Упражнение 4 по Дискретни Структури, КН2, зимен семестър 2016-2017 г.

Индукция, Функции, Комбинаторика

1 Индукция

Задача 1. Докажете по индукция, че

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ : \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \, i^2 = (-1)^n \, n \left(\frac{n+1}{2} \right)$$

Решение: Ще докажем твърдението с индукция по n.
База: За $n = 1$ твърдението е

$$\sum_{i=1}^{1} (-1)^i \, i^2 = (-1)^1 \, 1 \left(\frac{1+1}{2} \right)$$

Лявата страна е:

$$(-1)^1 \, 1^2 = -1$$

Дясната страна е

$$(-1)^1 \, 1 \left(\frac{2}{2} \right) = -1$$

Твърдението в базовия случай е вярно. ✓
Индукционно предположение: Допускаме, че

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \, i^2 = (-1)^n \, n \left(\frac{n+1}{2} \right)$$

за някое цяло положително n.
Индукционна стъпка: Ще докажем твърдението за стойност на аргумента $n+1$. Твърдението е:

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \, i^2 = (-1)^{n+1} \, (n+1) \left(\frac{n+2}{2} \right) \tag{1}$$

Разглеждаме лявата страна:

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \, i^2 =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \, i^2 \right) + (-1)^{n+1}(n+1)^2 = \qquad \text{(съгласно индукционното предположение)}$$

$$(-1)^n \, n \left(\frac{n+1}{2} \right) + (-1)^{n+1}(n+1)^2 =$$

$$(-1)^n (n+1) \left(\frac{n}{2} - (n+1) \right) =$$

$$(-1)^n (n+1) \left(-\frac{n}{2} - 1 \right) =$$

$$(-1)^{n+1} (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) =$$

$$(-1)^{n+1} (n+1) \left(\frac{n+2}{2} \right)$$

Доказахме чрез еквивалентни преобразувания и индукционното предположение, че лявата страна на (1) е равна на дясната. □

Задача 2. Нека x е произволно реално число, такова че $x > -1$. Докажете по индукция, че

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ : (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Решение: Ще докажем твърдението с индукция по n.
База: За $n = 1$ твърдението е

$$1 + x \geq 1 + x$$

което е тривиално вярно. ✓
Индукционно предположение: Допускаме, че

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

за някое положително n.
Индукционна стъпка: Ще докажем твърдението за стойност на аргумента $n+1$. Твърдението е:

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x \tag{2}$$

Разглеждаме лявата страна:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq \qquad \text{(съгласно индукционното предположение)}$$

$$(1+nx)(1+x) =$$

$$1 + x + nx + nx^2 =$$

$$1 + (n+1)x + nx^2 \geq \qquad (\text{тъй като } nx^2 \geq 0)$$

$$1 + (n+1)x$$

Доказахме чрез еквивалентни преобразувания, индукционното предположение и очевидни неравенства, че лявата страна на (2) е по-голяма или равна на дясната. □

Задача 3. Докажете по индукция, че $11^n - 6$ се дели на 5 за всяко цяло положително n.

Решение:
База: Базовият случай е за $n = 0$. Твърдението става, "$11^0 - 6$ се дели на 5", което очевидно е вярно.
Индуктивна хипотеза: Да допуснем, че твърдението е вярно за произволно естествено число n.
Индуктивна стъпка: Да разгледаме твърдението за стойност на аргумента $n+1$: "$11^{n+1} - 6$ се дели на 5". Но

$$11^{n+1} - 6 = 11 \times 11^n - 6 = (10+1) \times 11^n - 6 = 10 \times 11^n + 11^n - 6$$

Очевидно 10×11^n се дели на 5, а $11^n - 6$ се дели на 5 от индуктивното предположение. Сумата на числа, делящи се на 5, задължително се дели на 5. С което показахме, че твърдението "$11^{n+1} - 6$ се дели на 5" е вярно. $\square$

Задача 4. Разгледайте следното доказателство по индукция:

> *Ще докажем, че $5n + 3 = 5(n-2) + 8$ за всяко естествено число n. Да допуснем, че твърдението е вярно за някакво естествено n. Разглеждаме твърдението за стойност на аргумента $n+1$:*
>
> $$\begin{aligned} &5(n+1) + 3 = 5((n+1) - 2) + 8 \quad \leftrightarrow \quad 5n + 5 + 3 = 5n + 5 - 10 + 8 \quad \leftrightarrow \\ &(5n+3) + 5 = (5n - 10 + 8) + 5 \quad \leftrightarrow \quad (5n+3) = (5n - 10 + 8) \quad \leftrightarrow \\ &\qquad 5n + 3 = 5(n-2) + 8 \end{aligned}$$
>
> *Но последното равенство е именно индукционното предположение и като такова е вярно. Следователно, твърдението е вярно за всяко естествено n.*

Какво бихте казали за това доказателство?

Решение: Твърдението очевидно е невярно: отворете скобите вдясно и извадете $5n$ от двете страни. Щом твърдението е невярно, няма как доказателството да е валидно. Грешката в това "доказателство" е липсата на база. Наистина, ако се опитаме да разгледаме базов случай за произволно конкретно естествено число n, ще получим невярно твърдение. $\square$

Задача 5. Докажете по индукция, че $\forall n \geq 1 : \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$. Можете да ползвате наготово изучаваните в час свойства на операциите върху множества.

Решение:
База: Заместваойки аргумента n с единица, получаваме твърдението $\overline{\bigcap_{i=1}^{1} A_i} = \bigcup_{i=1}^{1} \overline{A_i}$, което е същото като $\overline{A_1} = \overline{A_1}$, което е тривиално вярно.
Индуктивна хипотеза: Твърдението е вярно за произволна стойност $n \geq 1$ на аргумента.
Индуктивна стъпка: Да разгледаме твърдението за стойност на аргумента $n+1$. Лявата

страна е:

$$
\begin{aligned}
\overline{\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i} &= && \text{(от асоциативността на сечението)}\\
\overline{\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \bigcap A_{n+1}} &= && \text{(от закона на Де Морган)}\\
\overline{\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)} \bigcup \overline{A_{n+1}} &= && \text{(от инд. предположение)}\\
\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} \bigcup \overline{A_{n+1}} &= && \text{(от асоциативността на обединението)}\\
\bigcup_{i=1}^{n+1} \overline{A_i}
\end{aligned}
$$

□

Задача 6. Докажете по индукция, че $\forall n \geq 1 : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$.

Решение:
База: Замествайки аргумента n с единица, получаваме твърдението $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{1}$, което е същото като $\frac{1}{\sqrt{1}} \geq \sqrt{1}$, което е тривиално вярно.
Индуктивна хипотеза: Твърдението е вярно за произволна стойност $n \geq 1$ на аргумента.
Индуктивна стъпка: Да разгледаме твърдението за стойност на аргумента $n+1$. Лявата страна е $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Следната последователност от неравенства и равенства е в сила:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} &= && \text{(от асоциативността на събирането)}\\
\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} &\geq && \text{(от инд. предположение)}\\
\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} &=\\
\frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} &=\\
\frac{\sqrt{n^2+n}+1}{\sqrt{n+1}} &\geq\\
\frac{\sqrt{n^2}+1}{\sqrt{n+1}} &=\\
\frac{n+1}{\sqrt{n+1}} &=\\
\sqrt{n+1}
\end{aligned}
$$

Следователно, $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n+1}$. □

Задача 7. Докажете по индукция, че $\forall n \geq 1 : \sum\limits_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n$, където нотацията H_n означава $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Решение:
База: Заместваийки аргумента n с единица, получаваме твърдението $\sum_{k=1}^{1} H_k = (1+1)H_1 - 1$, което е същото като $H_1 = 2H_1 - 1$, което е същото като $\frac{1}{1} = 2 \times \frac{1}{1} - 1$, което е тривиално вярно.
Индуктивна хипотеза: Твърдението е вярно за произволна стойност $n \geq 1$ на аргумента.
Индуктивна стъпка: Да разгледаме твърдението за стойност на аргумента $n+1$. Лявата страна е $\sum_{k=1}^{n+1} H_k$. Следната последователност от равенства е в сила:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} H_k &= && \text{(от определението на } H_n\text{)}\\
\left(\sum_{k=1}^{n} H_k\right) + H_{n+1} &= && \text{(от инд. предположение)}\\
(n+1)H_n - n + H_{n+1} &= && \text{(от определението на } H_n\text{)}\\
(n+1)H_n - n + H_{n+1} + (n+1)H_{n+1} - (n+1)H_{n+1} &= &&\\
(n+1)H_n - n - (n+1)H_{n+1} + (n+2)H_{n+1} &= &&\\
(n+2)H_{n+1} + (n+1)\left(H_n - H_{n+1}\right) - n &= && \text{(от определението на } H_n\text{)}\\
(n+2)H_{n+1} + (n+1)\left(H_n - H_n - \frac{1}{n+1}\right) - n &= &&\\
(n+2)H_{n+1} + (n+1)\left(-\frac{1}{n+1}\right) - n &= &&\\
(n+2)H_{n+1} - 1 - n &= &&\\
(n+2)H_{n+1} - (n+1) & &&
\end{aligned}
$$

Следователно, $\sum_{k=1}^{n+1} H_k = (n+2)H_{n+1} - (n+1)$. □ □

Задача 8. Докажете по индукция, че за всяко крайно непразно множество A, броят на подмножествата на A с четен брой елементи е равен на броя на подмножествата с нечетен брой елементи.

Решение: Нека 2^A степенното множество на A. Дефинираме, че:

$$
\begin{aligned}
2^A_e &= \{X \mid X \in 2^A \text{ и } |X| \text{ е четно число.}\}\\
2^A_o &= \{X \mid X \in 2^A \text{ и } |X| \text{ е нечетно число.}\}
\end{aligned}
$$

Задачата се състои в това, да се докаже, че $\forall A$, такова че $A \neq \emptyset$, $|2^A_e| = |2^A_o|$. Доказателството е с индукция по $|A|$.
База: $|A| = 1$. Тогава

$$2^A = \{\emptyset, A\}$$

Очевидно

$$
\begin{aligned}
2^A_e &= \{\emptyset\}\\
2^A_o &= \{A\},
\end{aligned}
$$

така че $|2^A_e| = |2^A_o|$ е вярно.
Индуктивна хипотеза: Нека твърдението е вярно за всяко множество A, такова че $|A| = n$. Тоест,

$$\forall A, \text{ такова че } |A| = n \colon |2^A_o| = |2^A_e| \tag{3}$$

Индуктивна стъпка: Разглеждаме произволно множество A, такова че $|A| = n+1$. Нека a е произволен елемент на A. Очевидно 2^A се разбива на следните четири подмножества:

$$B_e = \{X \in 2^A \mid a \in X \text{ и } |X| \text{ е четно число}\}$$
$$B_o = \{X \in 2^A \mid a \in X \text{ и } |X| \text{ е нечетно число}\}$$
$$C_e = \{X \in 2^A \mid a \notin X \text{ и } |X| \text{ е четно число}\}$$
$$C_o = \{X \in 2^A \mid a \notin X \text{ и } |X| \text{ е нечетно число}\}$$

Очевидно

$$2^A_e = B_e \cup C_e$$
$$2^A_o = B_o \cup C_o$$

Тъй като $B_e \cap C_e = \emptyset$ и $B_o \cap C_o = \emptyset$,

$$|2^A_e| = |B_e| + |C_e| \tag{4}$$
$$|2^A_o| = |B_o| + |C_o| \tag{5}$$

Нека $A' = A \setminus \{a\}$. Съгласно индуктивната хипотеза (3),

$$|2^{A'}_e| = |2^{A'}_o| \tag{6}$$

Очевидно е, че $2^{A'}_e = C_e$ и $2^{A'}_o = C_o$. Следователно,

$$|C_e| = |C_o| \tag{7}$$

Ще покажем, че $|B_e| = |B_o|$. Забележете, че

$$|B_e| = |C_o| \tag{8}$$

понеже има биективно съответствие между елементите им:

- всеки елемент u на B_e се получава от точно един елемент v на C_o чрез „добавяне“ на a; по-формално, $u = v \cup \{a\}$,
- всеки елемент w на C_o се получава от точно един елемент z на B_e чрез „махане“ на a; по-формално, $w = z \setminus \{a\}$.

Аналогично,

$$|B_o| = |C_e| \tag{9}$$

понеже има биективно съответствие между елементите им:

- всеки елемент u на B_o се получава от точно един елемент v на C_e чрез „добавяне“ на a; по-формално, $u = v \cup \{a\}$,
- всеки елемент w на C_e се получава от точно един елемент z на B_o чрез „махане“ на a; по-формално, $w = z \setminus \{a\}$.

От (8), (7) и (9) следва, че $|B_e| = |C_o| = |C_e| = |B_o|$, а оттук съгласно транзитивността на равенстото имаме:

$$|B_e| = |B_o| \tag{10}$$

От (7), (10), (4) и (5) следва, че $|2^A_e| = |2^A_o|$. □

1.1 Засилване на твърдението, което доказваме

В някои случаи доказателството на даденото твърдение "не излиза", въпреки че твърдението е вярно. В такъв случай може да опитаме една техника: да докажем по индукция твърдение, което е по-силно от това, което ни е дадено. По принцип по-силните твърдения се доказват по-трудно, но в някои случаи—колкото и парадоксално да звучи—по-силните твърдения се доказват по-лесно, ако ползваме индукция.

Задача 9. Докажете, че

$$\text{За всяко } n \geq 1: \ \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n}} \tag{11}$$

Решение, първи опит: Базата е за $n = 1$. Лявата страна е $\frac{1}{2}$, а дясната е $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Действително лявата страна е по-малка от дясната. Базовият случай е доказан.

Допускаме, че твърдението е вярно за някаква стойност на аргумента n, и разглеждаме твърдението за стойност на аргумента $n+1$. За тази стойност, твърдението е

$$\underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{2n-1}{2n}}_{A} \times \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3(n+1)}} \tag{12}$$

Съгласно индукционното предположение, изразът, означен с A, е по-малък от $\frac{1}{\sqrt{3n}}$. Прилагайки това към лявата страна на неравенство (12), получаваме

$$A \times \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3n}} \times \frac{2n+1}{2n+2}$$

Дали обаче

$$\frac{1}{\sqrt{3n}} \times \frac{2n+1}{2n+2} \overset{?}{<} \frac{1}{\sqrt{3(n+1)}}$$

С тривиална алгебра се убеждаваме, че не е вярно:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{3n}} \times \frac{2n+1}{2n+2} &< \frac{1}{\sqrt{3(n+1)}} && \leftrightarrow \\
\frac{2n+1}{2n+2} &< \sqrt{\frac{n}{n+1}} && \leftrightarrow \\
\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+8n+4} &< \frac{n}{n+1} && \leftrightarrow \\
4n^3+4n^2+4n+4n^2+4n+1 &< 4n^3+8n^2+4n && \leftrightarrow \\
4n+1 &< 0
\end{aligned}$$

Провалът на доказателството *не означава*, че твърдението е невярно, а само че не сме успели да го докажем *по този начин.*

Решение, втори опит: Ще докажем по индукция следното твърдение

$$\text{За всяко } n \geq 2: \ \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \tag{13}$$

Базата е за $n = 2$. Лявата страна е $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$, а дясната е $\frac{1}{\sqrt{7}}$. Действително лявата страна е по-малка от дясната. Базовият случай е доказан.

