\ A \end{array}}{B} \quad \longmapsto \quad \begin{array}{c} \mid N \\ A \\ \mid M \\ B \end{array}$$

2)
$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} \mid M \\ A \end{array}}{\forall x A} \qquad t}{A[x:=t]} \quad \longmapsto \quad \begin{array}{c} \mid M[x:=t] \\ A[x:=t] \end{array}$$

3) $\lambda_u M \mapsto \lambda_u M'$, $\lambda_x M \mapsto \lambda_x M'$
$MN \mapsto M'N$, $NM \mapsto NM'$, $Mt \mapsto M't$,
ако $M \mapsto M'$.

28.05.2013

λ - смятане

Деф: Казваме, че едно доказателство M е в нормална форма, ако $\nexists N: M \mapsto N$.

Теорема: За всяко доказателство M^A съществува доказателство N^A в нормална форма и няма безкрайна редица $M^A \equiv M_0^A \mapsto M_1^A \longrightarrow M_2^A \mapsto \dots$.

~~Лема:~~ **Деф:** Казваме, че релацията R удовлетворява ~~слабото~~ свойството на диаманта, (~~е конфл~~ ако $xRy \wedge xRz \to \exists t: yRt \wedge zRt$

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[dl, dash, "R"'] \arrow[dr, dash, "R"] & \\
y \arrow[dr, dash, "R"'] & & z \arrow[dl, dash, "R"] \\
 & t &
\end{tikzcd}$$

Деф: R^* – рефлексивното и транзитивно затваряне на R.

Деф: Казваме, че R удовлетворява слабото свойство на диаманта (слабо конфлуентна), ако ~~$xRy \wedge xR$~~ $xRy \wedge xRz \to \exists t: yR^*t \wedge zR^*t$

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R"] & \\
y \arrow[dr, "R^*"'] & & z \arrow[dl, "R^*"] \\
 & t &
\end{tikzcd}$$

Деф: R удовлетворява свойството на Чърч-Росер (е конфлуентна), ако R^* удовлетворява свойството на диаманта

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[dl, "R^*"'] \arrow[dr, "R^*"] & \\
y \arrow[dr, "R^*"'] & & z \arrow[dl, "R^*"] \\
 & t &
\end{tikzcd}$$

Деф: R е силнонормализируема, ако $\nexists x_0, x_1, \dots : x_0 R x_1, \; x_1 R x_2, \dots$

Лема (Newman): Нека R е силно нормализируема и слабо конфлуентна. Тогава R е конфлуентна.

Д-во: R е силно нормализируема $\longrightarrow$ R^* е фундирана наредба.

фундирана индукция по R^*

$$\begin{tikzcd}
& & M \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R"] & & \\
& N' \arrow[dl, "R^*"'] \arrow[dr, "R^*"] & & N'' \arrow[dl, "R^*"'] \arrow[dr, "R^*"] & \\
M' \arrow[dr, "R^*"] & & N \arrow[dl, "R^*"'] & & M'' \arrow[ddll, "R^*"] \\
& P' \arrow[dr, "R^*"] & & & \\
& & P'' & &
\end{tikzcd}$$

Твърдение: $\mapsto$ е слабо конфлуентна

Доказателство: Нека $M \mapsto N$
$M \mapsto K$.

Търсим $L : N \overset{*}{\mapsto} L \overset{*}{\longleftarrow} K$.

Индукция по $M \mapsto N$

2), 3) - тривиални;

$$\begin{tikzcd}
& \lambda_x M' \equiv M \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
N \equiv \lambda_x M \arrow[dr] & & K \equiv \lambda_x M''' \arrow[dl] \\
& L \equiv \lambda_x P &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& M' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
M'' \arrow[dr, "*"] & \text{ил.} & M''' \arrow[dl, "*"'] \\
& P &
\end{tikzcd}$$

28.05.2013

λ- смятане

1)

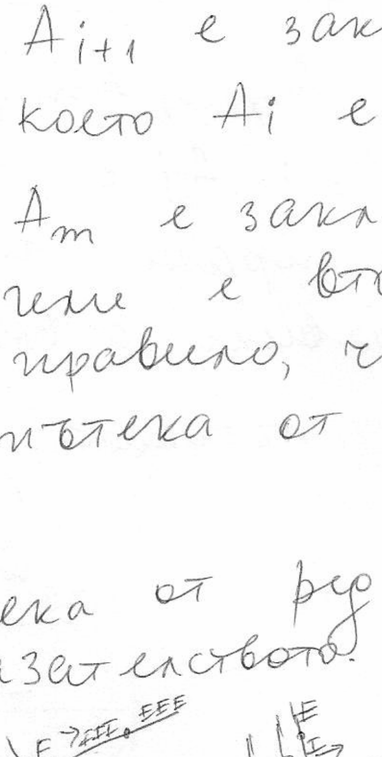
$$\begin{tikzcd} & M \equiv (\lambda_u M')N' \arrow[dl, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \\ N \equiv M'[u:=N'] \arrow[dr, mapsto, "*"] & & K \equiv (\lambda_u M'')N' \arrow[dl, mapsto] \\ & P \leftrightarrows M''[u:=N'] & \end{tikzcd}$$

Структура на нормалните доказателства

Def: Пътека от ред $\underline{n}$ наричаме последователност от срещания на формули $A_0, \dots, A_m$, така че:

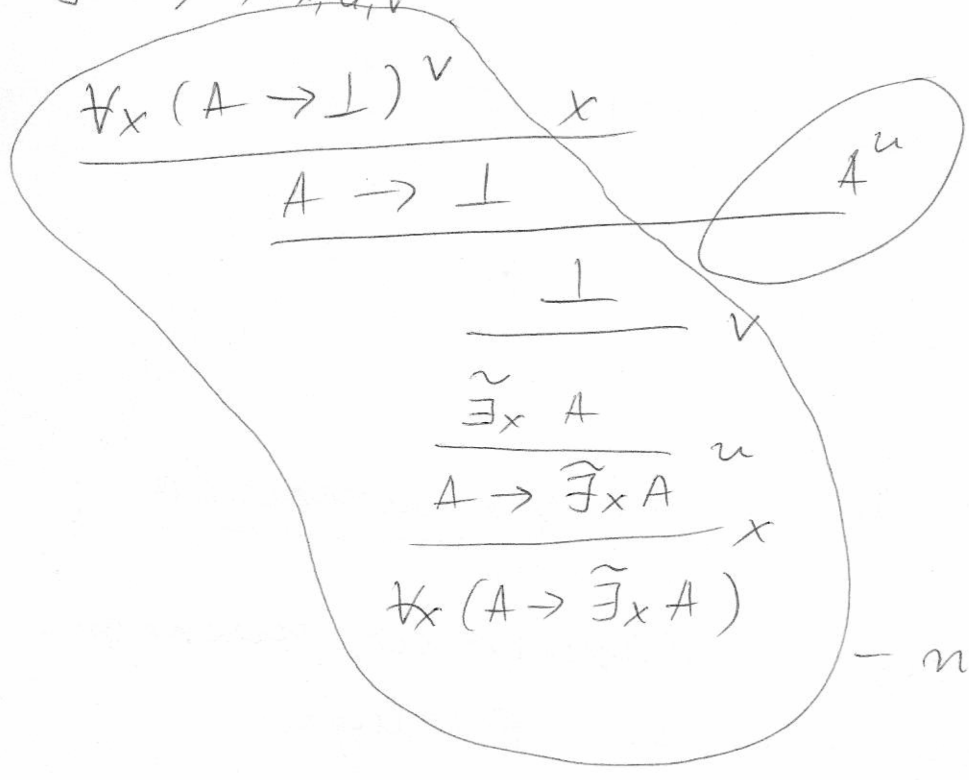
1) A_0 е листо
2) A_{i+1} е заключение на правило, в което A_i е главна предпоставка
3) A_m е заключение на доказателството или е вторична предпоставка на правило, чиято главна предпостовка е пътека от ред $n-1$.

