

# Модел на средите и изчислителни процеси

Трифон Трифонов

Функционално програмиране, спец. Информатика, 2016/17 г.

13–20 октомври 2016 г.

## Среди в Scheme

- Връзката между символите и техните оценки се записват в речник, който се нарича **среда**.

## Среди в Scheme

- Връзката между символите и техните оценки се записват в речник, който се нарича **среда**.
- Всеки символ има най-много една оценка в дадена среда.

## Среди в Scheme

- Връзката между символите и техните оценки се записват в речник, който се нарича **среда**.
- Всеки символ има най-много една оценка в дадена среда.
- В даден момент могат да съществуват много среди.

## Среди в Scheme

- Връзката между символите и техните оценки се записват в речник, който се нарича **среда**.
- Всеки символ има най-много една оценка в дадена среда.
- В даден момент могат да съществуват много среди.
- Символите винаги се оценяват в една конкретна среда.

## Среди в Scheme

- Връзката между символите и техните оценки се записват в речник, който се нарича **среда**.
- Всеки символ има най-много една оценка в дадена среда.
- В даден момент могат да съществуват много среди.
- Символите винаги се оценяват в една конкретна среда.
- **Символите могат да има различни оценки в различни среди.**

## Среди в Scheme

- Връзката между символите и техните оценки се записват в речник, който се нарича **среда**.
- Всеки символ има най-много една оценка в дадена среда.
- В даден момент могат да съществуват много среди.
- Символите винаги се оценяват в една конкретна среда.
- **Символите могат да има различни оценки в различни среди.**
- При стартиране Scheme по подразбиране работи в глобалната среда.

## Среди в Scheme

- Връзката между символите и техните оценки се записват в речник, който се нарича **среда**.
- Всеки символ има най-много една оценка в дадена среда.
- В даден момент могат да съществуват много среди.
- Символите винаги се оценяват в една конкретна среда.
- **Символите могат да има различни оценки в различни среди.**
- При стартиране Scheme по подразбиране работи в **глобалната среда**.
- В глобалната среда са дефинирани символи за стандартни операции и функции.



## Пример за среда

- `(define a 8)`

E
a: 8

## Пример за среда

- `(define a 8)`
- `r` → Грешка!

E
a: 8

## Пример за среда

- `(define a 8)`
- `r` → Грешка!
- `(define r 5)`

E
a:8
r:5

## Пример за среда

- `(define a 8)`
- `r` → Грешка!
- `(define r 5)`
- `(+ r 3)` → 8

E
a:8
r:5

# Пример за среда

- `(define a 8)`
- `r` → **Грешка!**
- `(define r 5)`
- `(+ r 3)` → 8
- `(define (f x) (* x r))`



# Пример за среда

- `(define a 8)`
- `r` → **Грешка!**
- `(define r 5)`
- `(+ r 3)` → 8
- `(define (f x) (* x r))`
- `(f 3)` → 15



# Пример за среда

- `(define a 8)`
- `r` → **Грешка!**
- `(define r 5)`
- `(+ r 3)` → 8
- `(define (f x) (* x r))`
- `(f 3)` → 15
- `(f r)` → 25



# Функции и среди

- Всяка функция  $f$  пази указател към средата  $E$ , в която е дефинирана.



# Функции и среди

- Всяка функция  $f$  пази указател към средата  $E$ , в която е дефинирана.
- При извикване на  $f$ :

# Функции и среди

- Всяка функция  $f$  пази указател към средата  $E$ , в която е дефинирана.
- При извикване на  $f$ :
  - създава се нова среда  $E_1$ , която разширява  $E$

# Функции и среди

- Всяка функция  $f$  пази указател към средата  $E$ , в която е дефинирана.
- При извикване на  $f$ :
  - създава се нова среда  $E_1$ , която разширява  $E$
  - в  $E_1$  всеки символ означаващ формален параметър се свързва с оценката на фактическия параметър

# Функции и среди

- Всяка функция  $f$  пази указател към средата  $E$ , в която е дефинирана.
- При извикване на  $f$ :
  - създава се нова среда  $E_1$ , която разширява  $E$
  - в  $E_1$  всеки символ означаващ формален параметър се свързва с оценката на фактическия параметър
  - тялото на  $f$  се оценява в  $E_1$

## Дърво от среди

- Всяка среда пази указател към своя “родителска среда”, която разширява

## Дърво от среди

- Всяка среда пази указател към своя “родителска среда”, която разширява
- така се получава дърво от среди

## Дърво от среди

- Всяка среда пази указател към своя “родителска среда”, която разширява
- така се получава дърво от среди
- при оценка на символ в дадена среда **E**

## Дърво от среди

- Всяка среда пази указател към своя “родителска среда”, която разширява
- така се получава дърво от среди
- при оценка на символ в дадена среда **E**
  - първо се търси оценката му в **E**