Допускаме, че твърдението е вярно за някаква стойност на аргумента n, и разглеждаме твърдението за стойност на аргумента $n+1$. За тази стойност, твърдението е

$$\underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{2n-1}{2n}}_{A} \times \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}} \tag{14}$$

Съгласно индукционното предположение, изразът, означен с A, е по-малък от $\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$. Прилагайки това към лявата страна на неравенство (14), получаваме

$$A \times \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \times \frac{2n+1}{2n+2}$$

Остава да докажем, че

$$\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \times \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$$

Действително,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \times \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3n+4}} \quad &\leftrightarrow \\
\frac{2n+1}{2n+2} < \sqrt{\frac{3n+1}{3n+4}} \quad &\leftrightarrow \\
\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+8n+4} < \frac{3n+1}{3n+4} \quad &\leftrightarrow \\
12n^3+12n^2+3n+16n^2+16n+4 < 12n^3+24n^2+12n+4n^2+8n+4 \quad &\leftrightarrow \\
19n < 20n
\end{aligned}$$

С това доказателството на (13) приключва. Формално, твърдение (13) не влече твърдение (11), защото (13) е за $n \geq 2$. Но лесно се вижда, че (13) заедно с доказателството на (11) за $n = 1$ са по-силно твърдение от (11). □

Едно интуитивно обяснение защо техниката със засилване на твърдението (понякога) работи е, че доказателство по индукция прилича на катерене по стълба: ние стъпваме на индуктивното предположение и се "качваме" едно ниво нагоре, доказвайки индуктивната стъпка. При по-силно твърдение стъпалото, от което тръгваме, е по-високо.

Техниката със засилване на твърдението *е съвсем различно нещо* от доказателство чрез така наречената силна индукция, когато допускаме твърдението не просто за n, а за всички стойности на аргумента, по-малки или равни на n.

2 Функции

Задача 10. Докажете, че множеството

$$A = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \,|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

е изброимо безкрайно. Приемат се **само** подробни доказателства, следващи стриктно определението за изброимо безкрайно множество. $\mathbb{N}$ означава множеството от естествените числа $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Решение: Да разгледаме следната функция $f : A \to \mathbb{N}$, където входът a е прозволен елемент на A:

```
f(a) {
  k = 0;
  while (k*(k+1)/2 < a) {
   k ++; }
  return k; }
```

Това е програмен код (близък до C), а тази програмна функция f е реализация на математическата функция f[†]. Очевидно е, че за всяко число a от A, f(a) връща именно това число n, за което $\frac{1}{2}n(n+1)$ е равно на a.

Фактът, че f връща естествени числа и само естествени числа, е очевиден, така че кодомейнът действително е $\mathbb{N}$. Също така е очевидно, че функцията е тотална, понеже няма ограничение за това, кое число от A ще бъде подадено на входа ѝ. Ще покажем, че f е биекция. По дефиниция, една функция е биекция тогава и само тогава, когато е инекция и сюрекция. И така, доказателството, че функцията е биекция, се състои от две части: доказателство, че е инекция, и доказателство, че е сюрекция.
Доказателство, че f е инекция. Да разгледаме $f(a)$ и $f(b)$ за произволни различни елементи $a, b \in A$. Щом те са различни, единият е по-голям от другия. Щом са елементи на A, то те са числа от вида $\frac{1}{2}k(k+1)$ за естествено k. Нека $a = \frac{1}{2}k_a(k_a+1)$ и $b = \frac{1}{2}k_b(k_b+1)$. Без ограничение на общността, нека $a < b$. Тогава очевидно $k_a < k_b$. Очевидно програмната функция f с вход a ще върне k_a и с вход b ще върне k_b. Както отбелязахме, $k_a \neq k_b$. Това доказва, че функцията е инекция: за различни стойности от домейна, образите от кодомейна са различни.
Ще покажем, че f е сюрекция. Това означава, че всяко естествено число n е образ на някой елемен на A. Наистина, нека да разгледаме произволен $n \in \mathbb{N}$. Нека a е числото $\frac{1}{2}n(n+1)$. Тогава, съгласно вече направеното наблюдение, функцията f с вход a ще върне именно n.
И така, функцията е инекция и сюрекция, следователно е биекция. Щом има биекция между A и естествените числа, по дефиниция A е изброимо безкрайно. □

3 Комбинаторика

3.1 Принцип на Dirichlet

Задача 11. В 8 чекмеджета има 87 молива. Определете най-голямото цяло число n, такова че задължително има чекмедже с n молива.

Решение: Иначе казано, търсим числото n, такова че твърдението *"Съществува поне едно чекмедже с n молива"* е задължително вярно, но твърдението *"Съществува поне едно чекмедже с $n+1$ молива"* може и да не е вярно. Съгласно обобщения принцип на Dirichlet, съществува чекмедже с 11 молива. От друга страна, може да няма чекмедже с 12 молива—когато всички кутии имат по 10 или 11 молива. Отговорът е $n = 11$. □

Задача 12. Дадена е редица от n^2+1 числа, нито две от които не са равни. Да се докаже, че тази редица съдържа монотонна поредица с дължина $n+1$.

[†]Тези две неща: математическата функция и някаква нейна реализация чрез конкретна програма, не са едно и също нещо. Разликата е аналогична на разликата между число и конкретен запис на това число в конкретна бройна система.

Пояснение: "Монотонна" означава или нарастваща, или намаляваща. "Поредица" означава числа от редицата, които не са непременно съседи в редицата, но са написани в същата последователност, в която са в редицата. Примерно, ако $n = 3$ и редицата е

$$4,\ 7,\ 11,\ 2,\ 8,\ 3,\ 14,\ 1,\ 6,\ 9$$

монотонна поредица с дължина 4 е $4, 7, 8, 14$:

$$\boxed{4},\ \boxed{7},\ 11,\ 2,\ \boxed{8},\ 3,\ \boxed{14},\ 1,\ 6,\ 9$$

Решение: Да допуснем противното: всяка монотонна поредица е с дължина $\leq n$. Нека A означава дадената редица с дължина $n^2 + 1$:

$$A = a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$$

За всяко i, такова че $1 \leq i \leq n^2 + 1$, дефинираме двете подредици†:

$$A^i = a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{n^2+1}$$
$$A_i = a_1, a_2, \ldots, a_i$$

За всяко такова i, нека s_i е дължината на най-дълга растяща поредица в A_i с последен елемент a_i и нека t_i е дължината на най-дълга намаляваща поредица в A_i с пръв елемент a_i. Очевидно, $\forall i(s(i) \geq 1 \land t(i) \geq 1)$, тъй като такива поредици съдържат поне a_i.

От началното допускане следва, че $\forall i(s_i \leq n \land t_i \leq n)$. Следователно,

$$1 \leq s_i \leq n$$
$$1 \leq t_i \leq n$$

за всяко i. Тъй като s_i и t_i вземат цели стойности, следва, че за всяко от тях стойността му е една от най-много n възможни. Прилагайки принципа на умножението заключаваме, че наредената двойка (s_i, t_i) има стойност измежду най-много n^2 възможни. Но i-тата са $n^2 + 1$ на брой. Съгласно принципа на Dirichlet, съществуват две различни стойности на променливата i, да ги наречем j и k, такива че $(s_j, t_j) = (s_k, t_k)$, тоест

$$s_j = s_k$$
$$t_j = t_k$$

Да разгледаме елементите на A, които са на позиции j и k, които ние наричаме съответно a_j и a_k. Тъй като всички елементи на A са различни, $a_j \neq a_k$. Да допуснем, че без ограничение на общността, че $j < k$. Значи, a_j и a_k са разположени в A така:

$$A = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, a_j \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, a_k \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

I Първо да допуснем, че $a_j < a_k$. Тъй като s_j е дължината на най-дълга растяща поредица, завършваща с a_j:

$$A = \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, a_j}_{\text{нарастваща поредица с дължина } s_j} \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, a_k \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

†За разлика от поредица, при подредица се иска елементите да са съседи в A

и $a_j < a_k$, то в A има нарастваща поредица с дължина $s_j + 1$, завършваща с a_k; а именно, състояща се от вече споменатата поредица, завършваща с a_j, плюс a_k накрая:

$$A = \underbrace{\underbrace{\dots\dots\dots\dots\dots\dots a_j}_{\text{нарастваща поредица с дължина } s_j} \dots\dots\dots\dots\dots\dots a_k}_{\text{нарастваща поредица с дължина } s_j+1} \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Но тогава $s_k > s_j$, което противоречи на факта, че по конструкция $s_j = s_k$.

II Сега да допуснем, че $a_j > a_k$. Тъй като t_k е дължината на най-дълга намаляваща поредица, започваща с a_k:

$$A = \dots\dots\dots\dots\dots\dots a_j \dots\dots\dots\dots\dots\dots \underbrace{a_k \dots\dots\dots\dots\dots\dots}_{\text{намаляваща поредица с дължина } t_k}$$

и $a_j > a_k$, то в A има намаляваща поредица с дължина $t_k + 1$, започваща с a_j; а именно, състояща се от вече споменатата поредица, започваща с a_k, плюс a_j в началото:

$$A = \dots\dots\dots\dots\dots\dots \underbrace{a_j \dots\dots\dots\dots\dots\dots \underbrace{a_k \dots\dots\dots\dots\dots\dots}_{\text{намаляваща поредица с дължина } t_k}}_{\text{намаляваща поредица с дължина } t_k+1}$$

Но тогава $t_j > t_k$, което противоречи на факта, че по конструкция $t_j = t_k$.
Следователно, първоначалното ни допускане, че най-дългата монотонна поредица не е по-дълга от n, е погрешно. □

Задача 13. Нека $A = \{10, 11, \dots, 99\}$. Докажете, че във всяко десет елементно подмножество на A съществуват две непразни непресичащи се подмножества с еднаква сума на елементите.

Решение: Всяко 10 елементно подмножество има $2^{10} - 1 = 1023$ непразни подмножества. От друга страна, $\forall B \subset A$, такова че $1 \leq |B| \leq 10$, е в сила:

$$10 \leq \sum_{x \in B} x \leq 90 + 91 + \dots 99 = 935$$

Оттук виждаме, че $\sum_{x \in B} x$ има не повече от 935 различни стойности. Но тогава броят на възможните суми е по-малък от броя на подмножествата. Прилагаме принципа на Dirichlet и виждаме, че поне две подмножества имат една и съща сума. □

Задача 14. Професор X. твърди, че е създал толкова добра компресираща програма, че с нея може да "свие" произволен файл поне с единица. Възможно ли е това?

Решение: Професорът лъже, ако става дума за компресия без загуба на информация. Под "компресираща програма" се разбира такава програма, който може да възстанови първоначалния файл с точност до един бит. Всяка компресираща програма е частична функция от дадено множество символни последователности (стрингове) в друго множество стрингове. Щом професорът твърди, че неговата програма работи върху всички файлове, значи за дадена дължина n на файла (който ще бъде "сваван"), компресиращата програма реализира *тотална* функция f с домейн с мощност q^n и кодомейн с мощност q^m за $m \leq n-1$. Тук q е броят на символи във файловете; q е две, ако разглеждаме файловете като булеви вектори, но ако разглеждаме файловете като последователности от байтове, q е $2^8 = 256$. Компресиращите програми трябва да реализират инекции, ако става дума за компресия без загуба на информация. Не е задължително да са биекции, тоест може да не са сюрекции, тоест може да има стрингове, които не са образи на никои стрингове, но инективност е задължителна. Ако компресиращата програма реализира не-инекция, възстановяването на оригиналния файл в някои случаи ще е невъзможно.

Степенният показател в израза за мощността на кодомейна е по-малък от n заради твърдението на професора, че програмата му свива всеки файл – в частност, тя прави от всеки файл с големина n друг файл с големина $< n$. Тогава кодомейнът има мощност, по-малка от тази на домейна.

Съгласно принципа на Dirichlet, не съществува тотална инективна функция, чийто домейн има по-голяма мощност от кодомейна. □

Задача 15. В продължение на една година от 365 дена Иван се упражнява по комбинаторика, решавайки задачи. Всеки ден от тази година той решава поне една задача, но не решава повече от 500 задачи общо за годината. Докажете, че през тази година има интервал от последователни дни, през които Иван решава точно 229 задачи.

Решение: Нека x_i да е броят задачи, решени от Иван на ден i или преди него, за $1 \leq i \leq 365$. Очевидно последователността

$$A = (x_1, x_2, \ldots, x_{365})$$

е строго нарастваща, от което следва, че в нея няма еднакви числа. Освен това, $\forall i, 1 \leq i \leq 365 : 1 \leq x_i \leq 500$. Да разгледаме друга последователност:

$$B = (x_1 + 229, x_2 + 229, \ldots, x_{365} + 229)$$

Тя също е строго нарастваща и в нея също няма еднакви числа. Освен това $230 \leq x_i + 229 \leq 729$. Сега да разгледаме последователността

$$C = (\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_{365}}_{A}, \underbrace{x_1 + 229, x_2 + 229, \ldots, x_{365} + 229}_{B})$$

Очевидно елементите на C са точно 730 цели положителни числа, понеже C се състои от копие A, слепено с копие на B. Но за всеки елемент на C има не повече от 729 възможни стойности. Съгласно комбинаторния принцип на Dirichlet, има поне два елемента на C с една и съща стойност. Както вече установихме, елементите на A са два по два различни и елементите на B са два по два различни. Следователно, всяка двойка елементи на C с еднаква стойност се състои от един елемент от копието на A и от един елемент от копието на B. С други думи, съществуват индекси j и k, такива че $1 \leq j \leq 365$ и $1 \leq k \leq 365$ и $x_j = x_k + 299$. Това означава, че Иван е решил точно 229 задачи от ден $k+1$ включително до ден j включително. □

Задача 16. Докажете, че за всеки избор на пет точки с целочислени координати в равнината, съществуват поне две точки a и b измежду петте, такива че средата на отсечката с краища a и b има целочислени координати.

Решение: Съществуват точно четири различни възможности за четността на координатите на петте точки. А именно, за всяка от петте точки, да я наречем $p = (q_1, q_2)$:

1. q_1 е четно и q_2 е четно,
2. q_1 е нечетно, а q_2 е четно,
3. q_1 е четно, а q_2 е нечетно,

4. q_1 е нечетно и q_2 е нечетно.

От принципа на Dirichlet следва, че поне две от точките имат една и съща четност на координатите си: или и двете координати са четни, или и двете са нечетни. Да наречем тези точки a и b и нека $a = (x_1, y_1)$ и $b = (x_2, y_2)$. Нека средата на отсечката с краища a и b е точка c. Известно е, че $c = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. Щом x_1 и x_2 имат една и съща четност, сумата им е четно число, така че $\frac{x_1+x_2}{2}$ е цяло число. Напълно аналогично, $\frac{y_1+y_2}{2}$ е цяло число. □

3.2 Свойства и приложения на биномния коефициент

Задача 17. Докажете, че

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Решение:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \\
&\left(\sum_{\substack{k \in \{0,1,\ldots,n\} \\ k \text{ четно}}} (-1)^k \binom{n}{k} \right) + \left(\sum_{\substack{k \in \{0,1,\ldots,n\} \\ k \text{ нечетно}}} (-1)^k \binom{n}{k} \right) = \\
&\left(\sum_{\substack{k \in \{0,1,\ldots,n\} \\ k \text{ четно}}} \binom{n}{k} \right) - \left(\sum_{\substack{k \in \{0,1,\ldots,n\} \\ k \text{ нечетно}}} \binom{n}{k} \right)
\end{aligned} \tag{15}$$

Известно е, че $\binom{n}{k}$ е броят на подмножествата, имащи k елемента, на кое да е n-елементно множество A. Тогава, очевидно,

$$\sum_{\substack{k \in \{0,1,\ldots,n\} \\ k \text{ четно}}} \binom{n}{k} \text{ е броят на подмножествата на } A \text{ с четен брой елементи}$$

$$\sum_{\substack{k \in \{0,1,\ldots,n\} \\ k \text{ нечетно}}} \binom{n}{k} \text{ е броят на подмножествата на } A \text{ с нечетен брой елементи}$$

Съгласно Задача 8, тези две суми са еднакви. Следва, че изразът (15) е нула. □

Задача 18. Колко са булевите вектори с n единици и m нули?

