Изпит по "Дискретни структури" — СУ, ФМИ, 13 юни 2016 г.

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	1	2	3	4	5	6	Общо
получени точки							
максимум точки	*20*	*20*	*20*	*20*	*20*	*20*	*120*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.*

Забележка 2: *Оценката се изчислява на база 100 точки.*

Задача 1. За булевата функция $f(x, y, z) = x \vee y \to z$ намерете:

а) съвършената дизюнктивна нормална форма; **(10 точки)**

б) полинома на Жегалкин. **(10 точки)**

Задача 2. Колко от целите числа от 1 до 2100 включително не се делят нито на 3, нито на 7 ?

Задача 3. Днес при професор Всезнайков се явяват на изпит девет студенти. Професорът си има квоти: решил е да постави две двойки, три тройки и четири четворки (по-високи оценки професорът по принцип не пише). По колко начина могат да бъдат разпределени оценките? Изчислете отговора докрай.

Задача 4. Да се реши уравнението $a_{n+1} = 10a_n - 21a_{n-1} + 3^n$, ако $a_0 = 1$, $a_1 = 4$.

Задача 5. В множеството на всички наредени n-торки от нули и единици разглеждаме релацията "n-торките x и y се различават в четен брой позиции".

а) Докажете, че това е релация на еквивалентност. **(5 точки)**

б) Намерете броя на класовете на еквивалентност. **(5 точки)**

в) Пресметнете кликовото число на графа на релацията. (Върховете на този граф са всички наредени n-торки от нули и единици. Два върха са свързани с ребро тогава и само тогава, когато техните n-торки се различават в четен брой позиции.) **(10 точки)**

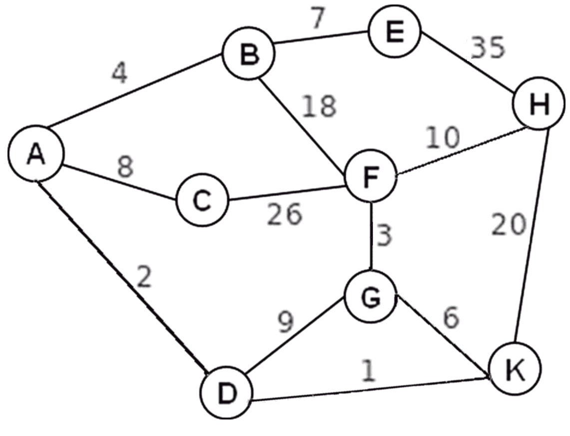
Задача 6. Даден е неориентиран тегловен граф (вж. чертежа).

а) Пресметнете върховото хроматично число на графа. **(4 точки)**

б) Намерете най-късия път от A до H. Изберете алгоритъм и опишете стъпките. **(8 точки)**

в) Хамилтонов ли е графът? **(4 точки)**

г) Ойлеров ли е графът? **(4 точки)**



РЕШЕНИЯ

Задача 1. Построяваме таблицата на булевата функция f, като единиците означават истина, а нулите — неистина.

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

От таблицата намираме съвършената дизюнктивна нормална форма на функцията:

$$f \;=\; \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \;\vee\; \overline{x}\,\overline{y}\,z \;\vee\; \overline{x}\,y\,z \;\vee\; x\,\overline{y}\,z \;\vee\; x\,y\,z\,.$$

За да намерим полинома на Жегалкин, заменяме включващата дизюнкция с изключваща (имаме право на това, тъй като дизюнктивната нормална форма, с която работим, е съвършена); а вместо отрицанието използваме събиране с единица:

$$f \;=\; (x+1)(y+1)(z+1) + (x+1)(y+1)z + (x+1)yz + x(y+1)z + xyz\,.$$

Разкриваме скобите:

$$f \;=\; xyz + xy + xz + yz + x + y + z + 1 + xyz + xz + yz + z + xyz + yz + xyz + xz + xyz\,.$$

Унищожаваме еднаквите събираеми:

$$f \;=\; \cancel{xyz} + xy + \cancel{xz} + \cancel{yz} + x + y + \cancel{z} + 1 + \cancel{xyz} + \cancel{xz} + \cancel{yz} + \cancel{z} + \cancel{xyz} + yz + \cancel{xyz} + xz + xyz\,.$$