Пътека от ред 0 - главна част на доказателството.



$\vdash \tilde{\exists}^{+}$

$\tilde{\exists}^{+} \leftrightharpoons \lambda_{x,u,v}\, v x u$



$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall_x (A \to \bot)^{v}}{A \to \bot}\,x \qquad A^{u}}{\bot}}{\tilde{\exists}_x A}\,v}{A \to \tilde{\exists}_x A}\,u}{\forall_x (A \to \tilde{\exists}_x A)}\,x$$

пътека от ред 1.

– пътека от ред 0 (главна)

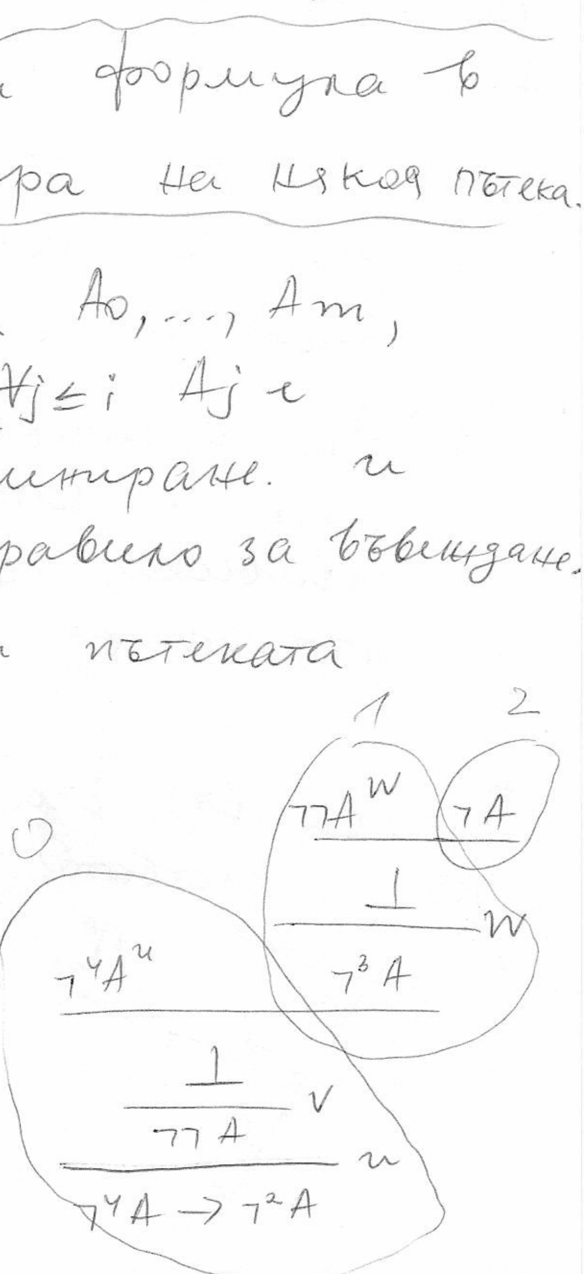
домашно: Всяко срещане на формула в дадено доказателство се намира на някоя пътека.

Твърдение: Ако имаме пътеката $A_0, \dots, A_m$, то имаме $0 \le i \le m$, така че $\forall_{0 \le j \le i}\, A_j$ е заключение на правило за елиминиране. и $\forall_{j > i}\, A_j$ е заключение на правило за въвеждане.

A_i – минимална формула на пътеката

$P: \neg\neg\neg\neg A \to \neg\neg A$

$P \leftrightharpoons \lambda_{u^{\neg^4 A}} \lambda_{v^{\neg A}}\, u^{\neg^4 A}(\lambda_{w^{\neg\neg A}}\, w^{\neg^3 A} v)$



$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg^4 A^{u} \qquad \dfrac{\dfrac{\neg\neg A^{w} \qquad \neg A}{\bot}}{\neg^3 A}\,w}{\bot}}{\neg\neg A}\,v}{\neg^4 A \to \neg^2 A}\,u$$

28.05.2013

λ-смятане

положителна, отрицателна
строго положителна

Деф. (подформула):

1) A е (строго) положителна подформула на A.

2) Ако $B \vee C$ ~~са положителна~~ е подформула на A, то B и C са подформули на A от същия вид.

3) Ако $B \wedge C$ е подформула на A, то B и C са подформули на A от същия вид.

4) Ако $B \to C$ е (строго) положителна
отрицателна
подформула на A, то C е (строго) положителна
отрицателна
подформула на A, а B е отрицателна
положителна
подформула на A.

5) Ако $\forall x B$, $\exists x B$ е подф. на A, то $B[x:=t]$ е подф. на A от същия вид за произволен терм t.

Твърдение: В едно нормално доказателство M^A от допускания $\{u_i^{C_i}\}$ всяка формула е подформула на A или C_i

Доказателство: Индукция по (реда на) пътеките:

За всяка пътека минималната формула е:

1) подформула на всяка друга от пътеката
2) подформула на:
   а) заключението A (ред 0)
   б) някое допускане C_i
   в) вторичната предпоставка на някоя пътека от по-висок ред по И.П.