Решение: Да разгледаме тези вектори като характеристични вектори върху множество с $n + m$ елемента. Съществува очевидна биекция между тези вектори, от една страна, и подмножествата с мощност n, от друга. Известно е, че броят на тези подмножества е $\binom{n+m}{n}$, което е същото като $\binom{n+m}{m}$. Съгласно принципа на биекцията, отговорът е $\binom{n+m}{n}$. □

Задача 19. В колко булеви вектори с n единици и m нули, след всяка единица следва поне една нула?

Решение: Удобно е да третираме всеки подвектор единица-нула като едно неделимо блокче $\boxed{10}$. Примерно, ако векторът е 10001010010, да си го представим не като последователност от единадесет елемента, а като последователност от седем елемента: четири блока единица-нула и още три нули между тях:

$$\boxed{10}\,00\,\boxed{10}\,\boxed{10}\,0\,\boxed{10}$$

Задачата се свежда до задачата, колко вектори от n елемента от един вид (блокчета единица-нула) и $m - n$ елемента от друг вид ("свободни" нули) има. С цел по-ясно представяне на решението, нека сменим символите и кажем, че новата задача е: колко вектори от p елемента от един вид и q елемента от друг вид има. Но ние знаем отговора – съгласно Задача 18, той е $\binom{p+q}{p}$. Заместваме p с n и q с $m-n$ и получаваме $\binom{n+m-n}{n} = \binom{m}{n}$. Забележете, че отговорът е правилен дори когато $n > m$: тогава биномният коефициент $\binom{m}{n}$ е нула, което е точният отговор. □

Задача 20. Колко булеви вектори с n единици и m нули има нямат съседни единици?

Решение: Задачата прилича на Задача 19, но не е същата. В тази задача отговорът "брои" и вектори, завършващи на единица, примерно 10101, които не биват "броени" от Задача 19. Нека S е множеството от векторите, за които става дума в тази задача. S се разбива на S' и S'', където S' са векторите, завършващи на нула, а S'' са векторите, завършващи на единица. Съгласно принципа на разбиването, $|S| = |S'| + |S''|$. Но ние знаем колко е $|S'|$, защото векторите от S' са точно тези, за които става дума в Задача 19: $|S'| = \binom{m}{n}$.

Да разгледаме S''. Всеки вектор от S' завършва на единица, като вляво от нея има задължително нула (иначе би имало две съседни единици). Тогава съществува очевидна биекция между векторите от S'' и булевите вектори $n - 1$ единици и m нули, в които след всяка единица следва поне една нула. Съгласно Задача 19, последните са $\binom{m}{n-1}$. От принципа на биекцията следва, че $|S''| = \binom{m}{n-1}$.

Отговорът е $|S| = \binom{m}{n} + \binom{m}{n-1}$, което съгласно добре известно свойство на биномните коефициенти е $\binom{m+1}{n}$. □

Задача 21. n на брой хора стоят в редица. По колко начина можем да изберем k от тях, $k \leq n$, така че да не изберем нито двама души, които са един до друг в редицата?

Решение: Всеки избор на k човека от общо n, които са подредени линейно с фиксирана подредба, отговаря биективно на характеристичен вектор с $n - k$ единици и k нули. Допълнителното условие да не бъдат подбрани съседи се "превежда" така: характеристичният вектор да няма съседни единици. Съгласно Задача 20, отговорът е $\binom{k+1}{n-k}$. Забележете, че този отговор остава верен дори когато $k > n$. Тогава биномният коефициент има долен индекс нула, горен индекс по-голям от нула, и самият той е нула, което точно съответства на факта, че такива избори при $k > n$ са невъзможни. □

Задача 22. Колко булеви вектори с дължина n не съдържат нито 11, нито 00 като подвектори?

Отговор: Ако $n = 0$ има точно един такъв вектор: празният. В противен случай са точно два:

$10101010\ldots0$ и $01010101\ldots1$ при четно n

$10101010\ldots1$ и $01010101\ldots0$ при нечетно n

□

Задача 23. Колко булеви вектори с дължина n не съдържат 11 като подвектор?

Решение: Очевидно е, че ако единиците във вектори са "прекалено много", то подвектори 11 са неизбежни. Максималният брой единици, при който може да няма подвектор 11, е $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, примерно:

$$\begin{aligned} 10101010: &\quad \text{когато } n = 8, \text{ най-много } 4 = \left\lceil \tfrac{8}{2} \right\rceil \text{ единици} \\ 101010101: &\quad \text{когато } n = 9, \text{ най-много } 5 = \left\lceil \tfrac{9}{2} \right\rceil \text{ единици} \end{aligned}$$

Нека p е броят на единиците, а q е броят на нулите. От условието имаме $p + q = n$. Току-що установихме, че $p \in \{0, 1, \ldots, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\}$. За всеки конкретни p и q, броят на търсените вектори е $\binom{q+1}{p}$ съгласно Задача 20, тоест $\binom{n-p+1}{p}$. Съгласно принципа на разбиването, отговорът е:

$$\sum_{p=0}^{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} \binom{n-p+1}{p}$$

□

Определение 1. Кръгов вектор *ще наричаме вектор, на който първата и последната позиция (също) се считат за съседни. Ако кръговият вектор е* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *в него съседствата са* a_1 *с* a_2, a_2 *с* a_3, ..., a_{n-1} *с* a_n, a_n *с* a_1. *Кръговите вектори* не са *еквивалентни спрямо ротация, тъй като имат номерирани позиции;* 0001 *и* 0010 *са различни кръгови вектори.* □

Задача 24. Колко кръгови булеви вектори с n единици и m нули нямат съседни единици?

Решение: Да разгледаме множеството S от линейните (тоест, "обикновените") вектори с n единици и m нули без съседни единици. От Задача 20 знаем, че $|S| = \binom{m+1}{n}$. Нека $\tilde{S}$ е подмножеството на S от тези вектори, които започват и завършват с единица. Търсеният в тази задача отговор е $|S| - |\tilde{S}|$, тъй като кръговите вектори без съседни единици са точно тези линейни вектори без съседни единици, които освен това нямат единици в най-лявата и най-дясната позиции.

Да разгледаме $\tilde{S}$. Да дефинираме, че $p = n + m$. Очевидно, $p \geq 3$. Ако $p = 3$, то $\tilde{S}$ се състои само от един вектор: 101. Ако $p \geq 4$, то всеки вектор от $\tilde{S}$ е от вида:

$$\underbrace{1\,0\,\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{дължина } p-4}\,0\,1}_{\text{дължина } p}$$

Посоченият подвектор с дължина $p - 4$ има $n - 2$ единици, $m - 2$ нули и единственото ограничение е, че няма съседни единици. Следователно, ако $p \geq 4$, то има очевидна биекция между $\tilde{S}$ и множеството на линейните вектори с $n - 2$ единици, $m - 2$ нули и без съседни единици. Съгласно Задача 20, последните имат брой $\binom{m-2+1}{n-2} = \binom{m-1}{n-2}$. Този резултат е в сила дори когато $p = 3$: тогава $n = 2$, $m = 1$ и $\binom{m-1}{n-2} = \binom{0}{0} = 1$.

И така, отговорът на задачата е

$$
\begin{aligned}
|S| - |\tilde{S}| &= \binom{m+1}{n} - \binom{m-1}{n-2} \\
&= \frac{(m+1)!}{(m-n+1)!\,n!} - \frac{(m-1)!}{(m-1-(n-2))!\,(n-2)!} \\
&= \frac{(m+1)!}{(m-n+1)!\,n!} - \frac{(m-1)!\,n(n-1)}{(m-n+1)!\,n!} \\
&= \frac{(m-1)!}{(m-n+1)!\,n!}\left((m+1)m - n(n-1)\right) \\
&= \frac{(m-1)!}{(m-n+1)!\,n!}\left(m^2 + m - n^2 + n\right) \\
&= \frac{(m-1)!}{(m-n+1)!\,n!}\left((m-n)(m+n) + (m+n)\right) \\
&= \frac{(m-1)!(m+n)}{(m-n+1)!\,n!}\left(m-n+1\right) \\
&= \frac{(m-1)!(m+n)}{(m-n)!\,n!} \\
&= \frac{m+n}{m} \times \frac{m!}{(m-n)!\,n!} \\
&= \frac{m+n}{m}\binom{m}{n}
\end{aligned}
$$

□

Задача 25. Рицарите на кръглата маса са 12. Те винаги сядат около масата по един и същи начин. Освен това, между рицарите има вражди: всеки рицар е във вражда с точно тези двама рицари, които са негови съседи около масата. По колко начина може да бъдат подбрани 5 рицаря от 12-те за мисия, ако искаме в избраната група да няма вражди?

Решение: Всяко избиране на 5 от 12 рицаря може да се представи чрез характеристичен вектор от 5 единици и 7 нули. Векторът обаче не е линеен, а кръгов, и не трябва да съдържа съседни единици – това следва от "кръговото враждуване" на рицарите около масата и изискването да не бъдат избрани враждуващи рицари.

Задачата е същата като задачата, колко кръгови вектора с 5 единици и 7 нули не съдържат съседни единици. Съгласно Задача 24, отговорът е $\frac{7+5}{7}\binom{7}{5} = 36$. □

Задача 26. Нека n е нечетно, тоест $n = 2k+1$ за някое $k \in \mathbb{N}$. Разгледайте биномния коефициент $\binom{n}{k}$.

1. Докажете, че $\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}$.
2. Докажете, че $\binom{n}{k'} < \binom{n}{k}$ за всяко $k' < k$ и $\binom{n}{k''} < \binom{n}{k+1}$ за всяко $k'' > k+1$.
3. Докажете, че $\binom{n}{k}$ е нечетно число <u>тогава и само тогава</u>, когато $n = 2^m - 1$ за някое $m \in \mathbb{N}^+$.

Решение:

1. $\binom{n}{k} = \binom{2k+1}{k} = \frac{(2k+1)!}{k!(k+1)!} = \binom{2k+1}{k+1} = \binom{n}{k+1}$.

2.

$$\binom{n}{k'} < \binom{n}{k} \leftrightarrow \frac{n(n-1)\cdots(n-k'+1)}{k'!} < \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \leftrightarrow$$
$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k'+1)}{k'!} < \frac{n(n-1)\cdots(n-k'+1)\,(n-k')\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots(k'+1)\,k'!} \leftrightarrow$$
$$1 < \frac{(n-k')\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots(k'+1)} \leftrightarrow 1 < \frac{\prod_{i=k'}^{k-1} n-i}{\prod_{i=0}^{k-k'-1} k-i} \leftrightarrow 1 < \frac{\prod_{i=0}^{k-k'-1} n-k'-i}{\prod_{i=0}^{k-k'-1} k-i}$$
$$1 < \prod_{i=0}^{k-k'-1} \frac{n-k'-i}{k-i} \tag{16}$$

Но $\frac{n-k'-i}{k-i} > 1$, понеже $k > k'$ и $n > 2k$:

$$\frac{n-k'-i}{k-i} > 1 \leftrightarrow n-k'-i > k-i \leftrightarrow n-k' > k \leftrightarrow n > k+k'$$

Щом общият множител на произведението в дясната страна на неравенство (16) е по-голям от едно, то цялото произведение е по-голямо от едно и неравенството е вярно.

Фактът, че $\binom{n}{k''} < \binom{n}{k+1}$, се доказва аналогично.

3. Разглеждаме $\binom{n}{k}$, което е $\binom{2k+1}{k}$:

$$\binom{2k+1}{k} = \frac{(2k+1)(2k)(2k-1)\cdots(k+3)(k+2)}{k(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$$

Очевидно множителите в знаменателя в нарастващ ред, последвани от множителите в числителя в нарастващ ред, образуват нарастваща непрекъсната последователност от 1 до $2k+1 = n$ с едно изключение: липсва $k+1$.

Сега да разгледаме естествените положителни числа в нарастващ ред и под всяко от тях, броят на неговите множители-двойки в червено:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	…
0	1	0	2	0	1	0	3	0	1	0	2	0	1	0	4	0	1	0	2	0	1	0	3	0	1	0	…

Червената редица от броевете на множителите-двойки не е периодична, но лесно се забелязва следната закономерност. Да наречем червената редица, $a_0, a_1, a_2, \cdots$. Тя е безкрайна, но всяка нейна **крайна** подредица $\mathcal{S}_p$ от p на брой последователни стойности, започваща от a_0:

$$\mathcal{S}_p = a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}$$

където p е число от вида $2^m - 1$ за някое $m \in \mathbb{N}^+$, се получава от "слепването" на подредицата $\mathcal{S}_{p-1}$, числото p, и отново подредицата $\mathcal{S}_{p-1}$:

$$\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{p-1}, p, \mathcal{S}_{p-1}$$

Ако кажем освен това, че $\mathcal{S}_0$ е 0, имаме индуктивна дефиниция за крайните редици $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ и така нататък:

$$\mathcal{S}_0 = 0$$
$$\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{p-1}, p, \mathcal{S}_{p-1} \quad \text{за } p > 0$$

Примерно,

$$\mathcal{S}_0 = 0$$
$$\mathcal{S}_1 = 0, 1, 0$$
$$\mathcal{S}_2 = 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0$$
$$\mathcal{S}_3 = 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 3, 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0$$
$$\mathcal{S}_4 = 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 3, 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 4, 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 3, 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0$$

Да се върнем на биномния коефициент

$$\binom{2k+1}{k} = \frac{(2k+1)(2k)(2k-1)\cdots(k+3)(k+2)}{k(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$$

Ключовото наблюдение е, че ако си представим редицата $1, 2, \cdots, k, k+1, k+2, k+3, \cdots, 2k+1$ **без** липсващо число, нейната съответна редица от бройките на множителите-двойки е част от някоя $\mathcal{S}_p$, която се простира от левия край на $\mathcal{S}_p$ донякъде.

Първо да допуснем, че $n = 2k+1$ е число от вида $2^m - 1$ за някое $m \in \mathbb{N}^+$. Тогава липсващото число $k+1$ е 2^{m-1}. Твърдим, че в този случай бройките на множителите-двойки в числителя и в знаменателя са равни, от което веднага следва, че дробта е нечетно число. Да видим защо тези бройки са равни. Да съпоставим елемент по елемент редиците $1, 2, \ldots, 2k, 2k+1$ (без липсващо число) и $\mathcal{S}_{m-1}$:

$$\begin{array}{rccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & \cdots & k & k+1 & k+2 & k+3 & \cdots & 2k & 2k+1 \\ \mathcal{S}_{m-1} = & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & m-1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{array}$$

Както вече видяхме, $\mathcal{S}_{m-1}$ се състои от едно копие на $\mathcal{S}_{m-2}$, следвано от $m-1$, следвано от друго копие на $\mathcal{S}_{m-2}$. Но числото $k+1$, на което съответства $m-1$, липсва в биномния коефициент (такъв множител няма нито в числителя, нито в знаменателя), следователно няма множител нито в числителя, нито в знаменателя, който да има $m-1$ множителя-двойки. А за всеки от множителите в числителя има съответен множител в знаменателя, който има точно същия брой множители-двойки, което следва веднага от наличието на две копия на $\mathcal{S}_{m-2}$ в $\mathcal{S}_{m-1}$. Доказахме, че когато $n = 2k+1$ е число от вида $2^m - 1$ за някое $m \in \mathbb{N}^+$, биномният коефициент е нечетно число.