Окончателно, получаваме следния полином на Жегалкин:

$$f \;=\; xyz + xy + xz + yz + x + y + 1\,.$$

Задача 2. Нека A и B са множествата на целите числа от 1 до 2100 включително, които се делят на 3, съответно на 7, тоест

$$A \;=\; \Big\{3\,;\;6\,;\;9\,;\;\ldots\,;\;2100\Big\}\,,\;\; B \;=\; \Big\{7\,;\;14\,;\;21\,;\;\ldots\,;\;2100\Big\}\,.$$

Сечението им е множеството на целите числа от 1 до 2100 включително, които се делят на 21:

$$A \cap B \;=\; \Big\{21\,;\;42\,;\;63\,;\;\ldots\,;\;2100\Big\}\,.$$

Тогава $|A| = 2100 : 3 = 700$, $|B| = 2100 : 7 = 300$, $|A \cap B| = 2100 : 21 = 100$.

Според принципа за включване и изключване са в сила следните равенства:

$$|A \cup B| \;=\; |A| \;+\; |B| \;-\; |A \cap B| \;=\; 700 \;+\; 300 \;-\; 100 \;=\; 900,$$

тоест в разглеждания интервал има 900 числа, които се делят на 3 или на 7.

Останалите $2100 \;-\; 900 \;=\; 1200$ числа не се делят нито на 3, нито на 7.

Задача 3. За да постави двете слаби оценки, професорът трябва да избере двама от всичките девет студенти. Редът няма значение и един студент не може да бъде избран два пъти, така че имаме комбинации без повторение: $C_9^2 = \binom{9}{2} = \dfrac{9!}{2!\,7!} = \dfrac{8\,.\,9}{2} = 36$. Тоест има 36 начина професорът да избере на кого да пише двете слаби оценки.

Аналогично, за да постави трите тройки, професорът трябва да избере трима от останалите седем студенти, което може да стане по $C_7^3 = \binom{7}{3} = \dfrac{7!}{3!\,4!} = 5\,.\,7 = 35$ начина.

На останалите четирима студенти професорът пише четирите четворки.

Според правилото за умножение възможните разпределения на оценките са $36\,.\,35 = 1260$.

Задачата може да се реши по още един начин. Професорът номерира студентите с целите числа от 1 до 7 и разполага в редица девет оценки: две двойки, три тройки и четири четворки. След това поставя първата оценка от редицата на студент № 1, втората — на студент № 2 и т.н. Ясно е, че оценките могат да бъдат разпределени по толкова начина, колкото са всички редици от разглеждания вид. Две редици се различават само по реда на елементите си, тоест това са пермутации (с повторение). Броят им е равен на $\widetilde{P}_9^{\,2\,;\,3\,;\,4} = \dfrac{9!}{2!\,3!\,4!} = 4\,.\,5\,.\,7\,.\,9 = 1260$.

Отговор: Оценките могат да бъдат разпределени между студентите по 1260 начина.

Задача 4. Уравнението $a_{n+1} = 10a_n - 21a_{n-1} + 3^n$ е линейно-рекурентно и се решава по стандартния метод.

От уравнението и началните условия $a_0 = 1$, $a_1 = 4$ пресмятаме $a_2 = 22$.

На хомогенната част съответства характеристичното уравнение

$$x^{n+1} = 10x^n - 21x^{n-1},$$

което при $x \neq 0$ е равносилно на

$$x^2 = 10x - 21, \quad \text{т.е.} \quad x^2 - 10x + 21 = 0.$$

Корените на това квадратно уравнение са 7 и 3. Като добавим и числото 3 от свободния член, получаваме мултимножеството $\left\{7\,;\,3\,;\,3\right\}_{\text{M}}$, от което следва формулата

$$a_n = C_1\,.\,7^n + C_2\,.\,3^n + C_3\,.\,n\,.\,3^n.$$

Заместваме n с 0, с 1 и с 2 и получаваме система от линейни уравнения:

$$\left|\begin{array}{rcrcrcr} C_1 & + & C_2 & & & = & 1 \\ 7C_1 & + & 3C_2 & + & 3C_3 & = & 4 \\ 49C_1 & + & 9C_2 & + & 18C_3 & = & 22. \end{array}\right.$$

Решението на тази система е

$$C_1 = \frac{7}{16}\ , \quad C_2 = \frac{9}{16}\ , \quad C_3 = -\,\frac{4}{16}\,.$$

Заместваме намерените стойности във формулата за общия член и получаваме отговора.