07.05.2013

λ-смятане

$$f(x, y) = \text{if } x=0 \text{ then } \underbrace{S(y)}_{y+1} \text{ else } f(x-1, f(x-1, y))$$

[illegible] $\to z = 2^x + y$

$$f(x, y) = \text{if } x=0 \text{ then } S(y) \text{ else } f(x-1, 0) + f(x-1, y)$$

$$f(x, y) = \text{if } x=0 \text{ then } S(y) \text{ else } 2 * f(x-1, 0) + y$$

Нека $R(x, y, z)$ е тернарна релация (мислим си графиката на $f(x, y) = 2^x + y$).

$$H_1 \leftrightharpoons \forall y\, (R(0, \overset{R\,0\,y\,(Sy)}{\overset{\shortparallel}{y}}, S(y))$$

$$\boxed{S = +1}$$

~~$H_2 \leftrightharpoons \forall y, x, z, z_1\, (R\, y x z \to R\, z x z_1$~~

$$H_2 \leftrightharpoons \forall y, x, z, z_1\, (R\, x y z \to R\, x z z_1 \to R\, (Sx)\, y\, z_1)$$

$$D_i \leftrightharpoons \tilde{\exists} z_i, z_{i-1}, \dots, z_0\, (R\, 0\, 0\, z_i \mathbin{\tilde{\wedge}} R\, z_i\, 0\, z_{i-1} \mathbin{\tilde{\wedge}} \dots \mathbin{\tilde{\wedge}} R\, z_1\, 0\, z_0)$$

$$z_i = 1;\quad z_{i-1} = 2^{z_1} = 2^1 = 2;\quad z_{i-2} = 2^{z_{i-1}} = 2^2 = 4 \dots,\ z_0 = \underbrace{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{i \text{ пъти}}$$

$$C_i \leftrightharpoons H_1 \to H_2 \to D_i$$

$$A_0(x) \leftrightharpoons \forall y\, \tilde{\exists} z\, R\, x y z$$

$$A_{i+1}(x) \leftrightharpoons \forall y\, (A_i(y) \to \tilde{\exists} z\, (A_i(z) \mathbin{\tilde{\wedge}} R\, x y z))$$

Лема: [illegible] $\vdash H_2 \to \forall x\, (A_i(x) \to A_i(Sx))$

като доказателството не зависи от i.
(термът, който го доказва е с константна дължина.)

$\vdash H_1 \to H_2 \to A_i(0)$ (с константна дължина)

(Proofs & Computations)

Твърдение: Има доказателства на C_i ($\vdash C_i$) с дължина, линейна, относно i.

Твърдение: Нека M_i е нормално доказателство на C_i, т.е. (или е нормално доказателство на $\bot$ от H_1, H_2,

$$E_i \leftrightharpoons \forall z_i, z_{i-1}, \dots, z_0 (R00z_i \to Rz_i0z_{i-1} \to \dots \to Rz_10z_0 \to \bot)$$

Тогава M_i има поне $2^{\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}_{i\text{-възела}}}$

Забележка:
$\tilde{\exists} x, y (A \tilde{\wedge} B)$
$\tilde{\exists} x \tilde{\exists} y (A \tilde{\wedge} B)$
$\forall x, y (A \to B \to \bot) \to \bot$
} еквивалентни записи.

Идея: Всяко нормално доказателство на $Rxyt$ съдържа поне 2^x срещания на допускане на H_1.

Извод: При нормализация можем да стигнем до „експоненциална кула", т.е. и алгоритъма ще трябва да извърши експоненциален брой стъпки.
(Нормализацията не е ефективна).

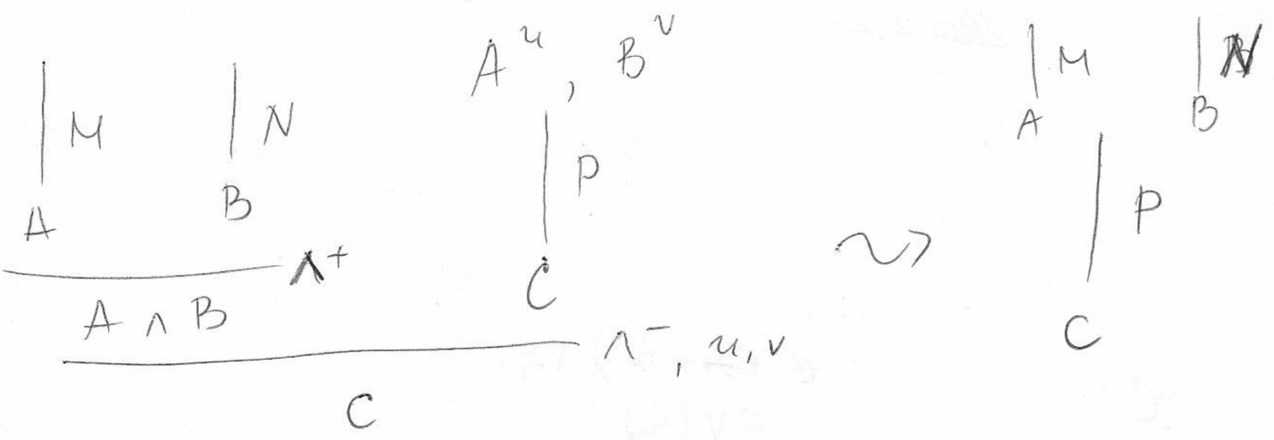
Редукции за ∧, ∨, ∃.

$$\left(\wedge^{+}_{A,B} M^{A} N^{B}\right)^{A\wedge B}$$

$$\left(\wedge^{-}_{A,B,C} M^{A\wedge B}\left(\lambda_{u^{A},v^{B}} N^{C}\right)\right)^{C}$$

$$\wedge^{-}_{A,B,C}\left(\wedge^{+}_{A,B} M^{A} N^{B}\right)\left(\lambda_{u^{A},v^{B}} P^{C}\right) \longmapsto P^{C}[u^{A} := M^{A}][v^{B} := N^{B}]$$

$$\searrow (\lambda_{u,v} P) M N.$$



$$\left(M_{\llcorner}^{A\wedge B}\right)^{A} \qquad \langle M, N\rangle_{\llcorner} \longmapsto M$$

$$\left(M_{\lrcorner}^{A\wedge B}\right)^{B} \qquad \langle M, N\rangle_{\lrcorner} \longmapsto N$$

$$\langle M^{A}, N^{A}\rangle^{A\wedge B}$$

→	$(\lambda_{u^{A}} M^{B}) N^{A} \longmapsto M^{B}[u^{A} := N^{A}]$
∀	$(\lambda_{x} M^{A}) t \longmapsto M^{A[x:=t]}[x := t]$
∧	$\wedge^{-}(\wedge^{+} M N) P \longmapsto P M N$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ A\end{array}}{A \vee B} \qquad \begin{array}{c}A^u\\ \mid N\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}B^v\\ \mid P\\ C\end{array}}{C}\,u, v \quad \longmapsto \quad \begin{array}{c}\mid M\\ A\\ \mid N\\ C\end{array}$$

$$\vee^-_{A,B,C}\left(\vee^{+,1}_{A,B}\, M^A\right)^{A\vee B}\left(\lambda_{u^A} N^C\right)\left(\lambda_{v^B} P^C\right) \longmapsto N^C[u^A := M^A]$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\vee^-(\vee^{+,1} M)NP \longmapsto NM\\ \vee^-(\vee^{+,2} M)NP \longmapsto PM\end{array}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ A[x:=t]\end{array}}{\exists_x A} \qquad \begin{array}{c}A^u\\ \mid N\\ C\end{array}}{C}\,u \quad \longmapsto \quad \begin{array}{c}\mid M\\ A[x:=t]\\ \mid N[x:=t]\\ C\end{array}$$