Да разгледаме алтернативата: $n = 2k+1$ **не е** число от вида $2^m - 1$ за някое $m \in \mathbb{N}^+$. Отново редицата от множителите-двойки за знаменателя и числителя е част от някое $\mathcal{S}_{m-1}$, но този път липсващото число $k+1$ съответства не на $m-1$, а на някой друг от "червените" елементи. Веднага се вижда, че бройките на множителите-двойки в числителя и в знаменателя не са равни, така че биномният коефициент е четен (знаем, че биномният коефициент е цяло число, така че няма как множителите-двойки в знаменателя да са повече; повечето множители-двойки са в числителя). □

3.3 Принципи на комбинаториката (без вкл-изкл)

Задача 27. Разгледайте множеството от първите $2n$ цели положителни числа. По колко начина може да бъдат наредени в редица, така че за всяка двойка съседни числа в редицата, сумата на тези числа не е четно число?

Решение: Сумата на две числа е четно число тогава и само тогава, когато или и двете числа са четни, или и двете числа са нечетни. Следователно, във въпросните наредби няма две съседни четни числа и няма две съседни нечетни числа. С други думи, всяка от тези редици е алтернираща редица от вида

четно нечетно четно нечетно ...... четно нечетно

или

нечетно четно нечетно четно ...... нечетно четно

Редиците от първия вид са $n! \times n!$, редиците от втория вид са също толкова, така че отговорът е $2\,(n!)^2$. □

Задача 28. Да допуснем, че във всеки курс на ФМИ (първи, втори, трети и четвърти) има един и същи брой n студенти. По колко начина можем да разбием множеството от студентите на ФМИ на четворки, като във всяка четворка има по точно един студент от всеки курс? Четворките нямат наредба, нито има наредба между четворките.

Решение: Да си представим, че генерираме четворките последователно. За първата четворка имаме избор от n първокурсника, n второкурсника, n третокурсника и n четвъртокурсника. Има n^4 начина да изберем по един студент от всеки курс, което прави общо n^4 начина за първата четворка. За втората четворка начините са $(n-1)^4$, за третата са $(n-2)^4$, и така нататък, за последната четворка има $1^4 = 1$ начина. Умноавайки тези количества, получаваме

$$n^4 \times (n-1)^4 \times (n-2)^4 \times \cdots 2^4 \times 1^4 = (n!)^4$$

Но това не е верният отговор, защото всяка от четворките бива броена $n!$ пъти в този израз. За да получим верният отговор, трябва да разделим това количество на $n!$. И така, отговорът е

$$\frac{(n!)^4}{n!} = (n!)^3$$

□

Задача 29. Дадена е електрическа машина с 26 входа и 26 изхода. На всеки вход отговаря точно една буква от латинската азбука $\boxed{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots, \mathcal{Z}}$, като това съответствие е фиксирано и не може да бъде променяно. Казваме, че във вход 1 "влиза" $\mathcal{A}$, във вход 2 "влиза" $\mathcal{B}$, и така нататък, във вход 26 "влиза" $\mathcal{Z}$. Изходите са номерирани и на всеки изход "излиза" точно една от латинските букви, но съответствието между изходи и букви не е фиксирано, а може да бъде променяно от оператора на машината по следния начин. Машината има *щекерпанел*: панел върху лицевата страна на машината, върху който има 26 малки кръгли отвора с еднакъв диаметър. Всеки отвор на панела е маркиран с точно една от латинските букви. Операторът разполага с 13 еднакви кабелчета, всяко с два накрайника. Дадено кабелче се използва, като накрайниците му се пъхат в два от отворите. В един отвор не може да бъдат пъхнати два накрайника. Операторът може да използва между 0 и 13 кабелчета. Кабелчетата са достатъчно дълги, за да свържат и най-отдалечените отвори. Ефектът от използването на кабелчетата е следният:

- Ако не бъде използвано нито едно кабелче, на изход 1 излиза $\mathcal{A}$, на изход 2 излиза $\mathcal{B}$, и така нататък, на изход 26 излиза $\mathcal{Z}$.
- Ако бъде използвано точно едно кабелче, ефектът е това и единствено това, че буквите, които то свързва на щекерпанела, биват разменени. Примерно, ако на щекерпанела кабелчето свързва $\mathcal{C}$ с $\mathcal{T}$, то на изход 3 излиза $\mathcal{T}$, на изход 20 излиза $\mathcal{C}$, а на всеки друг изход излиза същата буква, която би излизала, ако на щекерпанелът нямаше кабелчета.

- Ако бъдат използвани точно две кабелчета на щекерпанела, техните съответни букви биват разменени, останалите букви излизат все едно няма кабелчета. Примерно, ако на щекерпанела едното кабелче свързва $\mathcal{C}$ с $\mathcal{T}$, а другото свързва $\mathcal{A}$ с $\mathcal{M}$, на изход 1 излиза $\mathcal{M}$, на изход 3 излиза $\mathcal{T}$, на изход 13 излиза $\mathcal{A}$, на изход 20 излиза $\mathcal{C}$, а на всеки друг изход излиза същата буква, която би излизала, ако на щекерпанелът нямаше кабелчета.

- ...

- Ако бъдат използвани всички 13 кабелчета на щекерпанела, всички двойки букви биват разменени по двойки съгласно това, коя с коя буква е свързана на щекерпанела.

Очевидно, тази машина реализира разместване на буквите между входа и изхода. Колко различни размествания на буквите може да бъдат реализирани при използване на 10 кабелчета? А при използване на 13 кабелчета? Сравнете тези числа с всички теоретично възможни размествания на 26-те букви – става дума не за размените, които *тази* машина реализира, а максималният брой размествания, които са теоретично възможни. На какво се дължи голямата разлика между първите две числа и третото?

Решение: Ако се ползват 10 кабелчета, то точно 20 букви участват в размествания по двойки, а 6 букви не участват. Има точно $\binom{26}{20} = \binom{26}{6}$ възможности за избор на букви-участници. За всеки от тези избори, начините да бъдат свързани буквите-участници по двойки са

$$19 \times 17 \times 15 \times \cdots \times 3 \times 1 = \prod_{i=1}^{10} (2i-1) = 654\,729\,075$$

Разсъждението е следното: първата буква може да бъде свързана с двойка с коя да е от останалите 19, след това остават 18 букви, за първата има 17 букви-кандидати, и така нататък. Отговорът за 10 кабелчета е

$$\binom{26}{6} \times \prod_{i=1}^{10} (2i-1) = 150\,738\,274\,937\,250 \approx 10^{14.2}$$

Аналогично, отговорът за 13 кабелчета е

$$\prod_{i=1}^{13} (2i-1) = 7\,905\,853\,580\,625 \approx 10^{12.9}$$

От друга страна, всички пермутации на 26 букви са

$$26! = 403\,291\,461\,126\,605\,635\,584\,000\,000 \approx 10^{26.6}$$

Прави впечатление, че това число е много по-голямо от броя на пермутациите, които реализира въпросната машина. Очевидно машината реализира само нищожно малка част от всички възможни пермутации. Машината реализира пермутации чрез разменяне на местата на двойки елементи. Не всяка пермутация може да бъде получена по този начин. Примерно, пермутацията, при която $\mathcal{A}$ отива на мястото на $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ отива на мястото на $\mathcal{C}$, ..., $\mathcal{Y}$ отива на мястото на $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{Z}$ отива на мястото на $\mathcal{A}$ не може да бъде получена чрез (еднократна) размяна на двойки съседни елементи. Получените числени данни навеждат на мисълта, че пермутациите, които се получават чрез разменяне на двойки са нищожно малка част от всички пермутации, при голям брой на участващите елементи. □

3.4 Принцип на включването и изключването

Задача 30. В група от студенти всеки владее поне един език от анлийски, френски и немски. Нека A_E е подмножеството на студентите, владеещи английски, A_F е подмножеството на студентите, владеещи френски , а A_G е подмножеството на студентите, владеещи немски. Нека A_{EF} е подмножеството на студентите, владеещи английски и френски, A_{EG} е подмножеството на студентите, владеещи английски и немски, а A_{FG} е подмножеството на студентите, владеещи френски и немски. Нека A_{EFG} е подмножеството на студентите, владеещи английски, френски и немски. Дадено е, че

$$
\begin{aligned}
|A_E| &= 19 \\
|A_F| &= 25 \\
|A_G| &= 21 \\
|A_{EF}| &= 13 \\
|A_{EG}| &= 7 \\
|A_{FG}| &= 9 \\
|A_{EFG}| &= 3
\end{aligned}
$$

От колко студента се състои групата?

Решение: Нека A е множеството от всички студенти в тази група. Тъй като $A = A_E \cup A_F \cup A_G$, може да смятаме, че A е универсумът и $\overline{A_E}^A \cap \overline{A_F}^A \cap \overline{A_G}^A = \emptyset$. От принципа на включване и изключване знаем, че

$$\left|\overline{A_E}^A \cap \overline{A_F}^A \cap \overline{A_G}^A\right| = |A| - (|A_E| + |A_F| + |A_G|) + (|A_{EF}| + |A_{EG}| + |A_{FG}|) - |A_{EFG}|$$

тоест

$$0 = |A| - (19 + 25 + 21) + (13 + 7 + 9) - 3$$

откъдето

$$|A| = 39$$

□

Задача 31. При условията на Задача 30,

- колко студента знаят точно два езика?
- колко студента знаят английски, но не знаят нито френски, нито немски?

Решение: Отговорът на първия въпрос е

$$|A_{EF}| + |A_{EG}| + |A_{FG}| - 3|A_{EFG}| = 13 + 7 + 9 - 3 \times 3 = 20$$

Отговорът на втория въпрос е

$$|A_E| - (|A_{EF}| + |A_{EG}|) + |A_{EFG}| = 19 - (13 + 7) + 3 = 2$$

□

Задача 32. Дадена е група от 100 студента. Известно е, че 37 студента учат английски, 35 студента учат френски, 33 студента учат немски, 38 студента учат испански, 16 студента учат английски и френски, 8 учат английски и немски, 18 учат английски и испански, 13 учат френски и немски, 9 учат френски и испански, 13 учат немски и испански, 5 студента учат английски, френски и немски, 6 студента учат английски, немски и испански, 5 студента учат френски, немски и испански, а 3 студента учат английски, немски, френски и испански. Колко студента учат английски, френски и испански, ако 14 студента не изучават никакви езици?

Решение: Нека търсеният брой е x. По принципа на включването и изключването имаме:

$$\begin{aligned}14 = 100 &\\ &- (37 + 35 + 33 + 38)\\ &+ (16 + 8 + 18 + 13 + 9 + 13)\\ &- (5 + 6 + 5 + x)\\ &+ 3\end{aligned}$$

тоест

$$14 = 21 - x \leftrightarrow x = 7$$

□

Задача 33. Колко са тоталните функции $f : X \to Y$, където X и Y са крайни множества и $X = m$ и $Y = n$?

Решение: Съгласно принципа на умножението, отговорът е n^m. □

Задача 34. Колко са частичните функции $f : X \to Y$, където X и Y са крайни множества и $X = m$ и $Y = n$?

Решение: Нека множеството от тези функции е $\mathcal{F}$. Нека z е елемент, който не се съдържа в Y. Нека $Z = Y \cup \{z\}$. Нека $\mathcal{F}_Z$ е множеството от тоталните функции $f : X \to Z$. Тривиално е да се покаже, че съществува биекция между $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_Z$ – за всяка функция от $f \in \mathcal{F}$, която е тотална, съществува точно една функция от $g \in \mathcal{F}_Z$, такава че:

$$\forall a \in X, g(a) = f(a)$$

а за всяка функция $f \in \mathcal{F}$, която е не е тотална, съществува точно една функция $g \in \mathcal{F}_Z$, такава че:

$$\forall a \in X, g(a) = \begin{cases} f(a), & \text{ако } f(a) \text{ е дефинирано}\\ z, & \text{в противен случай}\end{cases}$$

Съгласно предната задача, $|\mathcal{F}_Z| = (n + 1)^m$. Съгласно принципа на биекцията, отговорът е $|\mathcal{F}_Z| = (n + 1)^m$. □

В следващите задачи, под “функция” разбираме “тотална функция”.

Задача 35. Колко са сюрективните функции $f : X \to Y$, където X и Y са крайни множества и $X = m$ и $Y = n$?

Решение: Да въведем следните означения. Нека N е броят на всички функции. От Задача 33 знаем, че $N = n^m$. Ако от този брой извадим броя на не-сюрективните функции, ще получим броя на сюрекциите. Това ще направим поетапно, съгласно принципа на включване и изключване. За всеки елемент $a \in Y$, нека N_a е броят на функциите, които "не покриват" a, тоест тези, при които a не е образ на нито един елемент от X. Това не значи, че всички останали елементи от Y са покрити, а че със сигурност a не е покрит – за останалите елементи от Y не се казва нищо. Очевидно $N_a = (n-1)^m$, защото това е броят на функциите с домейн X и кодомейн $Y \setminus \{a\}$, за всяко $a \in Y$. Тъй като a взема n стойности, имаме сумата от всички N_a е $n.(n-1)^m$. Но разликата

$$n^m - n(n-1)^m \tag{17}$$

не е правилният отговор (освен ако m не е 1), тъй N_{a_1} и N_{a_2} за различни $a_1 \in Y$, $a_2 \in Y$ не броят функции, които са непременно различни – всяка функция, която не покрива нито a_1, нито a_2, ще бъде преброена като единица веднъж от N_{a_1} и веднъж от N_{a_2}. Иначе казано, (27) е по-малко от верния отговор – извадили сме прекалено много.

Нека $N_{a,b}$ е броят на функциите, които не покриват произволни $a, b \in Y$, $a \neq b$. Както и преди, може да има и други непокрити елементи от Y; със сигурност поне a и b не са покрити. $N_{a,b} = (n-2)^m$, тъй като това е броят на функциите от X в $Y \setminus \{a, b\}$. Сумата от всички такива $N_{a,b}$, по всички двуелементни подмножества $\{a, b\} \subseteq Y$, е $\binom{n}{2}(n-2)^m$. Но

$$n^m - n(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m = (-1)^0\binom{n}{0}(n-0)^m + (-1)^1\binom{n}{1}(n-1)^m + (-1)^2\binom{n}{2}(n-2)^m \tag{18}$$

все още не е верният отговор (освен ако m не е 2), макар че е по-близо от (27). (22) е повече от верния отговор, тъй като с $+\binom{n}{2}(n-2)^m$ сме добавили повече, отколкото трябва, към (27).

Аналогично, $N_{a,b,c}$ е броят на функциите, които не покриват произволни $a, b, c \in Y$, $a \neq b \neq c \neq a$. $N_{a,b,c} = (n-3)^m$ и сумата от всички такива $N_{a,b,c}$, по всички триелементни подмножества $\{a, b, c\} \subseteq Y$, е $\binom{n}{3}(n-3)^m$. Ако m е достатъчно голямо, то

$$(-1)^0\binom{n}{0}(n-0)^m + (-1)^1\binom{n}{1}(n-1)^m + (-1)^2\binom{n}{2}(n-2)^m + (-1)^3\binom{n}{3}(n-3)^m \tag{19}$$

все още не е верният отговор, макар че е още по-близо.