## Дърво от среди

- Всяка среда пази указател към своя “родителска среда”, която разширява
- така се получава дърво от среди
- при оценка на символ в дадена среда **E**
  - първо се търси оценката му в **E**
  - ако символът не е дефиниран в **E**, се преминава към родителската среда

## Дърво от среди

- Всяка среда пази указател към своя “родителска среда”, която разширява
- така се получава дърво от среди
- при оценка на символ в дадена среда **E**
  - първо се търси оценката му в **E**
  - ако символът не е дефиниран в **E**, се преминава към родителската среда
  - при достигане на най-горната среда, ако символът не е дефиниран и в нея се извежда съобщение за грешка

## Извикване на дефинирана функция

- `(define r 5)`

E
r : 5

## Извикване на дефинирана функция

- `(define r 5)`
- `(define a 3)`

E
r:5
a:3

## Извикване на дефинирана функция

- `(define r 5)`
- `(define a 3)`
- `(define (f x) (* x r))`



## Извикване на дефинирана функция

- `(define r 5)`
- `(define a 3)`
- `(define (f x) (* x r))`
- `{E} (f a)`



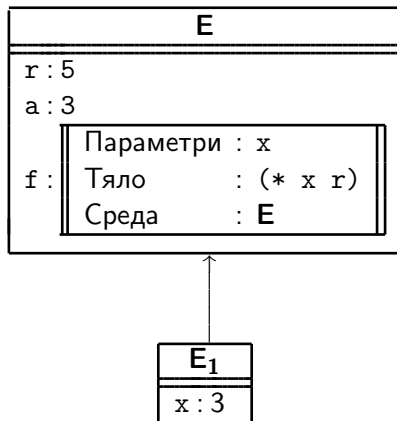
## Извикване на дефинирана функция

- `(define r 5)`
- `(define a 3)`
- `(define (f x) (* x r))`
- `{E} (f a)`  
 $\downarrow$   
`{E} (f 3)`



## Извикване на дефинирана функция

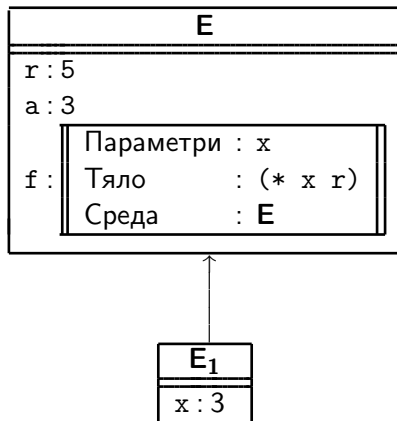
- `(define r 5)`
- `(define a 3)`
- `(define (f x) (* x r))`
- $\{E\}$      `(f a)`  
                   ↓  
 $\{E\}$      `(f 3)`  
                   ↓  
 $\{E_1\}$     `(* x r)`





## Извикване на дефинирана функция

- `(define r 5)`
- `(define a 3)`
- `(define (f x) (* x r))`
- $\{E\}$  `(f a)`  
 $\downarrow$   
 $\{E\}$  `(f 3)`  
 $\downarrow$   
 $\{E_1\}$  `(* x r)`  
 $\downarrow$   
 15



# Какво е рекурсия?

# Какво е рекурсия?



# Какво е рекурсия?



# Какво е рекурсия?

# Какво е рекурсия?

Повторение чрез позоваване на себе си

# Какво е рекурсия?

Повторение чрез позоваване на себе си

Рекурсивна функция: дефинира се чрез себе си

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 0, & \text{(база)} \\ n \cdot (n - 1)!, & \text{при } n > 0. & \text{(стъпка)} \end{cases}$$

# Какво е рекурсия?

Повторение чрез позоваване на себе си

Рекурсивна функция: дефинира се чрез себе си

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 0, & \text{(база)} \\ n \cdot (n - 1)!, & \text{при } n > 0. & \text{(стъпка)} \end{cases}$$

- Дава се отговор на най-простата задача (база, дъно)
- Показва се как сложна задача се свежда към една или няколко по-прости задачи от същия вид (стъпка)



# Рекурсивни уравнения

Какво означава “да дефинираме функция чрез себе си”?

# Рекурсивни уравнения

Какво означава “да дефинираме функция чрез себе си”?

Да разгледаме *рекурсивното уравнение*, в което  $F$  е неизвестно:

$$F(n) = \underbrace{\begin{cases} 1, & \text{при } n = 0, \\ n \cdot F(n-1), & \text{при } n > 0. \end{cases}}_{\Gamma(F)(n)}$$

$$F(x) = x + 1$$

$$\begin{cases} 1, & n=0 \\ n \cdot (n-1) + 1, & n > 0 \end{cases}$$

$$n^2 \parallel F(n-1)$$

# Рекурсивни уравнения

Какво означава “да дефинираме функция чрез себе си”?