$x \notin FA(N)\setminus\{u\}$

$x \notin FV(C)$

$$\exists^-_{x,A,C}\left(\exists^+_A\, t\, M^{A[x:=t]}\right)\left(\lambda_{x,u^A} N^C\right) \longmapsto N[x:=t]\,[u^{A[x:=t]} := M^{A[x:=t]}]$$

$$\boxed{\exists^-(\exists^+ t M)N \longmapsto NtM}$$

04.06.2013

λ-смятане

Обща схема: Ако имаме елиминация на ∨, ∧, ∃ и след нея веднага друга елиминация, то искаме да ги разменим. В резултат се намалява сложността на вторичната предпоставка.

$$\dfrac{\dfrac{\overset{|M}{\exists x A} \qquad \overset{\overset{A^u}{|N}}{B\to C}}{B\to C}\,x,u \qquad \overset{P}{\overset{|}{B}}}{C} \quad\longmapsto\quad \dfrac{\overset{M}{\overset{|}{\exists x A}} \qquad \dfrac{\overset{\overset{A^u}{|N}}{B\to C} \qquad \overset{|P}{B}}{C}}{C}\,x,u$$

$$\left(\exists_{x,A,B\to C} M^{\exists x A}\left(\lambda_{x,u^A} N^{B\to C}\right)\right)^{B\to C} P^B \longmapsto$$

$$\longmapsto \exists^-_{x,A,C} M^{\exists x A}\left(\lambda_{x,u} N^{B\to C} P^B\right)^C$$

$$\exists^- M(\lambda_{x,u} N)P \longmapsto \exists^- M(\lambda_{x,u} NP) \qquad [\exists, \to]$$

$$\exists^- M(\lambda_{x,u} N)t \longmapsto \exists^- M(\lambda_{x,u} Nt) \qquad [\exists, \forall]$$

$$\dfrac{\dfrac{\overset{|M}{\exists x A} \qquad \overset{\overset{A^u}{|}}{B\wedge C}}{B\wedge C}\,x,u \qquad \overset{\overset{B^v, C^w}{|P}}{D}}{D}\,v,w \quad\longmapsto\quad \dfrac{\overset{M}{\overset{|}{\exists x A}} \qquad \dfrac{\overset{\overset{A^u}{|N}}{B\wedge C} \qquad \overset{\overset{B^v, C^w}{|P}}{D}}{D}\,v,w}{D}\,x,u$$

$$\wedge^-_{B,C,D}\left(\exists^-_{x,A,B\wedge C} M^{\exists x A}\left(\lambda_{x,u^A} N^{B\wedge C}\right)\right)^{B\wedge C}\left(\lambda_{v^B,w^C} P\right) \longmapsto$$

$$\exists^-_{x,A,D} M^{\exists x A}\left(\lambda_{x,u^A} \wedge^-_{B,C,D} N^{B\wedge C}\left(\lambda_{v^B,w^C} P\right)\right)$$

$$\left.\begin{matrix}\wedge^-(\exists^- M(\lambda_{x,u} N))P \longmapsto \exists^- M(\lambda_{x,u} \wedge^- NP)\end{matrix}\right\} [\exists, \wedge]$$

$$\vee^-(\exists^- M(\lambda_{x,u} N))PQ \longmapsto \exists^- M(\lambda_{x,u} \vee^- NPQ)) \; [\exists, \vee]$$

$$\exists^-(\exists^- M(\lambda_{x,u} N))P \longmapsto \exists^- M(\lambda_{x,u} \exists^- NP) \; [\exists, \exists]$$

Опростяващи (simplification) редукции - въвели сме логически символ и след това не го използваме

$$\dfrac{\cancel{\begin{matrix}\mid M\\ A \wedge B\end{matrix}} \qquad \begin{matrix}A^u, B^v\\ \mid N\\ C\end{matrix}}{C} \longmapsto \begin{matrix}\mid N\\ C\end{matrix}$$

(доказали сме $A \wedge B$, но се оказва, че не ни трябват за д-во на C

$$(\wedge^-_{A,B,C} M^{A \wedge B}(\lambda_{u^A, v^B} N^C))^C \underset{u, v \notin FA(N)}{\longmapsto} N^C$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\mid M\\ A \vee B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}A^u\\ \mid N\\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}B^v\\ \mid P\\ C\end{matrix}}{C}$$

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "u \notin FA(P)"'] \arrow[dr, mapsto, "v \notin FA(P)"] & \\ \begin{matrix}\mid N\\ C\end{matrix} & & \begin{matrix}\mid P\\ C\end{matrix} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & N^C \\ (\vee^-_{A,B,C} M^{A \vee B}(\lambda_{u^A} N^C)(\lambda_{u^v} P^c)) \arrow[ur, mapsto, "u \notin FA(N)"] \arrow[dr, mapsto, "v \notin FA(N)"'] & \\ & P^c \end{tikzcd}$$

04.06.2013

λ-смятане

$$\dfrac{\overset{|M}{\exists_x A} \qquad \overset{\overset{A^u}{|N}}{C}}{C} \quad \xmapsto[x,\,u \notin FA(N)]{} \quad \overset{|N}{C}$$

$$\exists^-_{x,A,C}\, M^{\exists_x A}\left(\lambda_{x,u^A} N^C\right) \longmapsto N^C$$

$\wedge^- M(\lambda_{u,v} N) \longmapsto N$ (*)

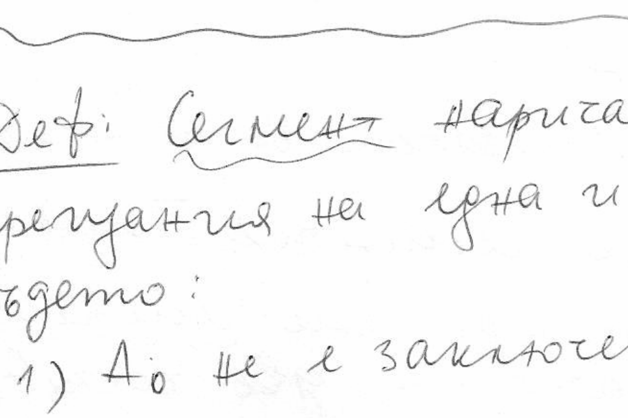
$\vee^- M(\lambda_u N)(\lambda_v P) \longmapsto N$ (*)

$\longmapsto P$ (*) σ правила

$\exists^- M(\lambda_{x,u} N) \longmapsto N$ (*)

Def: **Сегмент** наричаме последователност от срещания на една и съща формула $A_0, \dots, A_n$, където:

1) A_0 не е заключение на $\vee^-$, $\wedge^-$, $\exists^-$
2) A_i е вторична предпоставка на $\vee^-$, $\wedge^-$, $\exists^-$, A_{i+1} е заключението. $(0 \leq i < n)$
3) A_n не е вторична предпоставка на $\vee^-$, $\wedge^-$, $\exists^-$



Def: **Пътека** наричаме последователност от срещания на формули $A_0, \dots, A_n$, където:

1) A_0 е листо, което не е затворено от $\wedge^-$, $\vee^-$, $\exists^-$.
2) A_i не е вторична предпоставка на $\rightarrow^-$

2а) е крайна предпоставка на $\wedge^-, \vee^-, \exists^-$ и A_{i+1} е заключение (надолу по сегмента)

2б) е главна предпоставка на $\wedge^-, \vee^-, \exists^-$ и A_{i+1} е място, затворено от същото правило

3) A_n е: ~~заключение на доказателството~~

3а) заключение на доказателството

3б) вторична предпоставка на $\rightarrow^-$

3в) главна предпоставка на $\wedge^-, \vee^-, \exists^-$ и няма затворени допускания от същото правило.