Съгласно принципа на включването и изключването, верният отговор е

$$\begin{aligned}&(-1)^0\binom{n}{0}(n-0)^m + (-1)^1\binom{n}{1}(n-1)^m + (-1)^2\binom{n}{2}(n-2)^m + \ldots + \\ &(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(n-(n-1))^m + (-1)^n\binom{n}{n}(n-n)^m\end{aligned} \tag{20}$$

Последното събираемо е нула, което съответства на факта, че има нула функции, които не покриват нито един елемент. Накракто, верният отговор е

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m$$

□

Задача 36. Колко стринга с дължина n има над латинската абзука $\{a, b, \ldots, z\}$, такива че всеки символ се среща поне веднъж?

Упътване: Разгледайте стринговете без ограничения като функции от множеството на позициите към множеството от символите (а **не** обратното!). Ограничението за вида на стринговете налага ограничение върху вида на функциите – какви трябва да са те?

Задача 37. Колко пермутации на числата от $\{1, 2, \ldots, n\}$ има, в които нито един елемент не си е на мястото? Числото i си е на мястото, ако се намира на i-та позиция, примерно в пермутацията 2 1 3 5 6 4, числото 3 си е на мястото и никое друго число не си е на мястото.

Решение: Броят на пермутациите без ограничения е $n!$. Ще извадим от $n!$ броят на пермутациите, в които някакви елементи са си на мястото. Това ще правим поетапно, съгласно принципа на включване и изключване.

Пермутациите, в които даден елемент е на мястото си и няма други ограничения, са $(n-1)!$ на брой. За всеки друг фиксиран елемент, аналогично, има $(n-1)!$ пермутации, в които той си е на мястото и няма други ограничения. Тъй като има n елемента, от които да фиксираме елемент на позиция, и за всеки елемент имаме $(n-1)!$ пермутации, сумата от последните е $n.(n-1)!$. Естествено, $n(n-1)! = n!$ не е правилният отговор за броя на пермутациите, в които поне един елемент си е на мястото, тъй като брои някои пермутации повече от един път. С други думи, разликата

$$n! - n(n-1)!$$

е по-малка от верния отговор (освен ако n не е 1: наистина, при $n = 1$ отговорът е 0). Съгласно принципа на включване и изключване добавяме броя на пермутациите, в които два елемента са си на местата и няма други ограничения. Тези два елемента можем да изберем по $\binom{n}{2}$ начина, за всеки избор имаме $(n-2)!$ пермутации. Но сумата

$$n! - n(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)!$$

е по-голяма от верния отговор (освен ако n не е 2), така че продължаваме аналогично, по принципа на включването и изключването:

$$\begin{aligned}
&n! - n(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! + \ldots + (-1)^{n-1}n(n-(n-1))! + (-1)^n(n-n)! = \\
&(-1)^0\binom{n}{0}(n-0)! + (-1)^1\binom{n}{1}(n-1)! + (-1)^2\binom{n}{2}(n-2)! + \ldots \\
&\qquad \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(n-(n-1))! + (-1)^n\binom{n}{n}(n-n)! = \\
&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)!
\end{aligned}$$

Това е верният отговор. □

Задача 38. Колко пермутации на числата от $\{1, 2, \ldots, n\}$ има, в които точно m елемента са си е на мястото за някое m, такова че $0 \leq m \leq n$, ако

- тези m елемента са фиксирани,
- тези m елемента не са фиксирани.

Задача 39. Измежду 100 студента:

- 72 посещават практикум по C,

- 60 посещават практикум по Java.

Докажете, че поне 32 от тези студенти посещават и двата практикума.

Решение: Нека A и B са множествата от студентите, посещаващи съответно практикумите по C и Java. Нека $U = A \cup B$. Прилагайки принципа на включване и изключване спрямо този универсум, извеждаме

$$\underbrace{0}_{\text{няма елементи в допълнението}} = |U| - (|A| + |B|) + |A \cap B|$$

Оттук

$$|A \cap B| = \underbrace{|A|}_{72} + \underbrace{|B|}_{60} - |U| = 132 - |U|$$

Тъй като $|U| \leq 100$, то $|A \cap B| \geq 32$.

Задача 40. По колко начина може да се оцветят квадратчетата на правоъгълна мрежа $m \times n$ (m реда и n колони) в k цвята

а) без ограничения;

б) с единственото ограничение, че във всеки ред няма съседни квадратчета с еднакъв цвят;

в) с единственото ограничение, че във всеки ред е използван всеки от цветовете.

Решение:

а) k^{mn}, понеже всяко оцветяване е функция от множеството на квадратчетата в множеството от цветовете. Има общо mn квадратчетаи k цвята. Прилагаме формулата за броя на функциите без ограничения (**Зад. 8**).

б) Оцветяването на произволен ред е независимо от оцветяванията на другите редове. Следователно, ако N е броят на начините да бъде оцветен произволен ред, отговорът N^m по принципа на умножението.

Да разгледаме оцветяването на ред i, където i е произволно число, такова че $1 \leq i \leq m$. Да разгледаме кое да е квадратче в ред i, примерно квадратче $(i, 1)$. За него имаме k възможности за оцветяване заради наличието на k възможни цвята. За съседното му квадратче $(i, 2)$ имаме $k - 1$ възможности поради ограничението да не се използват еднакви цветове на съседни квадратчета. Аналогично, за квадратчета $(i, 3)$, $(i, 4)$, $\ldots$, (i, n) имаме $k - 1$ възможности. Като цяло, за ред i възможните различни оцветявания са $k(k-1)^{n-1}$. Следователно, $N = k(k-1)^{n-1}$ и отговорът е $k^m(k-1)^{m(n-1)}$.

в) Оцветяването на произволен ред е независимо от оцветяванията на другите редове. Следователно, ако $N(k, n)$ е броят на начините да бъде оцветен произволен ред, отговорът $(N(k, n))^m$ по принципа на умножението. $N(k, n)$ може да се получи веднага от формулата за броя на сюрекциите, но тук ще го изведем от основните принципи.

Да разгледаме оцветяването на ред i, където i е произволно число, такова че $1 \leq i \leq m$. Нека U е множеството на всички възможни оцветявания на ред i с k цвята без ограничения. $|U| = k^n$. Нека S_j е множеството от възможните оцветяванията на ред i, в които цвят j не се използва, за всички j, такива че $1 \leq j \leq k$[†]. Нека S_{j_1,j_2} е множеството от възможните оцветяванията на ред i, в които цветове j_1 и j_2 не се използват, за всички j_1 и j_2, такива че $1 \leq j_1 < j_2 \leq k$. Да направим следната дефиниция, която се явява обобщение на предните две за произволен брой цветове.

Определение 1. За всички цели положителни $j_1, j_2, \ldots, j_t$, такива че $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_t \leq k$, множеството от възможните оцветявания на ред i, в които цветове $j_1, j_2, \ldots, j_t$ не се използват[‡], е $S_{j_1,j_2,\ldots,j_t}$. □

По принципа на включването и изключването,

$$
\begin{aligned}
N(k,n) = |U| \\
& - \underbrace{\sum_{1 \leq j_1 \leq k} |S_{j_1}|}_{\text{поне един цвят не се използва}} \\
& + \underbrace{\sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq k} |S_{j_1} \cap S_{j_2}|}_{\text{поне два цвята не се използват}} \\
& - \underbrace{\sum_{1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq k} |S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap S_{j_3}|}_{\text{поне три цвята не се използват}} \\
& \ldots \\
& + (-1)^t \underbrace{\sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_t \leq k} |S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap \ldots \cap S_{j_t}|}_{\text{поне } t \text{ цвята не се използват}} \\
& \ldots \\
& + (-1)^{k-1} \underbrace{\sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_{k-1} \leq k} |S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap \ldots \cap S_{j_{k-1}}|}_{\text{поне } k-1 \text{ цвята не се използват, тоест използва се само } 1 \text{ цвят}} \\
& + (-1)^k \underbrace{|S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap \ldots \cap S_{j_k}|}_{k \text{ цвята не се използват, тоест няма оцветяване изобщо; това трябва да е } 0.}
\end{aligned}
$$

Твърдим, че за всяко t, такова че $1 \leq t \leq k$,

$$
|S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap \ldots \cap S_{j_t}| = \binom{k}{t}(k-t)^n \tag{21}
$$

Това е така, защото за да определим начините да се оцвети ред i, така че t цвята да не се ползват, е достатъчно да намерим броя на начините да се подберат t цвята от k—този брой е $\binom{k}{t}$—и броят начини да се оцвети реда с останалите $k-t$ цвята—този брой е $(k-t)^n$. Израз (26) следва веднага по принципа на умножението.

[†] Може да има и други цветове, които не се използват. Цвят j не се използва *със сигурност.*

[‡] Може да има и други цветове, които не се използват. Цветове $j_1, j_2, \ldots, j_t$ не се използва *със сигурност.*

Тогава

$$
\begin{aligned}
N(k,n) &= k^n - \sum_{t=1}^{k}(-1)^t \binom{k}{t}(k-t)^n = \sum_{t=0}^{k}(-1)^t \binom{k}{t}(k-t)^n \\
&= \sum_{t=0}^{k-1}(-1)^t \binom{k}{t}(k-t)^n, \text{ тъй като } (-1)^k \binom{k}{k}(k-k)^n = 0
\end{aligned}
$$

Задача 41. За университета XYZ се твърди, че:

- Има общо има 6525 студента.
- От тях 5025 не са първокурсници.
- 3222 студента са взели курса по Анализ.
- 1332 студента са взели курса по Дискретни Структури (ДС).
- 1821 студента не са първокурсници и са взели Анализ.
- 1050 студента са взели Анализ и ДС.
- 603 студента не са първокурсници и са взели ДС.
- 429 студента не са първокурсници и са взели Анализ и ДС.

Възможно ли е тези данни да са верни?

Решение: Щом студентите са общо 6525 и от тях 5025 не са първокурсници, то

$$\text{броят на първокурсниците е } 6525 - 5025 = 1500 \tag{22}$$

Нека множеството от студентите, които не са първи курс и са взели Анализ, е X, а множеството на студентите, които не са първи курс и са взели ДС, е Y. Студентите, които не са първи курс, представляват универсум U', съдържащ както X, така и Y. По условие $|U'| = 5025$, $|X| = 1821$, $|Y| = 603$ и $|X \cap Y| = 429$. По принципа на включването и изключването по отношение на този универсум е изпълнено

$$|\overline{X} \cap \overline{Y}| = 5025 - (1821 + 603) + 429 = 3030$$

И така, 3030 студенти не са първи курс и не са взели нито Анализ, нито ДС. Тогава $5025 - 3030 = 3495$ студенти са поне едно от трите: първокурсници или взели Анализ или взели ДС. Нека A е множеството от студентите от първи курс, B са тези, които са взели Анализ, а C са тези, взели ДС. Току-що показахме, че $|A \cup B \cup C| = 3495$. По условие $|B| = 3222$ и $|C| = 1332$, а от (22) знаем, че $|A| = 1500$.

Щом 3222 студента са взели Анализ и 1821 не-първокурсници са взели Анализ, то 1401 първокурсници са взели Анализ. Щом 1332 студента са взели ДС и 603 не-първокурсници са взели Анализ, то 729 първокурсници са взели ДС. Тогава $|A \cap B| = 1401$ и $|A \cap C| = 729$. По условие, $|B \cap C| = 1050$.

Съгласно принципа на включването и изключването,

$$
\begin{aligned}
&|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C| \leftrightarrow \\
&\qquad 3495 = 1500 + 3222 + 1332 - (1401 + 729 + 1050) + |A \cap B \cap C| \leftrightarrow \\
&|A \cap B \cap C| = 621
\end{aligned}
$$

Отново прилагаме принципа на включването и изключването, за да пресметнем $|(A \cap B) \cup (A \cap C)|$:

$$\begin{aligned}
&|(A \cap B) \cup (A \cap C)| = |(A \cap B)| + |(A \cap C)| - |A \cap B \cap C| \leftrightarrow \\
&|(A \cap B) \cup (A \cap C)| = 1401 + 729 - 621 = 1509
\end{aligned} \tag{23}$$

И сега забелязваме противоречие между (22) и (23): първото казва, всички първокурсници са 1500, второто казва, че първокурсниците, взели поне един от Анализ и ДС, са 1509. Следователно, данните са неверни. □

Задача 42. По колко начина могат да седнат около кръгла маса с номерирани столове хората от n на брой женени двойки (очевидно става дума за $2n$ души), така че съпрузите от нито една двойка да не седят на съседни столове?

Решение: Нека двойките са c_1, c_2, ..., c_n. Нека S_i означава множеството от всички възможни сядания, в които съпрузите от c_i седят непозволено, тоест един до друг, където $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Нека U е универсумът в тази задача, а именно, множеството от всички възможни сядания на тези $2n$ души около масата (без оглед на принадлежност към съпружески двойки). Търсеният отговор е $|\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \ldots \cap \overline{S_n}|$. По принципа на включването и изключването,

$$\begin{aligned}
|\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \ldots \cap \overline{S_n}| = |U| \\
&- \sum_{1 \leq i \leq n} |S_i| \\
&+ \sum_{1 \leq i < j \leq n} |S_i \cap S_j| \\
&- \ldots \\
&+ (-1)^n |S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n|
\end{aligned}$$

Лесно се вижда, че $|U| = (2n)!$, тъй като толкова са начините, $2n$ човека да седнат на $2n$ различими (номерирани) места без никакви ограничения.
Ще покажем, че всяка от сумите

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_t \leq n} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \ldots \cap S_{i_t}|$$

където t е някое цяло число, такова че $1 \leq t \leq n$, е равна на

$$\binom{n}{t} . 2n . (2n - t - 1)! . 2^t$$

Тази сума е равна на броя начини t двойки да са седнали непозволено, по всички възможни начини да бъдат подбрани t двойки от $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$. Имаме следните четири независими съображения.

- По $\binom{n}{t}$ начина можем да подберем t двойки от общо n.
- По $2n$ начина можем да изберем два стола за първата двойка от тези t двойки.

- За останалите $t-1$ двойки, по $(2n-t-1)!$ начина можем да разположим хората от тези $t-1$ двойки, така че хората от всяка от тези двойки да са съседи, и останалите хора (тези, които не са в нито една от въпросните t двойки) по оставащите (след сядането на първата двойка) столове. Причината това да е така е, че гледаме на тези $t-1$ двойки като на „блокове“, тоест една такава двойка е един обект, а всеки човек, който не е в някоя двойка, е самостоятелен обект. Общо обектите са на брой

$$\underbrace{2n-2}_{\text{толкова са хората за настаняване след сядането на първата двойка}} - \underbrace{2(t-1)}_{\text{от техния брой вадим броя на хората в } t-1 \text{ двойки}} + \underbrace{t-1}_{\text{толкова са обектите от вид „двойка“}} = 2n-t-1$$

  Следователно, задачата по колко начина могат да седнат тези $t-1$ двойки непозволено на оставащите места (след сядането на първата двойка) е същата като задачата, по колко начина можем да разположим $2n-t-1$ обекта в редица.

- За всяка от досега направените подборки на места за сядане на t двойки по всички възможни непозволени начини, за всяка двойка можем да разположим хората от нея по 2 начина на двата избрани стола. Общо това са 2^t възможни начина.