Да разгледаме *рекурсивното уравнение*, в което  $F$  е неизвестно:

$$F(n) = \underbrace{\begin{cases} 1, & \text{при } n = 0, \\ n \cdot F(n-1), & \text{при } n > 0. \end{cases}}_{\Gamma(F)(n)}$$

$n!$  е “най-малкото” решение на уравнението  $F = \Gamma(F)$ .

dom(F) минимално  $\subseteq$

# Най-малка неподвижна точка

## Теорема (Knaster-Tarski)

*Ако  $\Gamma$  е изчислим оператор, то уравнението  $F = \Gamma(F)$  има единствено най-малко решение  $f$*

# Най-малка неподвижна точка

## Теорема (Knaster-Tarski)

*Ако  $\Gamma$  е изчислим оператор, то уравнението  $F = \Gamma(F)$  има единствено най-малко решение  $f$  (най-малка неподвижна точка на  $\Gamma$ ).*

# Най-малка неподвижна точка

## Теорема (Knaster-Tarski)

*Ако  $\Gamma$  е изчислим оператор, то уравнението  $F = \Gamma(F)$  има единствено най-малко решение  $f$  (най-малка неподвижна точка на  $\Gamma$ ). Нещо повече, решението точно съответства на рекурсивна програма пресмятаща  $f$  чрез  $\Gamma$ .*

# Най-малка неподвижна точка

## Теорема (Knaster-Tarski)

Ако  $\Gamma$  е изчислим оператор, то уравнението  $F = \Gamma(F)$  има единствено най-малко решение  $f$  (**най-малка неподвижна точка на  $\Gamma$** ). Нещо повече, решението точно съответства на рекурсивна програма пресмятаща  $f$  чрез  $\Gamma$ .

```
(define (fact n)
  (if (= n 0) 1
      (* n (fact (- n 1)))))
```

# Най-малка неподвижна точка

## Теорема (Knaster-Tarski)

Ако  $\Gamma$  е изчислим оператор, то уравнението  $F = \Gamma(F)$  има единствено най-малко решение  $f$  (най-малка неподвижна точка на  $\Gamma$ ). Нещо повече, решението точно съответства на рекурсивна програма пресмятаща  $f$  чрез  $\Gamma$ .

```
(define (fact n)
  (if (= n 0) 1
      (* n (fact (- n 1)))))
```

$$G(x) := x + 2$$

$$F(x) := x$$

Кое е най-малкото решение на уравнението  $F(x) = 1 + F(x - 1)$ ?

$F$  и  $G$  са решение!

$$F: x = 1 + x - 1$$

$$G: x + 2 = 1 + x + 2 - 1$$



## Най-малка неподвижна точка

### Теорема (Knaster-Tarski)

Ако  $\Gamma$  е изчислим оператор, то уравнението  $F = \Gamma(F)$  има единствено най-малко решение  $f$  (**най-малка неподвижна точка на  $\Gamma$** ). Нещо повече, решението точно съответства на рекурсивна програма пресмятаща  $f$  чрез  $\Gamma$ .

```
(define (fact n)
  (if (= n 0) 1
      (* n (fact (- n 1)))))
```

Кое е **най-малкото решение** на уравнението  $F(x) = 1 + F(x - 1)$ ?

```
(define (f x) (+ 1 (f (- x 1))))
(f 0) → ?
```

## Най-малка неподвижна точка

### Теорема (Knaster-Tarski)

Ако  $\Gamma$  е изчислим оператор, то уравнението  $F = \Gamma(F)$  има единствено най-малко решение  $f$  (**най-малка неподвижна точка на  $\Gamma$** ). Нещо повече, решението точно съответства на рекурсивна програма пресмятаща  $f$  чрез  $\Gamma$ .

```
(define (fact n)
  (if (= n 0) 1
      (* n (fact (- n 1)))))
```

Кое е **най-малкото решение** на уравнението  $F(x) = 1 + F(x - 1)$ ?

```
(define (f x) (+ 1 (f (- x 1))))
(f 0) → ?
```

$f$  е “празната функция”, т.е.  $\text{dom}(f) = \emptyset$ .

# Операционна и денотационна семантика

Два подхода за описание на смисъла на функциите в Scheme.

## Операционна и денотационна семантика

Два подхода за описание на смисъла на функциите в Scheme.

Нека  $(\text{define } (f \ x) \ \Gamma[f])$  е рекурсивно дефинирана функция.

## Операционна и денотационна семантика

Два подхода за описание на смисъла на функциите в Scheme.  
Нека  $(\text{define } (f\ x) \Gamma[f])$  е рекурсивно дефинирана функция.  
Коя е математическата функция  $f$ , която се пресмята от  $f$ ?