Деф:
- Пътека от ред 0, ако са изпълнени 3а) или 3в).
- Пътека от ред $n+1$, ако завършва в 3б) и съответната част на $\rightarrow^-$ е част от пътека от ред n.

Твърдение: Нека M е нормално доказателство и нека $\pi = \sigma_0, \dots, \sigma_n$ е пътека (σ_i са сегменти). Тогава съществува сегмент σ_i, който наричаме минимален, който разделя пътеката на две части (−,+), така че:

1) $\forall j < i$: σ_j е главна предпоставка в (−) правило, σ_{j+1} е строго положителна подформула на σ_j.

2) $\forall j \geq i$: σ_j е предпоставка на (+) правило, σ_j е строго положителна подформула на σ_{j+1}.

Следствие: Ако M е нормално доказателство, то всяка формула в него е подформула на заключението или на някое от допусканията.

04.06.2013 λ-смятане

Теорема (свойство на $\vee$): Нека $\Gamma \vdash A \vee B$, където нито една формула в Γ няма строго положителна подформула, която е $\vee$. Тогава:

или $\Gamma \vdash A$, или $\Gamma \vdash B$

Доказателство: Нека разгледаме едно нормално д-во $M^{A \vee B}$. ~~на~~

1 сл. празна (+)част (Имаме само елиминации (−) и нямаме (+)-въвеждане):

Тогава заключението е строгоположителна подформула на някое допускане – противоречие! ↯

2 сл. непразна (+) част:

Проследяваме пътеката. Да допуснем, че пътеката минава през вторична предпоставка на $\vee^-$. Прилагаме 1сл. за пътеката, която минава през главната предпоставка – противоречие. ↯

$\Rightarrow$ главната пътека не минава през вторична предпоставка на $\vee^-$.

Стигаме до $\dfrac{A}{A \vee B}\vee^{+,1}$ или $\dfrac{B}{A \vee B}\vee^{+,2}$.

Теорема (св-во на $\exists$): Нека $\Gamma \vdash \exists_x A$, където в Γ няма формула, чиято строгоположителна подформула е $\exists$. Тогава:

$\Gamma \vdash A(r_1) \vee \ldots \vee A(r_n)$, за конкретни термове r_i.

Ако, в допълнение, в Γ няма формула, чиято строгоположителна подформула е дизюнктивна, тогава $\Gamma \vdash A(r)$ (термът е единствен).

Доказателство: Аналогично на предната Теорема разглеждаме главната пътека. Критичен е случаят за $\vee^-$. Правим индукция по доказателството.

$$\dfrac{\begin{array}{c} | \\ B \vee C \end{array} \qquad \begin{array}{c} | \\ \exists x A \end{array} \qquad \begin{array}{c} | \\ \exists x A \end{array}}{\exists x\ A}\ \vee^-$$

По И.П.

$$\dfrac{\begin{array}{c} | \\ B \vee C \end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} | \\ A(\Gamma_1) \vee \ldots \vee A(\Gamma_i) \end{array}}{}}{\bigvee_{i=1}^{n} A(\Gamma_i)}\ \vee^+ \qquad \dfrac{\dfrac{A(\Gamma_{i+1}) \vee \ldots \vee A(\Gamma_n)}{}}{\bigvee_{i=1}^{n} A(\Gamma_i)}\ \vee^+}{\bigvee_{i=1}^{n} A(\Gamma_i).}\ \vee^-$$

на няколко стъпки.

База на индукцията: Аналогично на предната теорема със сигурност стигаме до $\exists^+$, откъдето „прочитаме" терма.

Ако нямаме ~~[illegible]~~ строгоположителна подформула **$\vee$** в Γ, тогава няма да минем през $\vee^-$.
(която е дизюнктивна.)

11.06.2013

λ-смятане

Аритметика с крайни типове

<u>Деф:</u> Типове в системата T.

1) B - булев тип
2) N - тип на естествените числа
3) α - типова променлива
4) $L(\alpha)$ - параметризиран тип на списъци от елементи от тип α.
5) $\rho \Rightarrow \sigma$, където ρ, σ са типове
6) $\rho \times \sigma$, ρ, σ - типове.

<u>Деф:</u> Термове:

1) tt^B, ff^B - истина и лъжа (конструктори)
2) 0^N, $S^{N \Rightarrow N}$ - нула и наследник
3) $nil_\alpha^{L(\alpha)}$, $::_\alpha^{\overset{\text{глава}}{\alpha} \Rightarrow \overset{\text{опашка}}{L(\alpha)} \Rightarrow L(\alpha)}$ $\hookrightarrow \boxed{x^\alpha :: l^{L(\alpha)}}$ - списък по глава и опашка
4) $(\lambda_{x^\rho} t^\sigma)^{\rho \Rightarrow \sigma}$
5) $< s^\rho, t^\sigma >^{\rho \times \sigma}$
6) $Split_\tau : \underbrace{\rho \times \sigma \Rightarrow (\rho \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau)}_{\text{тип на терма}} \Rightarrow \tau$

   $s_L^{\rho \times \sigma} \leftrightharpoons Split_\rho s (\lambda x^\rho, y^\sigma x)$

   $s_R^{\rho \times \sigma} \leftrightharpoons Split_\sigma s (\lambda x^\rho, y^\sigma y)$

7) $(s^{\rho \Rightarrow \sigma} t^\rho)^\sigma$
8) x^τ, τ - тип (всяка типизирана променлива е терм; изброимо много за всеки тип)

9) $Cases_\tau : \underbrace{B \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau}_{\text{тип на терма от фамилията } Cases_\tau}$

$$\left| \begin{array}{l} f(\vec{x}, 0) = g(\vec{x}) \\ f(\vec{x}, n+1) = h(\vec{x}, n, f(\vec{x}, n)) \end{array} \right.$$

10) R^N_τ – Гьоделов рекурсор (примитивна рекурсия)

↓

~~от по-висок~~

Типове от произволно висок ред

$$R^N_\tau : N \Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ \text{база на} \\ \text{рекурсията}}}{\tau} \Rightarrow (\underset{\substack{\downarrow \\ \text{предишната} \\ \text{стойност} \\ \text{на параметъра}}}{N} \Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ \text{предишната} \\ \text{стойност} \\ \text{на функцията}}}{\tau} \Rightarrow \tau) \Rightarrow \tau$$