След като установихме, че

$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_t \le n} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \ldots \cap S_{i_t}| = \binom{n}{t}.2n.(2n-t-1)!.2^t$$

отговорът следва да е

$$\begin{aligned}
|\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \ldots \cap \overline{S_n}| &= (2n)! + \sum_{t=1}^{n} (-1)^t.\binom{n}{t}.2n.(2n-t-1)!.2^t \\
&= \sum_{t=0}^{n} (-1)^t.\binom{n}{t}.2n.(2n-t-1)!.2^t \\
&= 2n\left(\sum_{t=0}^{n} (-1)^t.\binom{n}{t}.(2n-t-1)!.2^t\right)
\end{aligned}$$

□

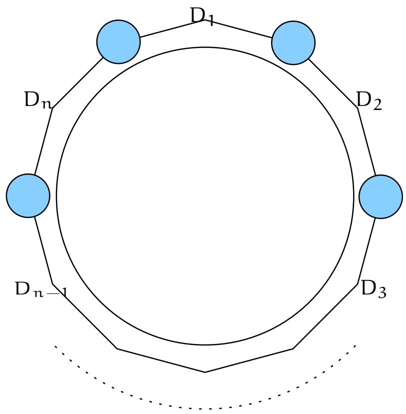
Задача 43. По колко начина могат да седнат около кръгла маса с номерирани столове хората от n на брой женени двойки (очевидно става дума за $2n$ души), така че съпрузите от нито една двойка да не седят на съседни столове и освен това около масата да се редуват жени и мъже, така че да няма нито двама мъже един до друг, нито две жени една до друга?

Решение: Нека столовете около масата са номерирани с $1, 2, \ldots, 2n$. Нека първо седнат дамите. Очевидно, те могат да седнат или само на четните, или само на нечетните номера. На четните номера те могат да седнат по $n!$ начина. На нечетните, също $n!$ начина. Общо има $2n!$[†] начина, по които могат да седнат дамите, като дотук не сме нарушили с нищо ограниченията на тази задача, следователно всеки от тези $2n!$ начина е възможно начало

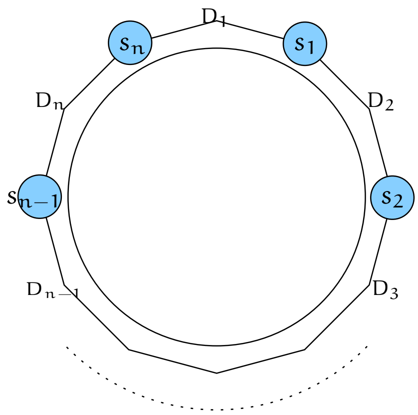
[†] $2n!$ е $2 \times (n!)$, а не $(2n)!$.

на процеса на сядане. За всеки от тези $2n!$ начина, мъжете могат да седнат на свободните столове—спазвайки ограниченията на задачата—по един и същи брой начини. Да наречем този брой $g(n)$. Отговорът е $2n!g(n)$ и сега търсим $g(n)$.

Нека дамите са $D_1, D_2, \ldots, D_n$, а мъжете са $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Без ограничение на общността, нека дамите са седнали така (кръговете означават незаетите столове):



Нека преномерираме местата, които са останали свободни с $s_1, s_2, \ldots, s_n$ така:



Нека S означава множеството от всички възможни, $n!$ на брой, начина да седнат мъжете. Някои от тях са разрешени, други са забранени. Всяко сядане от S може да има или да няма всяко от следните свойства:

P_1: H_1 е на s_1.

P_2: H_2 е на s_2.

$\ldots$

P_n: H_n е на s_n.

Q_1: H_1 е на s_n.

Q_2: H_2 е на s_1.

Q_3: H_3 е на s_2.

$\ldots$

Q_n: H_n е на s_{n-1}.

Да означим множеството $\{P_1, P_2, \ldots, P_n, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\}$ с $\mathfrak{P}$. Това са "вредните" свойства по отношение на нашата задача, те са свързани със забранените сядания. Очевидно $g(n) = |\tilde{S}|$, където

$$\tilde{S} = \{x \in S \mid \text{ нито едно свойство от } \mathfrak{P} \text{ не е в сила за } x\}$$

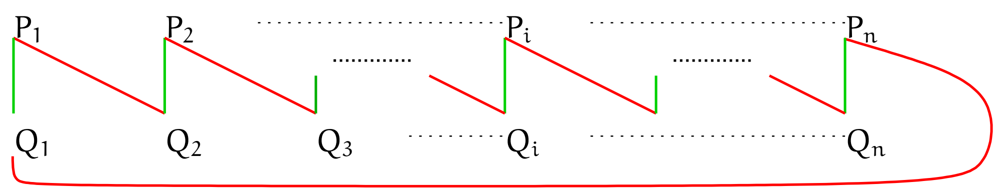
Забележете, че не всяка комбинация от тези свойства е възможна, примерно няма как едно сядане да има P_1 и Q_2, защото $P_1 \wedge Q_2$ означава, че на s_1 седят едновременно двама души (H_1 и H_2). Също така няма как едно сядане да има $P_1 \wedge Q_1$, защото това би означавало, че H_1 седи едновременно на s_1 и s_n. Свойства, които е възможно да бъдат едновременно изпълнени, ще наричаме *съвместими*.

> *Преди да продължим с решението, едно пояснение. Нашата цел е да намерим броят на начините* k *мъже да седнат на забранени за тях места, и после да приложим принципа на включването и изключването. Естествено, тук се има предвид* поне k *мъже да са седнали на забранени за тях места – може да има и други мъже на забранени места, но със сигурност* k *са на забранени места. Намерим ли този брой, довършването на решението е нещо лесно.*
>
> *В тази задача забранените конфигурации—а именно сядането на* k *мъже на забранени места—са по-трудни за преброяване в сравнение, примерно, със забранените конфигурации за* k *числа в Задача 37. В Задача 37 беше лесно: за всяко число имаше* едно *забранено място, така че по* $\binom{n}{k}$ *начина избираме* k *числа, които да сложим на забранени места, останалите числа можем да сложим по общо* $(n-k)!$ *начина, и събираемото в крайния отговор, което съответства на* k *забранени слагания, е* $(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)!$*. В тази задача обаче за всеки мъж има* две *забранени места, откъдето идват усложненията: първо, той не може да ги ползва едновременно, и второ, за всяко място има двама мъже, а не един мъж, за които то е забранено. Въвеждането на гореспоменатите* $2n$ *свойства ни дава възможност да броим систематично броят на забраните сядания на* k *мъже.*

Както вече казахме, търсим броя на сяданията на мъжете, които нямат нито едно свойство от $\mathfrak{P}$. Ще го намерим съгласно принципа на включването и изключването, но приложен по отношение на елементите на $\mathfrak{P}$. Нека r_k е броят начини да подберем k *съвместими* свойства от $\mathfrak{P}$. Очевидно r_k е броят на начините k мъже да седнат на забранени места. Тогава

$$g(n) = n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! - \ldots + (-1)^n r_n(n-n)!$$

Решаването на задачата се свежда до намирането на r_k като функция на k и n. Очевидно $r_1 = 2n$, защото когато става дума за едно свойство, несъвместимост няма, така че $r_1 = |\mathfrak{P}| = 2n$. Колко е r_2? Първо да съобразим, че несъвместими двойки свойства от $\mathfrak{P}$ са Q_1 и P_1, P_1 и Q_2, Q_2 и P_2, P_2 и Q_3, $\ldots$, P_{n-1} и Q_n, Q_n и P_n, P_n и Q_1. Това са общо $2n$ (ненаредени) двойки. Да нарисуваме следната диаграма на елементите на $\mathfrak{P}$ заедно с несъвместимостите между тях:



Червените линии отразяват факта, че на един стол не може да седне повече от един мъж. Зелените линии отразяват факта, че един мъж не може да седне на повече от един стол. Забележете, че това е кръгов вектор с $2n$ елемента. Да питаме колко е r_2 е същото като да питаме по колко начина можем да изберем два несъседни елемента от този кръгов вектор. Отговорът очевидно е $2n(2n-3)$, тъй като за първия избран имаме $2n$ възможности, а за втория, само $2n-3$.

Да разгледаме r_k. Да питаме колко е r_k е същото като да питаме по колко начина можем да изберем k елемента от този кръгов вектор, нито два от които не са съседи. На свой ред това е същото като да питаме, колко кръгови булеви вектора с дължина $2n$ имат k единици и $2n-k$ нули и нямат съседни единици. Съгласно Задача 20, отговорът е $\frac{2n-k+k}{2n-k}\binom{2n-k}{k} = \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$. Следователно,

$$r_k = \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$$

При $k=2$ този израз става $\frac{2n}{2n-2}\binom{2n-2}{2} = \frac{2n}{2n-2} \times \frac{(2n-2)(2n-3)}{2\times 1} = 2n(2n-3)$, което съвпада с вече изведеното за r_2. И така,

$$g(n) = n! - \frac{2n}{2n-1}\binom{2n-1}{1}(n-1)! + \frac{2n}{2n-2}\binom{2n-2}{2}(n-2)! - \ldots + (-1)^n \frac{2n}{2n-n}\binom{2n-n}{n}(n-n)!$$

тоест

$$g(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!$$

и отговорът на задачата е

$$2\,n!\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!\right)$$

□

Задача 44. Колко стринга има над азбуката $\{0, 1, 2\}$, в които има точно две букви от всеки вид и няма съседни еднакви символи?

Решение: Без последното ограничение, броят на стринговете съгласно правилото за броя на пермутации с повторения е

$$\frac{6!}{2!\,2!\,2!} = 90$$

Нека универсумът U да е това множество – стринговете с точно две a-та, две b-та и две c-та. Нека дефинираме следните подмножества на U.

- N_1 е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 1 и 2,
- N_2 е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 2 и 3,
- N_3 е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 3 и 4,
- N_4 е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 4 и 5,
- N_5 е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 5 и 6,

- $N_{1,3}$ е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 1 и 2 и един и същи символ на позиции 3 и 4,
- $N_{1,4}$ е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 1 и 2 и един и същи символ на позиции 4 и 5,
- $N_{1,5}$ е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 1 и 2 и един и същи символ на позиции 5 и 6,
- $N_{2,4}$ е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 2 и 3 и един и същи символ на позиции 4 и 5,
- $N_{2,5}$ е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 2 и 3 и един и същи символ на позиции 5 и 6,
- $N_{3,5}$ е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 3 и 4 и един и същи символ на позиции 5 и 6,
- $N_{1,3,5}$ е броят на стринговете с един и същи символ на позиции 1 и 2 и един и същи символ на позиции 3 и 4 и един и същи символ на позиции 5 и 6.

Съгласно принципа на включване и изключване, търсеният отговор е

$$N = |U| - (N_1 + N_2 + \ldots + N_5) + (N_{1,3} + N_{1,4} + \ldots + N_{3,5}) - N_{1,3,5}$$

Забелязваме, че $N_1 = 3 \times \binom{4}{2}$, тъй като има три възможности за символа на първа и втора позиция, а на останалите четири позиции слагаме два символа от друг вид и два от трети вид. Тогава $N_1 = 18$. Забелязваме, че $N_1 = N_2 = \ldots = N_5$.

Освен това, $N_{1,3} = 3 \times 2 \times 1 = 6$, защото имаме три възможности за символа на първа и втора позиция, оттук две възможности за символа на трета и четвърта позиция, и само една възможност спрямо досега направените избори за символа на останалите (пета и шеста) позиции. Също така, $N_{1,3} = N_{1,4} = \ldots = N_{3,5}$.

Накрая, $N_{1,3,5} = 6$ с аналогични съображения. Имаме

$$N = 90 - (5 \times 18) + (6 \times 6) - 6 = 30$$

□

Задача 45. Колко различни наредени петорки $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ от естествени числа удовлетворяват

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100$$

Решение: Става дума за комбинаторни конфикурации без наредба, с повторение, с големина 100 над опорно множество с 5 елемента: можем да мислим за тази сума като за сто символа, всеки от които е един от $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, като всеки един символ има принос единица. Съгласно изведения на лекции резултат за броя на тези комбинаторни конфигурации, отговорът е

$$K_{\Pi}(5, 100) = \binom{100 + 5 - 1}{5 - 1} = 4\,598\,126$$

Алтернативно обяснение, може би по-ясно и нагледно, е чрез "топки и кутии". Задачата е същата като задачата, по колко различни начина могат да се поставят 100 неразличими топки (това са стоте единици, чийто сбор е сумата 100) в пет различни кутии (това са хиксовете).
□

Задача 46. Колко различни наредени петорки $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ от естествени числа удовлетворяват

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100\\
&0 \leq x_1 \leq 30\\
&0 \leq x_2 \leq 30\\
&0 \leq x_3 \leq 30\\
&0 \leq x_4 \leq 30\\
&0 \leq x_5 \leq 30
\end{aligned}$$

Решение: Задачата е подобна на Задача 45, но сега кутиите имат "капацитети": най-много 30 топки в кутия. Нека B_i е множеството от конфигурациите-решения от Задача 45, в които кутия i е "нарушител"—тоест в нея има поне 31 топки—за $1 \leq i \leq 5$. Търсим броя на конфигурациите, в които нарушения няма за нито една кутия. С други думи, търсим

$$|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} \cap \overline{B_5}|$$

Съгласно принципа на включването и изключването,

$$\begin{aligned}
|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} \cap \overline{B_5}| = |U| - \sum_{1 \leq i \leq 5} |B_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq 5} |B_i \cap B_j| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq 5} |B_i \cap B_j \cap B_k| + \\
\underbrace{\sum_{1 \leq i < j < k < t \leq 5} |B_i \cap B_j \cap B_k \cap B_t|}_{\text{това е } 0} - \underbrace{|B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5|}_{\text{това е } 0}
\end{aligned}$$

където U е универсумът $K_{\Pi}(5, 100)$. Както показахме в Задача 45, $|U| = 4\,598\,126$. Ясно е защо последните две събираеми са нули: няма как при обща сума 100, четири или пет променливи да са поне 31. Следователно, търсеният отговор е

$$|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} \cap \overline{B_5}| = 4\,598\,126 - \sum_{1 \leq i \leq 5} |B_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq 5} |B_i \cap B_j| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq 5} |B_i \cap B_j \cap B_k| \quad (24)$$

От общи съображения е ясно, че $|B_1| = |B_2| = |B_3| = |B_4| = |B_5|$ и $\underbrace{|B_1 \cap B_2| = \ldots = |B_4 \cap B_5|}_{10 \text{ такива}}$ и $\underbrace{|B_1 \cap B_2 \cap B_3| = \ldots = |B_3 \cap B_4 \cap B_5|}_{10 \text{ такива}}$. Търсеният отговор е:

$$4\,598\,126 - 5 \times |B_1| + 10 \times |B_1 \cap B_2| - 10 \times |B_1 \cap B_2 \cap B_3| \quad (25)$$

Колко е $|B_1|$? Щом x_1 е сигурен нарушител на капацитета (и няма друг сигурен нарушител), то е вярно, че

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100\\
&31 \leq x_1\\
&0 \leq x_2\\
&0 \leq x_3\\
&0 \leq x_4\\
&0 \leq x_5
\end{aligned}$$

Да представим x_1 като $x_1 = x_1' + 31$. Тогава условието $31 \leq x_1$ е същото като $0 \leq x_1'$, а $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 100$ става $x_1'+31+x_2+x_3+x_4+x_5 = 100$, тоест $x_1'+x_2+x_3+x_4+x_5 = 69$. Изведохме, че $|B_1|$ е мощността на множеството от наредените петорки $(x_1', x_2, x_3, x_4, x_5)$, които удовлетворяват:

$$\begin{aligned} & x_1' + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 69 \\ & 0 \leq x_1' \\ & 0 \leq x_2 \\ & 0 \leq x_3 \\ & 0 \leq x_4 \\ & 0 \leq x_5 \end{aligned}$$

Но ние знаем колко такива наредени петорки има: $|K_\Pi(5, 69)| = 1\,088\,430$.