## Операционна и денотационна семантика

Два подхода за описание на смисъла на функциите в Scheme.  
Нека  $(\text{define } (f\ x) \Gamma[f])$  е рекурсивно дефинирана функция.  
Коя е математическата функция  $f$ , която се пресмята от  $f$ ?

### Денотационна семантика

$f$  е най-малката неподвижна точка на уравнението  $F = \Gamma(F)$ .

# Операционна и денотационна семантика

Два подхода за описание на смисъла на функциите в Scheme.  
Нека  $(\text{define } (f\ x) \Gamma[f])$  е рекурсивно дефинирана функция.  
Коя е математическата функция  $f$ , която се пресмята от  $f$ ?

## Денотационна семантика

$f$  е най-малката неподвижна точка на уравнението  $F = \Gamma(F)$ .

## Операционна семантика

Разглеждаме редицата от последователни оценки на комбинацията  
 $(f\ a) \rightarrow \Gamma[f] [x \mapsto a] \rightarrow \dots$

Ако редицата завършва с атома  $b$ , дефинираме  $f(a) := b$ .

# Операционна и денотационна семантика

Два подхода за описание на смисъла на функциите в Scheme.  
Нека  $(\text{define } (f\ x) \Gamma[f])$  е рекурсивно дефинирана функция.  
Коя е математическата функция  $f$ , която се пресмята от  $f$ ?

## Денотационна семантика

$f$  е най-малката неподвижна точка на уравнението  $F = \Gamma(F)$ .

## Операционна семантика

Разглеждаме редицата от последователни оценки на комбинацията  
 $(f\ a) \rightarrow \Gamma[f][x \mapsto a] \rightarrow \dots$

Ако редицата завършва с атома  $b$ , дефинираме  $f(a) := b$ .

Функциите в Scheme имат дуален, но еквивалентен смисъл:

- решения на рекурсивни уравнения
- изчислителни процеси, генериращи се при оценка



# Оценка на рекурсивна функция

(fact 4)

# Оценка на рекурсивна функция

```
(fact 4)  
  ↓  
(if (= 4 0) 1 (* 4 (fact (- 4 1))))
```

# Оценка на рекурсивна функция

```
(fact 4)
  ↓
(* 4 (fact 3))
```

# Оценка на рекурсивна функция

```
(fact 4)
  ↓
(* 4 (fact 3))
  ↓
(* 4 (if (= 3 0) 1 (* 3 (fact (- 3 1)))))
```

# Оценка на рекурсивна функция

```
(fact 4)
  ↓
(* 4 (fact 3))
  ↓
(* 4 (* 3 (fact 2)))
```

# Оценка на рекурсивна функция

```
(fact 4)
  ↓
(* 4 (fact 3))
  ↓
(* 4 (* 3 (fact 2)))
  ↓
(* 4 (* 3 (if (= 2 0) 1 (* 2 (fact (- 2 1))))))
```

# Оценка на рекурсивна функция

```
(fact 4)
  ↓
(* 4 (fact 3))
  ↓
(* 4 (* 3 (fact 2)))
  ↓
(* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
```

# Оценка на рекурсивна функция

```
(fact 4)
  ↓
(* 4 (fact 3))
  ↓
(* 4 (* 3 (fact 2)))
  ↓
(* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
  ↓
(* 4 (* 3 (* 2 (if (= 1 0) 1 (* 1 (fact (- 1 1))))))))
```



# Оценка на рекурсивна функция

```
(fact 4)
  ↓
(* 4 (fact 3))
  ↓
(* 4 (* 3 (fact 2)))
  ↓
(* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
  ↓
(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (fact 0))))))
```

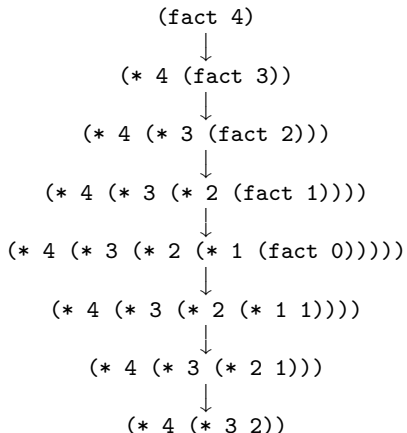
# Оценка на рекурсивна функция

(fact 4)  
↓  
(\* 4 (fact 3))  
↓  
(\* 4 (\* 3 (fact 2)))  
↓  
(\* 4 (\* 3 (\* 2 (fact 1))))  
↓  
(\* 4 (\* 3 (\* 2 (\* 1 (fact 0)))))  
↓  
(\* 4 (\* 3 (\* 2 (\* 1 1))))