11) $R^{L(\alpha)}_\tau : L(\alpha) \Rightarrow \tau \Rightarrow (\alpha \Rightarrow L(\alpha) \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau) \Rightarrow \tau$

Деф: (Редукция):

- $(\lambda x^\rho s^\sigma) t^\rho \longmapsto s^\sigma [x^\rho := t^\rho]$
- $Split_\tau < s^\rho, t^\sigma > f^{\rho \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau} \longmapsto (f s^\rho t^\sigma)^\tau$
- $Cases_\tau\, tt^B\, \underset{\substack{| \\ \text{then}}}{s^\tau}\, \underset{\substack{| \\ \text{else}}}{t^\tau} \longmapsto s^\tau$

  $Cases_\tau\, ff^B\, s^\tau t^\tau \longmapsto t^\tau$

- $R^N_\tau\, 0\, s^\tau\, t^{N \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau} \longmapsto s^\tau$

  $R^N_\tau\, (\underbrace{S\, n}_{\text{successor}})\, s^\tau\, t^{N \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau} \longmapsto t\, n\, (R^N_\tau\, n\, s\, t)$

- $R^{L(\alpha)}_\tau\, nil_\alpha\, s^\tau\, t^{\alpha \Rightarrow L(\alpha) \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau} \longmapsto s^\tau$

  $R^{L(\alpha)}_\tau\, (x^\alpha :: \ell^{L(\alpha)})\, s^\tau\, t^{\alpha \Rightarrow L(\alpha) \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau} \longmapsto t\, x\, \ell\, (R^{L(\alpha)}_\tau\, \ell\, s\, t)$

11.06.2013

λ-смятане

- $s^{\rho\Rightarrow\sigma} \mapsto \lambda x^{\rho}\, s^{\rho\Rightarrow\sigma} x^{\rho}$ (η-експанзия)
- $s^{\rho\times\sigma} \mapsto \langle s_{\llcorner}, s_{\lrcorner}\rangle$
- $\mathrm{Cases}\ b\ tt\ ff \mapsto b$
- $(\mathrm{Cases}\ b\ r\, s)\, t \mapsto \mathrm{Cases}\ b\, (r t)(s t)$
- $\langle \mathrm{Cases}\ b\ r_1\, s_1, \mathrm{Cases}\ b\ r_2\, s_2 \rangle$

  $\mapsto \mathrm{cases}\ b\ \langle r_1, r_2\rangle \langle s_1, s_2\rangle.$

Аналогично дефинираме $\rightarrow^*$ (рефл. и транз. затваряне)

Теорема: $\mapsto$ е конфлуентна

Теорема: $\mapsto$ е силно нормализираща

- $N \leftrightharpoons \mu\alpha\langle \alpha, \alpha\Rightarrow\alpha\rangle$ -
- $B \leftrightharpoons \mu\alpha\langle \alpha, \alpha\rangle$
- $L(\rho) \leftrightharpoons \mu\alpha\langle \alpha, \rho\Rightarrow\alpha\Rightarrow\alpha\rangle$

$Eq_B : B \Rightarrow B \Rightarrow B$? Комбинатор, който проверява дали два булеви терма са равни.

$$Eq_B \leftrightharpoons \lambda_{b_1, b_2}\ Cases_B\ b_1\ b_2\ (Cases_B\ b_2\ ff\ tt)$$

$Eq_N : N \Rightarrow N \Rightarrow B$

$$Eq_N \leftrightharpoons \lambda_{n,m}\ \mathcal{R}^N_B\ n\ (\mathcal{R}^N_B\ m\ tt\ (\lambda_{\overset{m-1}{m'}} ff))$$

$$(\lambda_{\underset{n-1}{n'}, \underset{\text{проверява дали } n-1 = m?}{p}}\ \mathcal{R}\ m\ ff\ (\lambda_{m', q}\ \underset{n-1 = m-1}{q})).$$

$+ : N \Rightarrow N \Rightarrow N$ (събиране на естествени числа)

$$+ \leftrightharpoons \lambda_n\ \mathcal{R}^N_{\underset{N\Rightarrow N}{n}}\ (\lambda_{\overset{0+m=m}{m}}\ m)\ (\lambda_{\overset{n-1}{n'}, \overset{\lambda_m (n-1)+m}{p}, m}\ S(pm))$$

$$+ \leftrightharpoons \lambda_{n,m}\ \mathcal{R}^N_{N}\ n\ m\ (\lambda_{\underset{n-1}{n'}, \underset{n-1+m}{p}}\ Sp)$$

$++_\alpha : L(\alpha) \Rightarrow L(\alpha) \Rightarrow L(\alpha)$ — слепва два списъка

$$++ \leftrightharpoons \lambda_{l,k}\ \mathcal{R}^{L(\alpha)}_{L(\alpha)}\ l\ k\ (\lambda_{x, l', \underset{l' ++ k}{p}}\ x :: p)$$

$lh_\alpha : L(\alpha) \Rightarrow N$ - дължина на списък

$$lh_\alpha \leftrightharpoons \lambda_l\ \mathcal{R}^{L(\alpha)}_N\ l\ 0\ (\lambda_{\underset{\text{глава}}{x}, \underset{\text{опашка}}{l'}, \underset{lh(l')}{p}}\ Sp)$$

11.06.2013

λ-смятане

Функция на Акерман – $\underline{A}$ – рекурсивна ф-я, която не е примитивно рекурсивна

$$A(0, y) \simeq y+1$$

$$A(x+1, 0) \simeq A(x, 1)$$

$$A(x+1, y+1) \simeq A(x, A(x+1, y))$$

~~$A \leftrightharpoons \lambda_x \mathcal{R}^N_{N\Rightarrow N}\, x\, S\, (\lambda_{x', p}$~~ [illegible] ~~$p$~~ [illegible]

~~$\downarrow$~~

~~$\lambda_y A(x', y)$~~

~~$A \leftrightharpoons \lambda_x \mathcal{R}^N_{N\Rightarrow N}\, x\, S\, (\lambda_{x', p}\, p\, (\lambda_y \mathcal{R}^N_N\, y$~~ [illegible] ~~$($~~ $(S0)$

~~$\downarrow$~~

~~$\lambda_y A(x', y)$~~

$\lambda_y A(x, y)$

$$A \leftrightharpoons \lambda_x \mathcal{R}^N_{N\Rightarrow N}\, x\, S\, (\lambda_{x', p}\, (a p)^{N\Rightarrow N})$$

$$a^{(N\Rightarrow N)\Rightarrow(N\Rightarrow N)} \leftrightharpoons \lambda_{g, y}\, \mathcal{R}^N_N\, y\, g\, (S0)\, (\underset{\substack{\downarrow\\ a g y'}}{\lambda_{y', q^N}}\, g^{N\Rightarrow N} q^N)$$