Напълно аналогично, $|B_1 \cap B_2| = |K_\Pi(5, 38)| = 111\,930$ и $|B_1 \cap B_2 \cap B_3| = |K_\Pi(5, 7)| = 330$. Заместваме в (25) и получаваме крайния отговор

$$4\,598\,126 - 5 \times 1\,088\,430 + 10 \times 111\,930 - 10 \times 330 = 271\,976$$

□

Задача 47. Плочкаджия трябва да покрие с плочки стена с размери 2 м. на 4 м. Всяка плочка е с размери 20 см. на 20 см., а цветът ѝ е или зелен, или червен. Общо плочките са 200 на брой: 80 зелени и 120 червени. Плочките се редят плътно една до друга и не е разрешено да се режат, следователно трябва да бъдат наредени в конфигурация от 10 реда и 20 колони. Зелените плочки са неразличими помежду си и червените плочки са неразличими помежду си. По колко начина може да бъде направено покриването, ако:

- Няма ограничения.
- Във всеки ред зелените плочки, ако има такива, са вляво от червените, ако има такива.

Решение: В първото подусловие е достатъчно да съобразим, че двумерната наредба на плочките няма никакво значение за търсения брой на възможните покривания. Възможните покривания са точно толкова (по принципа на биекцията), колкото са възможностите да бъдат наредени в линейна наредба 80 зелени и 120 червени плочки. С други думи, това са възможностите да изберем 80 плочки от общо 200. Броят е

$$\binom{200}{80} = 1\,647\,278\,652\,451\,762\,678\,788\,128\,833\,110\,870\,712\,983\,038\,446\,517\,480\,945\,400 \approx 10^{57}$$

Във второто подусловие, първо съобразяваме следното. Както и в предишното подусловие, разполагането на зелените плочки напълно определя разполагането на червените – червените се слагат на 120-те свободни места. Но в сегашното подусловие, зелените плочки се редят плътно вляво. На някои редове може изобщо да няма зелени плочки, на други може да са само зелени плочки, а ако има и от двата вида, зелените са вляво. Ясно е, че за всеки ред, **бройката** на зелените плочки—число между нула и двадесет включително—определя напълно подреждането в този ред. Тогава цялата наредба (върху стената) се определя от десет числа, всяко от което е между нула и двадесет включително, и всички тези числа се сумират до 80.

Внимание – редовете са различими! Примерно, слагането на 19 зелени плочки на първи ред, 13 на втори и по 6 на всички останали редове е **различно** слагане от 13 зелени плочки на първи ред, 19 на втори и по 6 на всички останали редове. Следователно, става дума не за множество от числа, а за вектор от числа, които се сумират до 80.

Задачата е същата като задачата, колко решения в естествени числа има уравнението

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 80$$

при ограниченията

$$\begin{aligned}
&0 \le x_1 \le 20\\
&0 \le x_2 \le 20\\
&0 \le x_3 \le 20\\
&0 \le x_4 \le 20\\
&0 \le x_5 \le 20\\
&0 \le x_6 \le 20\\
&0 \le x_7 \le 20\\
&0 \le x_8 \le 20\\
&0 \le x_9 \le 20\\
&0 \le x_{10} \le 20
\end{aligned}$$

Ако ограниченията бяха само $0 \le x_i$, $1 \le i \le 10$, отговорът щеше да е

$$\binom{80+10-1}{10-1} = \binom{89}{9} = 635\,627\,275\,767$$

тъй като при тези (по-прости) ограничения става дума за комбинаторни конфигурации без наребда, с повтаряне, с размер 80 над опорно множество с мощност 10: все едно имаме линейна наредба от 80 единици и се пита, по колко начина може да сложим 9 разделителя между тях.

При по-сложните ограничения от вида $0 \le x_i \le 20$, $1 \le i \le 10$, каквито са нашата задача, може да мислим за множеството от $\binom{89}{9}$ решения като за универсум U. Нека $B_i \subseteq U$ е множеството от тези решения, в които $x_i > 20$, за $1 \le i \le 10$. Очевидно ние търсим $|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} \cap \overline{B_5} \cap \overline{B_6} \cap \overline{B_7} \cap \overline{B_8} \cap \overline{B_9} \cap \overline{B_{10}}|$. По принципа на включването и изключването,

$$|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_{10}}| = |U| - \sum_{1 \le i \le 10} |B_i| + \sum_{1 \le i < j \le 10} |B_i \cap B_j| - \ldots + (-1)^{10} |B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{10}|$$

Сега да съобразим, че няма как повече от три x_i-та да бъдат по-големи от 20: ако четири са по-големи от 20 всяко, то сумата ще надхвърли 80. С други думи, достатъчно е да разгледаме тези събираеми в израза на включването и изключването, в които има сечение на най-много три B-та:

$$|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_{10}}| = |U| - \sum_{1 \le i \le 10} |B_i| + \sum_{1 \le i < j \le 10} |B_i \cap B_j| - \sum_{\substack{1 \le i < j < \\ k \le 10}} |B_i \cap B_j \cap B_k|$$

От общи съображения е ясно, че B-тата имат една и съща мощност и сеченията им по двойки имат една и съща мощност и сеченията по тройки имат една и съща мощност и сеченията им по четворки имат една и съща мощност. Следователно,

$$|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_{10}}| = |U| - \binom{10}{1} |B_1| + \binom{10}{2} |B_1 \cap B_2| - \binom{10}{3} |B_1 \cap B_2 \cap B_3|$$

За да получим $|B_1|$ е достатъчно да съобразим, че бройката решения на уравнението

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 80$$

при ограниченията

$$\begin{aligned}
21 &\leq x_1 \\
0 &\leq x_2 \leq 20 \\
0 &\leq x_3 \leq 20 \\
0 &\leq x_4 \leq 20 \\
0 &\leq x_5 \leq 20 \\
0 &\leq x_6 \leq 20 \\
0 &\leq x_7 \leq 20 \\
0 &\leq x_8 \leq 20 \\
0 &\leq x_9 \leq 20 \\
0 &\leq x_{10} \leq 20
\end{aligned}$$

е същата като бройката на решенията на уравнението

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 59$$

при ограниченията

$$\begin{aligned}
0 &\leq x_1 \\
0 &\leq x_2 \leq 20 \\
0 &\leq x_3 \leq 20 \\
0 &\leq x_4 \leq 20 \\
0 &\leq x_5 \leq 20 \\
0 &\leq x_6 \leq 20 \\
0 &\leq x_7 \leq 20 \\
0 &\leq x_8 \leq 20 \\
0 &\leq x_9 \leq 20 \\
0 &\leq x_{10} \leq 20
\end{aligned}$$

Следователно,

$$|B_1| = \binom{59+9}{9} = \binom{68}{9} = 49\,280\,065\,120$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
|B_1 \cap B_2| &= \binom{38+9}{9} = \binom{47}{9} = 1\,362\,649\,145 \\
|B_1 \cap B_2 \cap B_3| &= \binom{17+9}{9} = \binom{26}{9} = 3\,124\,550
\end{aligned}$$

Крайният отговор е

$$|\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_{10}}| = \binom{89}{9} - \binom{10}{1}\binom{68}{9} + \binom{10}{2}\binom{47}{9} - \binom{10}{3}\binom{26}{9} = 203\,770\,890\,092$$

Задача 48. Разгледайте всички думи с дължина 100 над българската азбука (има 30 букви). "Дума" в случая е всяка последователност от 100 букви, а не истинска дума от българския език (най-малкото, на български няма думи с толкова букви). Азбуката има естествена подредба на буквите от **а** към **я**.

- Колко са различните думи, в които срещащите се букви са във възходящ ред (отляво надясно)?
- Колко са различните думи, в които всяка буква се среща поне веднъж и буквите са във възходящ ред (отляво надясно)?
- Колко са различните думи, в които всяка буква се среща поне веднъж?
- Колко са различните думи, в която всяка гласна се среща поне веднъж? Гласните са $\boxed{\text{а}}$, $\boxed{\text{ъ}}$, $\boxed{\text{о}}$, $\boxed{\text{у}}$, $\boxed{\text{е}}$ и $\boxed{\text{и}}$.

Решение:

- Можем да мислим за тези думи като за мултимножества от по 100 елемента над опорно множество от 30 елемента. Това са конфигурации без наредба, с повтаряне и броят им е

$$\binom{100+30-1}{30-1} = 60\,284\,731\,216\,266\,553\,294\,577\,246\,880$$

- Можем да мислим за тези думи като за мултимножества от по 100 елемента над опорно множество от 30 елемента, като мултимножествата съдържат задължително поне по един елемент от опорното множеството. Очевидно тези мултимножества са колкото мултимножествата със $100 - 30 = 70$ елемента над опорно множество от 30 елемента. Броят е

$$\binom{70+30-1}{30-1} = 8\,811\,701\,946\,483\,283\,447\,189\,128$$

- Всяка от тези думи съответства на точно една сюрекция със 100 елементен домейн и 30 елементен кодомейн. С принципа на включването и изключването лесно се показва, че броят на сюрекциите с m елементен домейн и n елементен кодомейн е

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$$

Тогава търсеният отговор е

$$\sum_{k=0}^{30} (-1)^k \binom{30}{k} (30-k)^{100}$$

Численият отговор има 148 десетични цифри:

$$\begin{aligned}&1\,725\,811\,513\,043\,979\,316\,767\,735\,372\,054\,850\,360\,566\,139\\ &\quad 467\,808\,929\,990\,837\,105\,470\,974\,552\,361\,365\,055\,161\,249\\ &\quad 233\,420\,623\,865\,343\,547\,300\,656\,708\,665\,607\,104\,743\,811\\ &\quad 933\,447\,546\,470\,400\,000\,000\end{aligned}$$

- Пак с принципа на включването и изключването, отговорът е

$$\sum_{k=0}^{6} (-1)^k \binom{6}{k} (30-k)^{100}$$

Като число, отговорът има 148 десетични цифри:

$$\begin{aligned}&4\,186\,848\,268\,232\,717\,069\,508\,448\,697\,546\,078\,643\,779\,703\\&\quad 210\,653\,217\,353\,880\,557\,117\,558\,817\,629\,650\,196\,245\,532\\&\quad 260\,080\,014\,829\,123\,140\,299\,115\,253\,887\,760\,051\,816\,719\\&\quad 640\,425\,081\,283\,359\,354\,880\end{aligned}$$

□

Задача 49. По колко начина може Дядо Коледа да раздаде 19 различни подаръка на 6 деца, така че всяко дете да получи поне два подаръка?

Решение: Задачата е частнен случай на задачата, колко са функциите $f : X \to Y$, такива че $\forall c \in Y \exists a, b \in X : a \neq b \wedge f(a) = f(b) = c$, ако $|X| = m$ и $|Y| = n$. Можем да наречем тези функции, "двукратни сюрекции", тъй като всеки елемент от кодомейна трябва да е "покрит" от поне два различни елемента от домейна.

Решението се получава чрез принципа на включването и изключването, аналогично на обикновените сюрекции. Сега обаче трябва да съобразим по колко различни начина може даден елемент от кодомейна да бъде "нарушител". При обикновените сюрекции даден елемент може да е "нарушител" по един начин: да не е образ на никой елемент от домейна. При двукратните сюрекции може да е "нарушител" по два начина: да не е покрит изобщо, или да е покрит само веднъж. Отговорът-формула е

$$\sum_{k=0}^{n} \left((-1)^k \binom{n}{k} \sum_{l=0}^{k} \left(\binom{k}{l} \left(\prod_{t=0}^{l-1} (m-t) \right) (n-k)^{m-l} \right) \right) \tag{26}$$

Сравнете този израз с формулата за броя на сюрекциите:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m \tag{27}$$

Да аргументираме (26). Частта $\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}}$ е същата в (26) и (27), защото е свързана с прилагането на принципа на включването и изключването: нарушителите са от 0 до n, за k на брой нарушителя събираемото е със знак $(-1)^k$, и има $\binom{n}{k}$ начина да изберем k нарушителя от общо n елемента. По отношение на (27), разсъждението за множителя $\boxed{(n-k)^m}$ е много просто: това е броят на всички функции, без ограничения, от m-елементен домейн в $(n-k)$-елементен кодомейн.

По отношение на (26), разсъждението за множителя $\sum_{l=0}^{k} \left(\binom{k}{l} \left(\prod_{t=0}^{l-1} (m-t) \right) (n-k)^{m-l} \right)$ е по-сложно. Всеки от тези k нарушителя може да е нарушител по един от двата начина: може да е не е покрит изобщо, или може да е покрит еднократно. Нека l е броят на тези нарушители, които са покрити еднократно. Сумираме за $l = 0, \ldots, k$ със следните съображения.

- При $l = 0$ всички k нарушители не са покрити изобщо, и събираемото става

$$\binom{k}{0}\left(\prod_{t=0}^{0-1}(m-t)\right)(n-k)^{m-0} = 1 \times 1 \times (n-k)^m = (n-k)^m$$

тоест точно колкото е съответния множител в (27). Тук имаме итерирано произведение $\prod_{t=0}^{0-1}(m-t)$, в което индексната променлива взема стойности от празен интервал; по дефиниция, такова произведение е $1^{\dagger}$.

- При $l = 1$ имаме точно един нарушител, който е покрит еднократно, а останалите нарушители не са покрити изобщо. Този нарушител можем да изберем по $\binom{k}{1} = k$ начина. Тъй като е покрит еднократно, нарушителят е образ на точно един елемент от домейна, който можем да изберем по $\prod_{t=0}^{1-1}(m-t) = m$ начина. Множителят $(n-k)^{m-1}$ идва оттам, че за останалите елементи от кодомейна—тези, които не са нарушители—разглеждаме всички функции без ограничения от $(m-1)$-елементен домейн в тях. Защо $(m-1)$-елементен? – защото точно един елемент от домейна бива “използван”, за да бъде изобразен в единствения нарушител, който е покрит еднократно.

  Събираемото става

$$\binom{k}{1}\left(\prod_{t=0}^{1-1}(m-t)\right)(n-k)^{m-1} = k \times m \times (n-k)^{m-1}$$

- При $l = 2$, нарушителите, покрити еднократно, са 2. Тях можем да изберем по $\binom{k}{2}$ начина. По $m(m-1)$ начина можем да изберем два елемента от домейна, които се изобразяват в тези два нарушителя. Важно е да бъде разбрано, че този брой е именно $m(m-1)$, а не $\binom{m}{2}$, защото има значение кой елемент (от двата) от домейна върху кой от двата нарушителя се изобразява. С други думи, множителят е $\prod_{t=0}^{2-1}(m-t) = m(m-1)$. Тъй като вече изпозлвахме два елемента от домейна, остават $m-2$ елемента от домейна, такива че за последния множител разглеждаме всички функциии от тях върху $(n-k)$-елементен кодомейн, които са на брой $(n-k)^{m-2}$. Събираемото става

$$\binom{k}{2}\left(\prod_{t=0}^{2-1}(m-t)\right)(n-k)^{m-2} = \binom{k}{2} \times m(m-1) \times (n-k)^{m-2}$$

- При $l = 3$, нарушителите, покрити еднократно, са 3. Тях можем да изберем по $\binom{k}{3}$ начина. По $m(m-1)(m-2)$ начина можем да изберем три елемента от домейна, които се изобразяват в тези три нарушителя; а не по $\binom{m}{3}$. С други думи, множителят е $\prod_{t=0}^{3-1}(m-t)$. Тъй като вече изпозлвахме три елемента от домейна, остават $m-3$ елемента от домейна, такива че за последния множител разглеждаме всички функциии от тях върху $(n-k)$-елементен кодомейн, които са на брой $(n-k)^{m-3}$. Събираемото става

$$\binom{k}{3}\left(\prod_{t=0}^{3-1}(m-t)\right)(n-k)^{m-3} = \binom{k}{3} \times m(m-1)(m-2) \times (n-k)^{m-3}$$

- И така нататък.