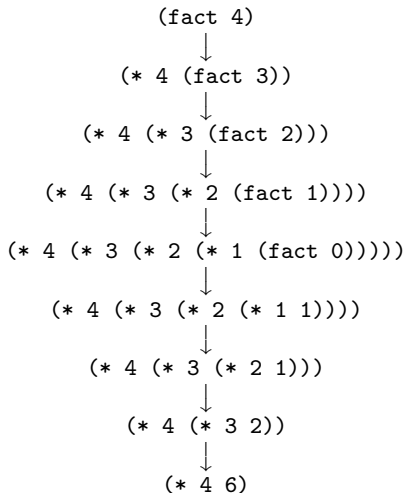
# Оценка на рекурсивна функция

(fact 4)  
↓  
(\* 4 (fact 3))  
↓  
(\* 4 (\* 3 (fact 2)))  
↓  
(\* 4 (\* 3 (\* 2 (fact 1))))  
↓  
(\* 4 (\* 3 (\* 2 (\* 1 (fact 0))))))  
↓  
(\* 4 (\* 3 (\* 2 (\* 1 1))))  
↓  
(\* 4 (\* 3 (\* 2 1)))

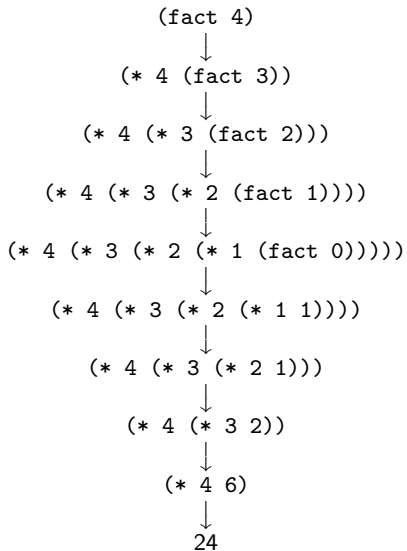
# Оценка на рекурсивна функция



# Оценка на рекурсивна функция



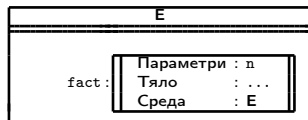
# Оценка на рекурсивна функция



# Оценка на рекурсивна функция в среда

{E}

(fact 4)



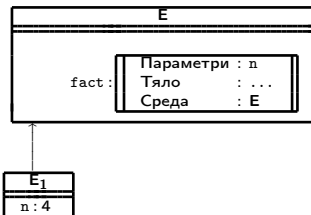
# Оценка на рекурсивна функция в среда

{E}

(fact 4)

{E<sub>1</sub>}

(if (= n 0) 1 (\* n (fact (- n 1))))



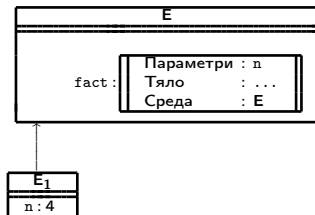


# Оценка на рекурсивна функция в среда

{E}

(fact 4)

↓  
(\* 4 (fact 3))

{E<sub>1</sub>}

# Оценка на рекурсивна функция в среда

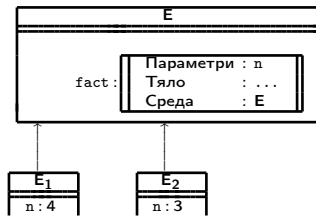
{E}

{E<sub>1</sub>}

{E<sub>2</sub>}

```

      (fact 4)
        ↓
    (* 4 (fact 3))
          ↓
(* 4 (if (= n 0) 1 (* n (fact (- n 1)))))
  
```



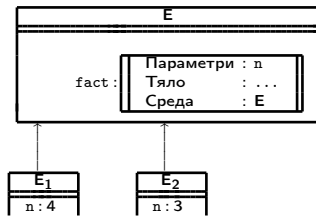
# Оценка на рекурсивна функция в среда

{E}

{E<sub>1</sub>}{E<sub>2</sub>}

```

      (fact 4)
        ↓
    (* 4 (fact 3))
          ↓
    (* 4 (* 3 (fact 2)))
  
```



# Оценка на рекурсивна функция в среда

{E}  
 {E<sub>1</sub>}  
 {E<sub>2</sub>}  
 {E<sub>3</sub>}

```

    (fact 4)
      ↓
    (* 4 (fact 3))
      ↓
    (* 4 (* 3 (fact 2)))
      ↓
    (* 4 (* 3 (if (= n 0) 1 (* n (fact (- n 1))))))
  