Отговор: $a_n = \dfrac{7^{n+1} + 3^{n+2} - 4n\,.\,3^n}{16}$.

Задача 5.

а) Всяка наредена n-торка от нули и единици се различава от себе си в нула позиции. Тъй като нулата е четно число, то всяка n-торка е в релация със себе си. Следователно релацията е рефлексивна.

Ако наредените n-торки x и y се различават в четен брой позиции, то y и x се различават също в четен брой позиции (а именно в същите позиции).

Нека наредените n-торки x и y се различават в четен брой позиции и множеството от тези позиции е A. Нека n-торките y и z се различават също в четен брой позиции и множеството от тези позиции е B. Понеже n-торките са съставени само от нули и единици, то множеството от позициите, в които се различават x и z, е $A \Delta B$. Тогава броят на тези позиции е равен на $|A \Delta B| = |A| + |B| - 2\,|A \cap B|$, което е четно число, защото е алгебричен сбор от четни числа.

И така, ако наредените n-торки x и y се различават в четен брой позиции и наредените n-торки y и z се различават в четен брой позиции, то наредените n-торки x и z също се различават в четен брой позиции. Следователно релацията е транзитивна.

Щом релацията е рефлексивна, симетрична и транзитивна, тя е релация на еквивалентност.

б) Нека x и y са наредени n-торки от нули и единици, а X и Y са съответно множествата от позициите на техните единици. Тогава $X \Delta Y$ е множеството от позициите, в които n-торките x и y се различават. Следователно n-торките x и y са в релация тогава и само тогава, когато $|X \Delta Y| = |X| + |Y| - 2\ |X \cap Y|$ е четно число, т.е. когато $|X| + |Y|$ е четно число, а това е изпълнено точно когато $|X|$ и $|Y|$ са с еднаква четност (т.е. двете са четни или двете са нечетни).

Отговор: Има два класа на еквивалентност. Единият съдържа наредените n-торки с четен брой единици, а другият съдържа наредените n-торки с нечетен брой единици.

в) Всеки клас на еквивалентност се състои от елементи, всеки два от които се намират в релация помежду си. Следователно съответните им върхове са свързани два по два, т.е. образуват клика. Тогава на всеки клас на еквивалентност съответства клика в графа на релацията (и обратно). По определение кликовото число на графа е равно на максималния размер на клика, т.е. на броя на елементите на най-голямия от класовете на еквивалентност.

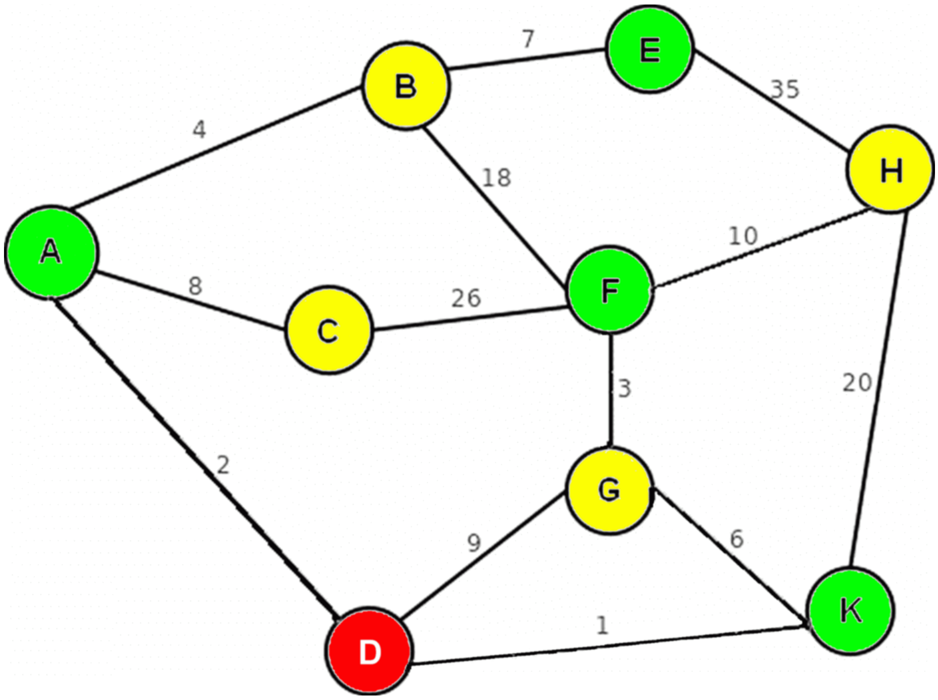
Инвертирането например на последния елемент на всяка наредена n-торка променя четността на броя на единиците и така задава изображение от единия към другия клас на еквивалентност.