†Тъй като 1 е неутралният елемент на операцията умножение. Аналогично, итерирано сумиране, при което индексната променлива взема стойности от празен интервал, е 0, понеже 0 е неутралният елемент на събирането.

С това обосновахме множителя

$$\sum_{l=0}^{k}\left(\binom{k}{l}\left(\prod_{t=0}^{l-1}(m-t)\right)(n-k)^{m-l}\right)$$

Да разгледаме малък пример, по-малък от този в задачата. Нека домейнът има 8 елемента и кодомейнът има 4 елемента. Очевидно, двукратни сюрекции има. Техният брой е

$$\begin{aligned}
&+1\times(1\times 1\times 4^8)\\
&-4\times(1\times 1\times 3^8+1\times 8\times 3^7)\\
&+6\times(1\times 1\times 2^8+2\times 8\times 2^7+1\times 8\times 7\times 2^6)\\
&-4\times(1\times 1\times 1^8+3\times 8\times 1^7+3\times 8\times 7\times 1^6+1\times 8\times 7\times 6\times 1^5)\\
&+1\times(1\times 1\times 0^8+4\times 8\times 0^5+6\times 8\times 7\times 0^6+4\times 8\times 7\times 6\times 0^5+1\times 8\times 7\times 6\times 5\times 0^4)=\\
&2\,520
\end{aligned}$$

В три различни цвята са оцветени трите множителя на

$$\binom{k}{l}\left(\prod_{t=0}^{l-1}(m-t)\right)(n-k)^{m-l}$$

И така, обосновахме формулата (26). Ако заместим m с 19 и n с 6 и извършим изчисленията, получаваме отговор $183\,421\,913\,875\,200$. Това е броят на начините за раздаване на подаръците. $\square$

3.5 Доказателства с комбинаторни разсъждения

Задача 50. Докажете с комбинаторни разсъждения, че

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

Решение: Нека A е множество с $2n$ елемента. Нека всеки елемент от A има атрибут-цвят, като n елемента са бели, а останалите n, черни. По колко начина можем да подберем различни подмножества на A с по n елемента?

От една страна, това може да стане по

$$\binom{2n}{n} \tag{28}$$

начина, тъй като това са комбинаторни конфигурации без повторение и без наредба – тук не обръщаме внимание на цветовете на подбраните елементи.

От друга страна, можем да разбием подбиранията по броя на елементите от единия цвят, да речем белия. Белите елементи, които попадат в дадено подбиране, може да са 0 или 1 или $\ldots$ или n. Следователно, да подберем n елемента от общо $2n$ в тази задача е същото като да подберем k елемента измежду всичките n бели и да подберем $n-k$ елемента измежду всичките n черни. За дадено k, такова че $0 \leq k \leq n$, броят начини да подберем n елемента от общо $2n$, така че k измежду подбраните да са бели, е, по принципа на произведението:

$$\underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{броят начини } k \text{ елемента от общо } n \text{ да са бели}} \times \underbrace{\binom{n}{n-k}}_{\text{броят начини останалите елементи да са черни}}$$

Тъй като k се мени от 0 до n и подбиранията се разбиват по k (при различен брой бели елементи в две подбирания, те задължително са различни), общият брой подбирания е:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

Но знаем, че $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, следователно общият брой на подбирания е:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \tag{29}$$

Изразите (28) и (29) броят едно и също количество, следователно са равни. □

Задача 51. Докажете с комбинаторни разсъждения, че

$$n! = \sum_{m=0}^{n} \left(\binom{n}{m} \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \binom{n-m}{k} (n-m-k)! \right)$$

Решение: Лявата страна брои всички пермутации на n елемента, да кажем $\{1, 2, \ldots, n\}$. Очевидно това множество може да бъде разбито на $n+1$ непразни подмножества по това, точно колко елемента са си на мястото: 0 или 1 или 2 или ... или n. Дясната страна брои същото множество пермутации, но по-детайлно, съгласно споменатото разбиване: има $\binom{n}{m}$ начина да изберем точно кои елементи да са си на местата, за оставащите $n-m$ позиции ползваме вече изведената формула за броя на пермутациите, при които нито един елемент не си е на мястото. □

Задача 52. Докажете с комбинаторни разсъждения, че

$$n! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n$$

Решение: Вече доказахме, че броят на сюрекциите от m в n елементно множество е $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$. При $m = n$ получаваме израза от дясната страна. Но ако $n = m$, то тези сюрекции всъщност са биекциите между двете множества. А броят на биекциите е $n!$, което е лявата страна. □

Задача 53. Докажете с комбинаторни разсъждения, че

$$n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$$

Решение: 2^n е броят на всички булеви вектори с дължина n. Очевидно $n2^n$ е общият брой на елементите във всички булеви вектори с дължина n. От тези $n2^n$ елементи, половината са нули, а другата половина, единици. Този факт се извежда тривиално от най-общи съображения: ако инвертираме побитово всички вектори, получаваме същото множество, като броят на единиците в началното е равен на броя на нулите в полученото, но понеже полученото е същото като началното, броят на единиците е равен на броя на нулите в него.

Щом половината от $n2^n$ елемента са единици, то единиците са точно $\frac{1}{2}n2^n = n2^{n-1}$. Това е лявата страна на тъждеството, което доказваме. Дясната страна очевидно също брои единиците във всички булеви вектори с дължина n, но го прави по-подробно: $k\binom{n}{k}$ е точно бройката на единиците в подмножеството вектори, имащи точно k единици. □

3.6 Рекурентни отношения

Задача 54. *Двоичен брояч с n позиции* е вектор от n двоични числа (0 или 1), който се интерпретира като число, записано в двоична позиционна бройна система. Броячът бива увеличаван с 1 в дискретни моменти във времето. В началния момент t_0 броячът съдържа само нули, тоест представлява числото 0 в двоична система, към него се добавя 1 и в момент t_1 той представлява числото 1 в двоична система, към него се добавя 1 и в момент t_2 той представлява числото 2 в двоична система, към него се добавя 1 и в момент t_3 той представлява числото 3 в двоична система, и така нататък:

$$\begin{array}{llll}
t_0: & 0\,0 & \cdots & 0\,0\,0 \\
t_1: & 0\,0 & \cdots & 0\,0\,1 \\
t_2: & 0\,0 & \cdots & 0\,1\,0 \\
t_3: & 0\,0 & \cdots & 0\,1\,1 \\
t_4: & 0\,0 & \cdots & 1\,0\,0 \\
 & \cdots & &
\end{array}$$

Изобщо, в момент t_k броячът съдържа двоичния запис на числото k. Увеличаването на брояча с 1 продължава, докато той съдържа поне една нула. Когато броячът съдържа само единици:

$$\underbrace{1\,1 \quad \cdots \quad 1\,1\,1}_{n \text{ на брой}}$$

увеличаването спира и броячът остава в това състояние. Отговорете на следните въпроси:

1. Кое е числото (в двоична позиционна бройна система), което остава записано в брояча след спирането му?

2. *Битово обръщане* наричаме всяко преминаване от 0 в 1 или от 1 в 0 от даден t_i към следващия t_{i+1}. Примерно, при преминаването от t_0 в t_1 има точно едно битово обръщане, а именно в най-дясната позиция; при преминаването от t_1 в t_2 има точно две битови обръщания, а именно в двете най-десни позиции ; при преминаването от t_2 в t_3 има точно едно битово обръщане; при преминаването от t_3 в t_4 има точно три битови обръщания; и така нататък. Нека T_n е броят на всички битови обръщания за двоичен брояч с n позиции – от момента t_0 до последния момент, в който увеличаването спира. Напишете рекурентно отношение за T_n и дайте кратка аргументация за него.

3. Решете рекурентното отношение чрез метода с характеристичното уравнение.

Решение:

1. Числото е $2^n - 1$.

2. Ако $n = 1$, битовото обръщане е само едно. За по-големи стойности на n забелязваме, че докато старшият бит (най-вляво) е 0 се извършват всички битови обръщания на подброяча с дължина $n-1$, после се извършват n битови обръщания и от $0\,1\,1\,\ldots 1\,1$ броячът става $1\,0\,0\,\ldots 0\,0$ и после, докато старшият бит е 1, се извършват всички битови обръщания на подброяча с дължина $n-1$. И така:

$$T_1 = 1$$
$$T_n = 2T_{n-1} + n \quad \text{за } n > 1$$

Алтернативно, началното условие може да е $T_0 = 0$, ако допускаве празен брояч.

3. Решението е $T(n) = 2^{n+1} - n - 2$. □

3.7 Числа на Fibonacci

Задача 55. Числата на Фибоначи се дефинират чрез следното рекурентно отношение:

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{за } n > 1$$

1. Представете си стълба с n стъпала. Представете си човек, който изкачва стълбата. Той или тя или взема стъпалата едно по едно, или по две стъпала на веднъж, но не повече. Каква е връзката между броя на различните начини този човек да изкачи стълбата и числата на Фибоначи?

2. Представете си правоъгълник $2 \times n$ сантиметра и n на брой малки правоъгълничета 1×2 сантиметра. Покриване на големия правоъгълник с малките правоъгълничета е всяко тяхно слагане върху големия правоъгълник, такова че нито те се припокриват, нито остава непокрита част от големия правоъгълник. Очевидно бройката на малките правоъгълничета е достатъчна, за да покрием големия. Нещо повече, начините за покриване на големия са много, ако n е голямо число. Каква е връзката между начините да бъде покрит големия правоъгълник и числата на Фибоначи?

3. Докажете, че

$$F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{0}{n}$$

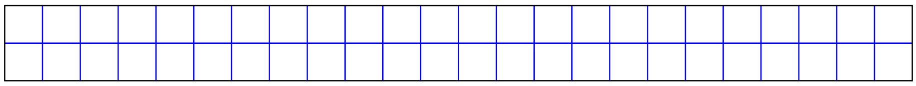
Решение:

1. Нека броят начини да изкачи стълба с n стъпала е S_n. Ако стъпалото е само едно, има един начин да качи стълбата. Ако стъпалата са две, има два начина: или с две малки стъпки (от по едно стъпало), или с една голяма крачка (две стъпала наведнъж). Така че $S_1 = 1$ и $S_2 = 2$.

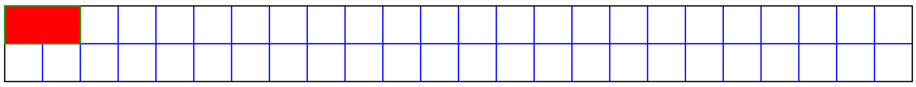
   При повече от две стъпала, може да започне или с една малка стъпка, при което ще остават $n-1$ стъпала, които може да се изкачат по S_{n-1} начина, или с една голяма крачка от две стъпала, при което ще остават $n-2$ стъпала, които може да се изкачат по S_{n-2} начина. Очевидно множеството от изкачванията се разбива на две подмножества: тези, които започват с малка стъпка, и тези, които започват с голяма крачка. По принципа на разбиването, $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$.

Виждаме, че $S_n = F_{n+1}$ за $n \geq 1$.

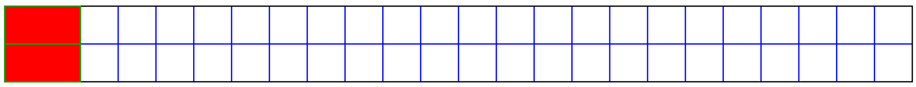
2. Нека броят на тези покривания е C_n. Да си представим големия правогълник нарисуван хоризонтално и покрит с квадратчета 1×1:



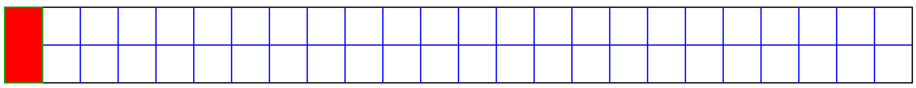
Всяко от покриващите правоъгълничета трябва да покрие точно две съседни (с обща страна) квадратчета. Да си представим, че покриването започва отляво. Квадратчето в горния лав ъгъл трябва да бъде покрито. Има точно два начина да стане това. При първия начин:



трябва задължително да продължим така:



и свеждаме задачата до задача за покриване на правоъгълник $2 \times (n-2)$. При втория начин:



свеждаме задачата до задача за покриване на правоъгълник $2 \times (n-1)$. Доказахме, че за всички достатъчно големи стойности на n, $C_n = C_{n-1} + C_{n-2}$. Очевидно $C_1 = 1$ и $C_2 = 2$.

Виждаме, че $C_n = F_{n+1}$ за $n \geq 1$.

3. Ще докажем тъждеството с комбинаторни разсъждения. Нека T_n е броят на всички булеви вектори с дължина n, в които няма съседни единици. Ще покажем, че $T_n = F_{n+2}$ за всяко $n \geq 1$. Очевидно $T_1 = 2$, а $T_2 = 3$, защото от четирите булеви вектора с дължина 2, точно 11 не отговаря на условието.

За $n > 2$, съобразяваме, че всеки такъв вектор може да започва с единица, но тогава вторият му елемент задължително е нула и следва булев вектор с дължина $n-2$ без съседни единици, или да започва с нула, като след нея има булев вектор с дължина $n-1$ без съседни единици. По принципа на разбиването, $T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$. Доказахме, че $T_n = F_{n+2}$ за всяко $n \geq 1$.

Тогава F_{n+1} е T_{n-1}, така че лявата страна на тъждеството брои булевите вектори с дължина $n-1$ без съседни единици. Ще покажем, че дясната страна брои същото множество, но по-подробно.

Един помощен факт: броят на булевите вектори с дължина $n-1$, които съдържат точно m единици (това означава, точно $n-1-m$ нули) и нямат съседни единици, е $\binom{n-m}{m}$. Това се показва много лесно. Първо да си представим единиците, написани в редица, като всяка от тях **без последната** бива следвана от нула (за да няма съседни единици). Значи имаме $m-1$ обекта от тип "единица-нула" $\boxed{10}$ и един обект от тип единица $\boxed{1}$; общо m обекта. Те са наредени така:

$$\boxed{10} \quad \boxed{10} \quad \cdots \quad \boxed{10} \quad \boxed{1}$$

$m-1$ нули са вече "заети" и остават $n-1-m-(m-1) = n-2m$ "свободни" нули, които "влизат" в "празните пространства" между и около споменатите обекти, за да оформят векторите. Празните пространства са $m+1$ на брой (защото обектите са m) и слагаме общо $n-2m$ нули в тях, като всяко слагане на нули ни дава точно един от желаните булеви вектори. Знаем, че можем да сложим $n-2m$ анонимни топки в $m+1$ именувани кутии по точно $\binom{n-2m+m+1-1}{m+1-1} = \binom{n-m}{m}$ начина.

След като сме доказали помощния факт, решението е тривиално. Всяко събираемо вдясно брои точно векторите с дължина $n-1$, които имат m единици и нямат съседни единици, където $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$. По принципа на събирането, сумата от тези бройки е точно броят на векторите с дължина $n-1$ без съседни единици. Някои от събираемите са нули, а именно тези, при които $n-m < m \leftrightarrow n < 2m$. Това има комбинаторен смисъл: при $n < 2m$ има нула вектора с дължина $n-1$ и точно m единици, които нямат съседни единици.