```



# Оценка на рекурсивна функция в среда

{E}  
 {E<sub>1</sub>}  
 {E<sub>2</sub>}  
 {E<sub>3</sub>}

```

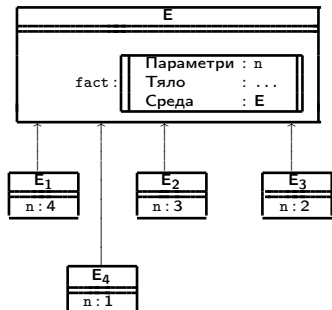
      (fact 4)
        ↓
    (* 4 (fact 3))
          ↓
    (* 4 (* 3 (fact 2)))
            ↓
    (* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
  
```



# Оценка на рекурсивна функция в среда

```

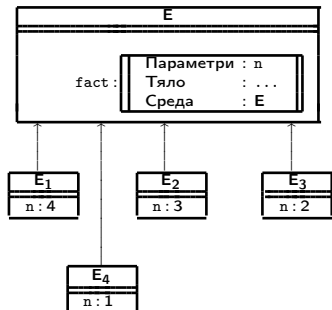
{E}      (fact 4)
          ↓
{E1}   (* 4 (fact 3))
          ↓
{E2}   (* 4 (* 3 (fact 2)))
          ↓
{E3}   (* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
          ↓
{E4}   (* 4 (* 3 (* 2 (if (= n 0) 1 (* n (fact (- n 1)))))))
  
```



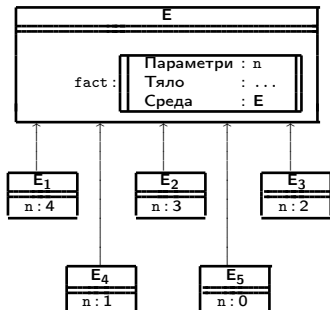
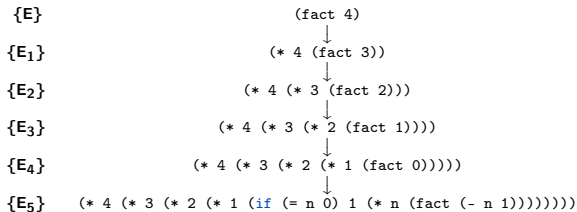
# Оценка на рекурсивна функция в среда

```

{E}      (fact 4)
          ↓
{E1}   (* 4 (fact 3))
          ↓
{E2}   (* 4 (* 3 (fact 2)))
          ↓
{E3}   (* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
          ↓
{E4}   (* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (fact 0))))
  
```

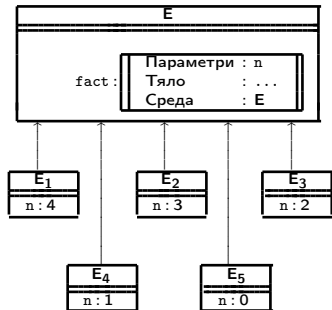
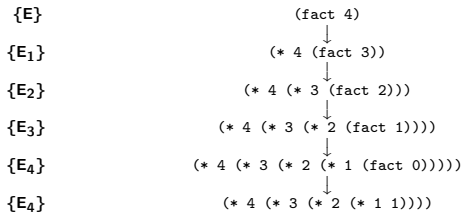


# Оценка на рекурсивна функция в среда





# Оценка на рекурсивна функция в среда

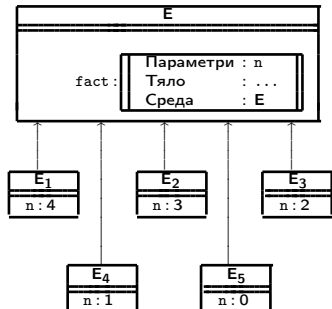


# Оценка на рекурсивна функция в среда

{E}  
 {E<sub>1</sub>}  
 {E<sub>2</sub>}  
 {E<sub>3</sub>}  
 {E<sub>4</sub>}  
 {E<sub>4</sub>}  
 {E<sub>3</sub>}

```

    (fact 4)
      ↓
    (* 4 (fact 3))
      ↓
    (* 4 (* 3 (fact 2)))
      ↓
    (* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
      ↓
    (* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (fact 0))))))
      ↓
    (* 4 (* 3 (* 2 (* 1 1))))
      ↓
    (* 4 (* 3 (* 2 1)))
  
```



# Оценка на рекурсивна функция в среда

{E}

(fact 4)

{E<sub>1</sub>}

(\* 4 (fact 3))

{E<sub>2</sub>}

(\* 4 (\* 3 (fact 2)))

{E<sub>3</sub>}

(\* 4 (\* 3 (\* 2 (fact 1))))

{E<sub>4</sub>}

(\* 4 (\* 3 (\* 2 (\* 1 (fact 0)))))