NA^ω, HA^ω

(Пеанова) (Хейтингова)

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{аритметики}}$

Деф: формули на NA^{ω} (отрицателна аритметика)

1) $at(t^{B})$ → атомарна формула

2) $A \to B$

3) $\forall x^{\rho} A$

формули на HA^{ω}:

4) $A \wedge B$

5) $\exists x^{\rho} A$.

$$A \vee B \leftrightharpoons \exists b^{B} (at(b) \to A) \wedge (\neg at(b) \to B)$$

$$F \leftrightharpoons at(ff^{B})$$

$$T \leftrightharpoons at(tt^{B})$$

$$\neg A \leftrightharpoons A \to F$$

$$\tilde{\exists} x^{\rho} A \leftrightharpoons \neg \forall x^{\rho} \neg A$$

$$A \tilde{\wedge} B \leftrightharpoons \neg (A \to B \to F)$$

$$A \tilde{\vee} B \leftrightharpoons \neg A \to \neg B \to F$$

Ще считаме, че две формули са
еднакви, ако са еднакви с точност до
нормална форма на термовете в тях.

11.06.2013

λ-смятане

Деф: Доказателства:

I. в NA^ω

1) $Ax \; T^T$

2) $(\lambda_{u^A} M^B)^{A \to B}$ - въвеждане на импл.

3) $(M^{A \to B} N^A)^B$ - MP

4) $(\lambda_{x^\rho} M^A)^{\forall x^\rho A}$ (*) - $x \notin FA(M)$, т.е. $x \notin FV[FA(M)]$.

5) $(M^{\forall x^\rho A} t^\rho)^{A[x^\rho := t^\rho]}$

6) $\mathcal{C}_{b,A} : \forall_{b^B} (A[b := tt] \to A[b := ff] \to A)$

7) $Ind^N_{n,A} : \forall_{n^N} (A[n := 0] \to \forall_{n^N} (A \to A[n := \underset{n+1}{\underline{Sn}}]) \to A)$.

8) $Ind^{L(\alpha)}_{n,\alpha,A}$:

$\forall_{\ell^{L(\alpha)}} (A[\ell := nil_\alpha] \to \forall_{x^\alpha, \ell^{L(\alpha)}} (A \to A[\ell := x :: \ell]) \to A)$

II в. HA^ω

9) $\langle M^A, N^B \rangle^{A \wedge B}$

10) $\wedge^-_{A,B,C} : A \wedge B \to (A \to B \to C) \to C$

11) $\langle t^\rho, M^{A[x^\rho := t^\rho]} \rangle^{\exists x^\rho A}$

12) $\exists^-_{x,A,C} : \exists x^\rho A \to \forall x^\rho (A \to C) \to C$, $x \notin FV(C)$

Теорема: $F \to A$ за произволно $A \in HA^\omega$

Доказателство; Индукция по A

$$F \to at(t^B) \quad \text{- с индукция по } t$$

$$\mathcal{C}\, t\, (\lambda_{u^F} A_x T)(\lambda_{u^F} u) \rightsquigarrow F \to at(t).$$

Теорема: $\neg\neg A \to A$, за произволна ф-ла $A \in NA^\omega$.

Доказателство: с индукция по A.

$$\neg\neg at(t) \to at(t) \quad \text{- с индукция по } t.$$

$$\mathcal{C}\, t\, (\lambda_{u^{\neg\neg T}} A_x T)\, (\lambda_{u^{\neg\neg F}}\, u\, (\lambda_{v^F} v))$$

Системата T: изчислимите функции, които са доказуемо тотални в HA^ω $\Leftrightarrow$ доказуемо тотални в NA^ω.

Извличане на програми:

Цел: M^A: искаме $[\![M]\!]^{\tau(A)}$ да намерим програма, която е изчислителния смисъл на M.

Деф: I - синглетонен тип

ε^I - константа

Деф. (изчислителен тип на формула)

1) $\tau(at(t)) \leftrightharpoons I$
2) $\tau(A \to B) \leftrightharpoons \tau(A) \Rightarrow \tau(B)$
3) $\tau(\forall_{x^\rho} A) \leftrightharpoons \rho \Rightarrow \tau(A)$
4) $\tau(A \wedge B) \leftrightharpoons \tau(A) \times \tau(B)$
5) $\tau(\exists_{x^\rho} A) \leftrightharpoons \rho \times \tau(A)$

$\rho \Rightarrow I \rightsquigarrow I$

$I \Rightarrow \rho \rightsquigarrow \rho$

$\left.\begin{matrix}\rho \times I \\ I \times \rho\end{matrix}\right\} \rightsquigarrow \rho$

$\forall_{x^I} A \rightsquigarrow A$

$\lambda_{x^I} M \rightsquigarrow M$

$\lambda_{x^I} t \rightsquigarrow t$

$\lambda_x \varepsilon \rightsquigarrow \varepsilon \qquad \langle t, \varepsilon \rangle \rightsquigarrow t$

$t\varepsilon \rightsquigarrow t \qquad \langle \varepsilon, t \rangle \rightsquigarrow t$

$\varepsilon t \rightsquigarrow \varepsilon \qquad \exists_{x^I} A \rightsquigarrow A$

11.06.2013

λ- смятане

Деф: (реализируемост) $t \; r \; A \qquad |A|^t$

0)

1) $|at(t)|^s \leftrightharpoons at(t)$

2) $|A \to B|^t \leftrightharpoons \forall_{x^{\tau(A)}} |A|^x \to |B|^{tx}$

3) $|\forall_{x^\rho} A|^t \leftrightharpoons \forall_{x^\rho} |A|^{tx}$

4) $|A \wedge B|^t \leftrightharpoons |A|^{t_\llcorner} \wedge |B|^{t_\lrcorner}$

5) $|\exists_{x^\rho} A|^t \leftrightharpoons |A[x := t_\llcorner]|^{t_\lrcorner}$

$\llbracket M^A \rrbracket : \tau(A)$

Деф: (изчислителен смисъл на доказателствата):

0) $\llbracket u^A \rrbracket \leftrightharpoons x^{\tau(A)}$

1) $\llbracket Ax_T \rrbracket \leftrightharpoons \varepsilon$

2) $\llbracket \lambda_{u^A} M^B \rrbracket \leftrightharpoons \lambda_{x^{\tau(A)}} \llbracket M^B \rrbracket$

3) $\llbracket M^{A \to B} N^B \rrbracket \leftrightharpoons \llbracket M \rrbracket \llbracket N \rrbracket$

4) $\llbracket \lambda_{x^\rho} M^A \rrbracket \leftrightharpoons \lambda_{x^\rho} \llbracket M \rrbracket$

5) $\llbracket M t \rrbracket \leftrightharpoons \llbracket M \rrbracket t$

6) $\llbracket \mathcal{C}_{B,A} \rrbracket \leftrightharpoons Cases_{\tau(A)}$

7) $\llbracket Ind^{N}_{n,A} \rrbracket \leftrightharpoons \mathcal{R}^{N}_{\tau(A)}$

8) $\llbracket Ind^{L(\alpha)}_{l,A} \rrbracket \leftrightharpoons \mathcal{R}^{L(\alpha)}_{\tau(A)}$

9) $\llbracket \langle M, N \rangle \rrbracket \leftrightharpoons \langle \llbracket M \rrbracket, \llbracket N \rrbracket \rangle$

10) $\llbracket \wedge^-_{A,B,C} \rrbracket \leftrightharpoons Split^{\tau(A) \times \tau(B)}_{\tau} C$

11) $\llbracket \langle t, M \rangle \rrbracket \leftrightharpoons \langle t, \llbracket M \rrbracket \rangle$!