$$
\begin{array}{ccc}
00000 & \longleftrightarrow & 00001 \\
01100 & \longleftrightarrow & 01101 \\
10001 & \longleftrightarrow & 10000 \\
11011 & \longleftrightarrow & 11010 \\
11110 & \longleftrightarrow & 11111 \\
\multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}
$$

Това изображение е биекция, защото повторното инвертиране възстановява първообраза. Ето защо двата класа на еквивалентност имат равен брой елементи — половината от всички наредени n-торки от нули и единици. Общият брой на n-торките е 2^n, половината е 2^{n-1}. Това е търсеното кликово число.

Отговор: Кликовото число на графа на релацията е 2^{n-1}.

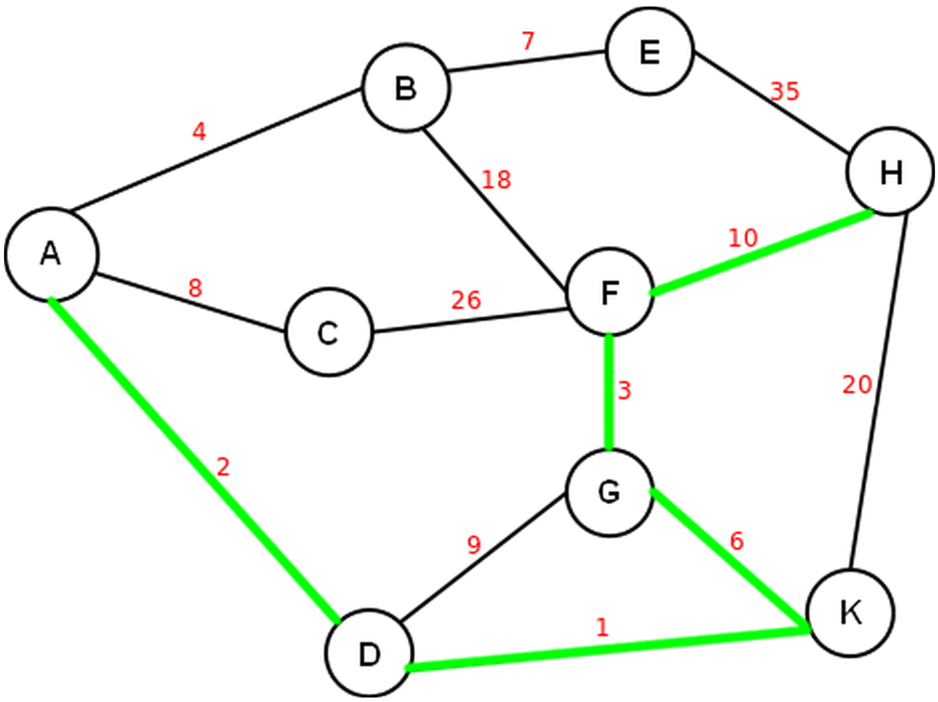
Задача 6. Както показва примерът, три цвята са достатъчни за оцветяване на върховете така, че да няма свързани едноцветни върхове.



Два цвята не стигат, тъй като графът има клика от три върха $(D, G$ и $K)$.

Извод: Върховото хроматично число на графа е равно на 3.

Най-къс път между два дадени върха на граф с неотрицателни тегла на ребрата се намира чрез алгоритъма на Дейкстра. Най-късият път от A до H е $ADKGFH$ (с дължина 22).



Графът е хамилтонов, защото съдържа хамилтонов цикъл, например $ABEHKDGFCA$. Графът не е ойлеров, т.е. не съдържа ойлеров цикъл, защото има върхове от нечетна степен (например $d(A) = 3$).