{E<sub>4</sub>}

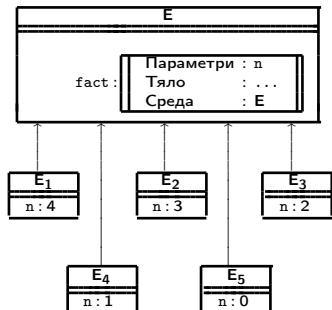
(\* 4 (\* 3 (\* 2 (\* 1 1))))

{E<sub>3</sub>}

(\* 4 (\* 3 (\* 2 1)))

{E<sub>2</sub>}

(\* 4 (\* 3 2))

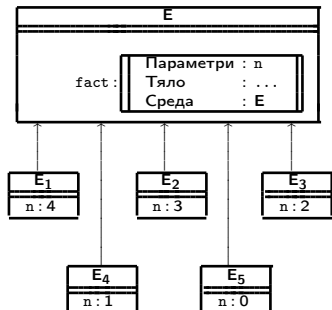


# Оценка на рекурсивна функция в среда

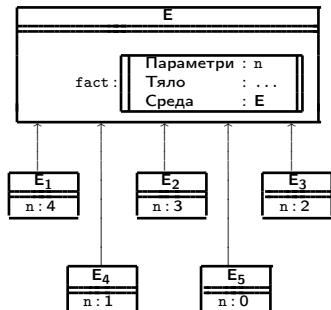
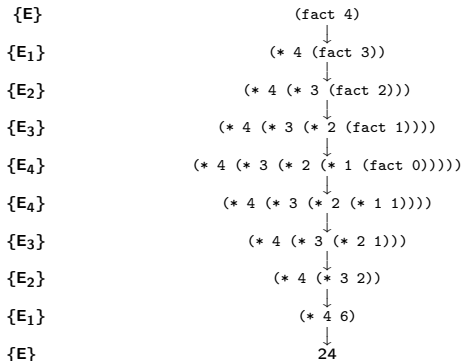
{E}  
 {E<sub>1</sub>}  
 {E<sub>2</sub>}  
 {E<sub>3</sub>}  
 {E<sub>4</sub>}  
 {E<sub>4</sub>}  
 {E<sub>3</sub>}  
 {E<sub>2</sub>}  
 {E<sub>1</sub>}

```

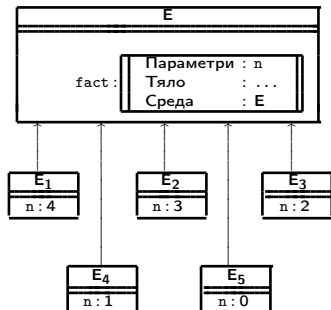
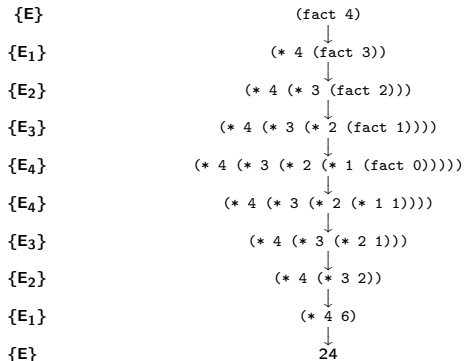
    (fact 4)
      ↓
    (* 4 (fact 3))
      ↓
    (* 4 (* 3 (fact 2)))
      ↓
    (* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
      ↓
    (* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (fact 0)))))
      ↓
    (* 4 (* 3 (* 2 (* 1 1))))
      ↓
    (* 4 (* 3 (* 2 1)))
      ↓
    (* 4 (* 3 2))
      ↓
    (* 4 6)
  
```



# Оценка на рекурсивна функция в среда



# Оценка на рекурсивна функция в среда



Линеен рекурсивен процес

# Факториел с цикъл

## Факториел на C++

```
int fact(int n) {  
    int r = 1;  
    for(int i = 1; i <= n; i++)  
        r *= i;  
    return r;  
}
```

# Факториел с цикъл

## Факториел на C++

```
int fact(int n) {  
    int r = 1;  
    for(int i = 1; i <= n; i++)  
        r *= i;  
    return r;  
}
```

## Превод на Scheme

```
(define (for n r i)  
    (if (<= i n)  
        (for n (* r i) (+ i 1))  
        r))  
  
(define (fact n)  
    (for n 1 1))
```



# Факториел с цикъл

## Факториел на C++

```
int fact(int n) {  
    int r = 1;  
    for(int i = 1; i <= n; i++)  
        r *= i;  
    return r;  
}
```

## Превод на Scheme

```
(define (for n r i)  
    (if (<= i n)  
        (for n (* r i) (+ i 1))  
        r))  
  
(define (fact n)  
    (for n 1 1))
```

# Факториел с цикъл

## Факториел на C++

```
int fact(int n) {  
    int r = 1;  
    for(int i = 1; i <= n; i++)  
        r *= i;  
    return r;  
}
```

