Математически модел

Построяването на математически модел при задачи от този вид се различава от построяването на математически модел при разгледаните досега задачи. Тук е необходимо да се извърши допълнителна работа преди да бъдат определени променливите на задачата, а именно — да се намерят всички възможни варианти за разкрояване на един стандартен рулон на необходимите за изпълнението на поръчката парчета. След това трябва да се намери комбинация от тези *варианти за разкрояване* (променливи на задачата), с помощта на която *да се изпълни поръчката* (ограничения на задачата) и *общите отпадъци* (целева функция) да бъдат минимални.

Променливите на задачата се определят като *количеството стандартни рулони, разкроени с помощта на отделните варианти*.

Затова най-напред се съставя една таблица с всички възможни варианти за разкрояване на стандартните рулони (табл. 1).

Таблица 1. Варианти за разкрояване

Ширина (фута)	Варианти 1	2	3	4	5	6	Количество рулони
9	2	1	1	0	0	0	300
7	0	1	0	2	1	0	200
5	0	0	2	1	2	4	150
Отпадък (фута)	2	4	1	1	3	0	

Обикновено построяването на таблицата се извършва по следния начин:

- Взема се най-големият размер (в случая 9 фута) и рулонът (20 фута) се разрязва на максималния възможен брой парчета (2) с този размер; остават 2 фута, които са отпадък, понеже минималният размер, който е необходим, е 5 фута. Така се получава вариант 1 от табл. 1.

- След това се реже едно парче по-малко от най-големия размер (в случая само 1 парче от 9 фута); остават 11 фута, от които се реже максималният брой (1) от следващия по големина размер (7 фута); остават 4 фута отпадък (вариант 2 от табл. 1).

- Продължава се с едно парче от 9 фута, но вече не се реже от 7 фута (защото при предишното рязане е отрязано едно парче от 7 фута, а целта сега е с единица по-малко, т. е. нула) и остатъкът от 11 фута ни дава 2 парчета по 5 фута и отпадък 1 фут (вариант 3 от таблица 1).

Продължава се без парчета от 9 фута, защото с едно парче от 9 фута са направени всички възможни варианти, и последователно се получават варианти 4, 5 и 6 от табл. 1.

Сега вече можем да определим променливите по следния начин: x_j е количеството стандартни рулони, разкроени по j-тия начин, $j = 1, \ldots, 6$.

За построяване на целевата функция забелязваме, че общият обем на отпадъците може да се пресметне като разлика между обема на всички разрязани рулони и обема на рулоните, необходими за изпълнение на поръчката (да се има предвид, че в общия отпадък се включват не само маломерните парчета, но и произведените в повече от заявените в поръчката).

Ако L е напречното сечение на един стандартен рулон, записваме това по следния начин:

- обем на използваните стандартни рулони $= 20L(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)$,

- обем на поръчаните рулони $= L(150 \times 5 + 200 \times 7 + 300 \times 9) = 4850L$.

Тъй като обемът на рулоните, необходими за изпълнение на поръчката ($4850L$), и напречното сечение L са положителни константи, то търсенето на минимум на

$$20L(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) - 4850L$$

е еквивалентно на търсенето на

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6.$$

Следователно задачата за разкрояване с минимално количество на отпадъка е еквивалентна на задачата за разкрояване на минимално общо количество стандартни рулони. **Този факт е налице при всички задачи от подобно естество.**

Ограниченията на задачата се състоят в това получените рулони с ширина 9, 7 и 5 фута да бъдат достатъчни за изпълнението на поръчката. Като използваме вариантите от табл. 1, получаваме:

- количество на рулоните с ширина 9 фута $= 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 300$;

- количество на рулоните с ширина 7 фута $= x_2 + 2x_4 + x_5 \geq 200$;

- количество на рулоните с ширина 5 фута $= 2x_3 + x_4 + 2x_5 + 4x_6 \geq 150$.

Окончателно получаваме следната линейна оптимизационна задача

$$\min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

при ограничения

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 + x_3 & & \geq 300, \\ x_2 + 2x_4 + x_5 & & \geq 200, \\ 2x_3 + x_4 + 2x_5 + 4x_6 & \geq & 150, \\ x_j \geq 0 \text{ и цели}, \ j = 1, \ldots, 6. & & \end{array}$$

Едно оптимално решение на тази задача е $\mathbf{x}^* = (150, 0, 0, 100, 0, 13)^T$. Задачата има и други оптимални решения. Във всички случаи целевата функция е равна на 263.