12) $\llbracket \exists^-_{x,A,C} \rrbracket \leftrightharpoons Split^{\rho \times \tau(A)}_{\tau(C)}$

Теорема за коректност: Ако M^A е доказателство в HA^ω, то $NA^\omega \vdash |A|^{[\![M]\!]}$.

[redacted] $\underline{N_C}$:

$$\circledast \quad \dfrac{\begin{matrix} | \\ A \end{matrix} \qquad \begin{matrix} | \\ B \end{matrix}}{A \wedge B}\; I_{\wedge}$$

$(\wedge)$

$$\circledast \quad \dfrac{A \wedge B}{A}\; E_{\wedge_L} \qquad\qquad \circledast \quad \dfrac{A \wedge B}{B}\; E_{\wedge_R}$$

$(\longrightarrow)$

$$\circledast \quad \dfrac{\begin{matrix} A^{u} \\ | \\ B \end{matrix}}{A \to B}\; u\; I_{\to} \qquad\qquad \circledast \quad \dfrac{\begin{matrix} | \\ A \to B \end{matrix} \qquad \begin{matrix} | \\ A \end{matrix}}{B}\; E_{\to}$$

$$\circledast \quad \dfrac{\begin{matrix} | \\ A \end{matrix}}{A \vee B}\; I_{\vee_L} \qquad \circledast \quad \dfrac{\begin{matrix} | \\ B \end{matrix}}{A \vee B}\; I_{\vee_R} \qquad \circledast \quad \dfrac{\begin{matrix} | \\ A \vee B \end{matrix} \qquad \begin{matrix} A^{u} \\ | \\ C \end{matrix} \qquad \begin{matrix} B^{v} \\ | \\ C \end{matrix}}{C}\; u, v\; E_{\vee}$$

$(\forall)$

$$\circledast \quad \dfrac{A}{\forall x A}\; x I_{\forall} \;,\quad x \notin FV(A)$$

$$\circledast \quad \dfrac{\forall x A \quad t}{A[x := t]}\; E_{\forall}$$

$(\exists)$

$$\circledast \quad \dfrac{A[x := t]}{\exists x A}\; I_{\exists} \qquad\qquad \circledast \quad \dfrac{\begin{matrix} | \\ \exists x A \end{matrix} \qquad \begin{matrix} (A[x := t])^{u} \\ | \\ C \end{matrix}}{C}\; u\; E_{\exists} \;,$$

където $x \notin FV(C)$

$x \notin FV(B^{V})$

(x не участва свободно в отв. доп.)

G3c: Ax: $A, \Gamma \Rightarrow \Delta, A$ (A - атомарна)

$L_\bot$: $\Gamma, \bot \Rightarrow \Delta$

Правила:

$$L_\wedge \ \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad R_\wedge \ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

$$L_\vee \ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad R_\vee \ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}$$

$$L_\to \ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \to B \Rightarrow \Delta} \qquad R_\to \ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B}$$

$$L_\forall \ \frac{\forall x A, A[x:=t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad R_\forall^* \ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A}$$

$$L_\exists^* \ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad R_\exists \ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A, A[x:=t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A}$$

$*$ - $x \notin FV(\Gamma \Delta)$

$A \tilde{\vee} B \leftrightharpoons \neg(\neg A \wedge \neg B)$

$A \tilde{\wedge} B \leftrightharpoons \neg(\neg A \vee \neg B)$?

$\tilde{\exists} x A \leftrightharpoons \neg \forall x \neg A$

Хилбертови аксиоми: H_m:

$\to$) • $A \to (B \to A)$

• $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

$\wedge$) • $A \to (B \to (A \wedge B))$

• $A \wedge B \to A$

• $A \wedge B \to B$

$\vee$) • $A \to A \vee B$ | • $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$

• $B \to A \vee B$

[redacted] ~~• $(A \vee B \to C) \to (A \to C) \to (B \to C) \to C$~~

$\forall$) • $\forall x A \to A[x := t]$

• $\forall x (B \to A) \to (B \to \forall x A)$, ако $x \notin FV(B)$

$\exists$) • $A[x := t] \to \exists x A$

• $\forall x (A \to B) \to (\exists x A \to B)$, ако $x \notin FV(B)$.

H_i: $\perp \to A + H_m$

H_c: [redacted] $\neg\neg A \to A + H_i$

Деф: $\xrightarrow{\beta}$

① $(\lambda_x M)N \xrightarrow{\beta} M[x:=N]$

② $M \xrightarrow{\beta} N \Rightarrow \lambda_x M \xrightarrow{\beta} \lambda_x N$

③ $M \xrightarrow{\beta} N \Rightarrow MP \xrightarrow{\beta} NP \ ; \ PM \xrightarrow{\beta} PN$

Деф: $\overset{\beta}{\twoheadrightarrow}$

① $M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} M$

② $M \xrightarrow{\beta} N \Rightarrow M \twoheadrightarrow N$

③ $M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} N \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} P \Rightarrow M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} P.$

Деф: $\xrightarrow{1}$

① $M \xrightarrow{1} M$

② $M \xrightarrow{1} N \Rightarrow \lambda_x M \xrightarrow{1} \lambda_x N$

③ $M \xrightarrow{1} M', N \xrightarrow{1} N' \Rightarrow MN \xrightarrow{1} M'N'$

④ $M \xrightarrow{1} M', N \xrightarrow{1} N' \Rightarrow (\lambda_x M)N \xrightarrow{1} M'[x:=N']$

$$(\lambda_z M')[x:=N][y:=L] \overset{\beta}{=}$$

$$\overset{\beta}{=} \lambda_z (M'[x:=N][y:=L]) \underset{\text{ИП}}{\overset{\beta}{=}}$$

$$= \lambda_z (M'[y:=L][x:=N[y:=L]]) =$$

$$= (\lambda_z M')[y:=L][x:=N[y:=L]] \quad \square$$

Деф. суб:

- $(\lambda_x M')[x:=N] \leftrightharpoons \lambda_x M'$ (Свързана променлива) $x \in BV(M)$
- $(\lambda_z M')[x:=N] \leftrightharpoons \lambda_z M'[x:=N]$.