Математически модел

Въвеждаме променливите $x_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, \dots, 11$, като

- $x_j = 1$, ако в квартал j е разположена противопожарна станция, и
- $x_j = 0$ в противен случай.

Така получаваме следната двоична линейна оптимизационна задача

$$\min z = \sum_{j=1}^{11} x_j$$

при ограничения

$$\begin{array}{lllllllllllll}
x_1 & + x_2 & + x_3 & + x_4 & & & & & & & & \geq 1, \\
x_1 & + x_2 & + x_3 & & + x_5 & & & & & & & \geq 1, \\
x_1 & + x_2 & + x_3 & + x_4 & + x_5 & + x_6 & & & & & & \geq 1, \\
x_1 & & + x_3 & + x_4 & & + x_6 & + x_7 & & & & & \geq 1, \\
 & x_2 & + x_3 & & + x_5 & + x_6 & & + x_8 & + x_9 & & & \geq 1, \\
 & & x_3 & + x_4 & + x_5 & + x_6 & + x_7 & + x_8 & & & & \geq 1, \\
 & & & x_4 & & + x_6 & + x_7 & + x_8 & & & & \geq 1, \\
 & & & & x_5 & + x_6 & + x_7 & + x_8 & + x_9 & + x_{10} & & \geq 1, \\
 & & & & x_5 & & & + x_8 & + x_9 & + x_{10} & + x_{11} & \geq 1, \\
 & & & & & & & x_8 & + x_9 & + x_{10} & + x_{11} & \geq 1, \\
 & & & & & & & & x_9 & + x_{10} & + x_{11} & \geq 1,
\end{array}$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, 11.$$

Първото ограничение означава, че трябва да има поне една противопожарна станция в квартал 1 и някой от съседните му квартали 2, 3, 4, т. е. не може първите четири променливи да бъдат едновременно нули. Следващото ограничение е за квартал 2 и т. н. Да отбележим, че коефициентът a_{ij} е 1, ако квартал i е съседен на квартал j или ако $i = j$, и 0 в противен случай. Стълбът A_j на матрицата на ограниченията $\mathbf{A}$ представлява множеството на кварталите, които могат да бъдат обслужени от противопожарна станция, разположена в квартал j. Трябва да се намери множество от такива подмножества j, които *покриват* множеството на всички квартали в смисъл, че всеки квартал се появява в множеството на обслужване на *поне* една противопожарна станция.

Едно оптимално решение е $x_3 = x_6 = x_9 = 1$ и останалите са равни на 0, т. е. необходими са три противопожарни станции и едно възможно тяхно разположение е в квартали 3, 6 и 9. Задачата има и други оптимални решения (например квартали 3, 8 и 9).

Задачата за покритие се характеризира с двоични променливи, ограничения $\geq$, чиито десни страни са 1, а левите им страни са суми на някои от променливите. В общия случай целевата функция може да има произволни коефициенти (например цената за изграждане и поддръжка на противопожарна станция в съответния квартал).