## Превод на Scheme

```
(define (for n r i)  
  (if (<= i n)  
      (for n (* r i) (+ i 1))  
      r))  
  
(define (fact n)  
  (for n 1 1))
```

# Факториел с цикъл

## Факториел на C++

```
int fact(int n) {  
    int r = 1;  
    for(int i = 1; i <= n; i++)  
        r *= i;  
    return r;  
}
```

## Превод на Scheme

```
(define (for n r i)  
    (if (<= i n)  
        (for n (* r i) (+ i 1))  
        r))  
  
(define (fact n)  
    (for n 1 1))
```

# Факториел с цикъл

## Факториел на C++

```
int fact(int n) {  
    int r = 1;  
    for(int i = 1; i <= n; i++)  
        r *= i;  
    return r;  
}
```

## Превод на Scheme

```
(define (for n r i)  
    (if (<= i n)  
        (for n (* r i) (+ i 1))  
        r))  
  
(define (fact n)  
    (for n 1 1))
```

# Факториел с цикъл

## Факториел на C++

```
int fact(int n) {  
    int r = 1;  
    for(int i = 1; i <= n; i++)  
        r *= i;  
    return r;  
}
```

## Превод на Scheme

```
(define (for n r i)  
    (if (<= i n)  
        (for n (* r i) (+ i 1))  
        r))  
  
(define (fact n)  
    (for n 1 1))
```

# Факториел с цикъл

## Факториел на C++

```
int fact(int n) {  
    int r = 1;  
    for(int i = 1; i <= n; i++)  
        r *= i;  
    return r;  
}
```

## Превод на Scheme

```
(define (for n r i)  
    (if (<= i n)  
        (for n (* r i) (+ i 1))  
        r))  
  
(define (fact n)  
    (for n 1 1))
```

# Факториел с цикъл

## Факториел на C++

```
int fact(int n) {  
    int r = 1;  
    for(int i = 1; i <= n; i++)  
        r *= i;  
    return r;  
}
```

## Превод на Scheme

```
(define (for n r i)  
    (if (<= i n)  
        (for n (* r i) (+ i 1))  
        r))  
  
(define (fact n)  
    (for n 1 1))
```

# Оценка на итеративен факториел

(fact 4)



# Оценка на итеративен факториел

```
(fact 4)
  ↓
(for 4 1 1)
```

# Оценка на итеративен факториел

```
(fact 4)
  ↓
(for 4 1 1)
  ↓
(if (<= 1 4) (for 4 (* 1 1) (+ 1 1)) 1)
```

# Оценка на итеративен факториел

```
(fact 4)
  ↓
(for 4 1 1)
  ↓
(for 4 1 2)
```

# Оценка на итеративен факториел

```
(fact 4)
  ↓
(for 4 1 1)
  ↓
(for 4 1 2)
  ↓
(if (<= 2 4) (for 4 (* 1 2) (+ 2 1)) 2)
```

# Оценка на итеративен факториел

```
(fact 4)
  ↓
(for 4 1 1)
  ↓
(for 4 1 2)
  ↓
(for 4 2 3)
```

# Оценка на итеративен факториел

```
(fact 4)
  ↓
(for 4 1 1)
  ↓
(for 4 1 2)
  ↓
(for 4 2 3)
  ↓
(if (<= 3 4) (for 4 (* 2 3) (+ 3 1)) 6)
```

# Оценка на итеративен факториел

```
(fact 4)
  ↓
(for 4 1 1)
  ↓
(for 4 1 2)
  ↓
(for 4 2 3)
  ↓
(for 4 6 4)
```

# Оценка на итеративен факториел

```
(fact 4)
  ↓
(for 4 1 1)
  ↓
(for 4 1 2)
  ↓
(for 4 2 3)
  ↓
(for 4 6 4)
  ↓
(if (<= 4 4) (for 4 (* 6 4) (+ 4 1)) 24)
```



# Оценка на итеративен факториел

```
(fact 4)
  ↓
(for 4 1 1)
  ↓
(for 4 1 2)
  ↓
(for 4 2 3)
  ↓
(for 4 6 4)
  ↓
(for 4 24 5)
```

# Оценка на итеративен факториел

```
(fact 4)
  ↓
(for 4 1 1)
  ↓
(for 4 1 2)
  ↓
(for 4 2 3)
  ↓
(for 4 6 4)
  ↓
(for 4 24 5)
  ↓
(if (<= 5 4) (for 4 (* 24 5) (+ 5 1)) 24)
```

# Оценка на итеративен факториел

```
(fact 4)
  ↓
(for 4 1 1)
  ↓
(for 4 1 2)
  ↓
(for 4 2 3)
  ↓
(for 4 6 4)
  ↓
(for 4 24 5)
  ↓
24
```

# Оценка на итеративен факториел

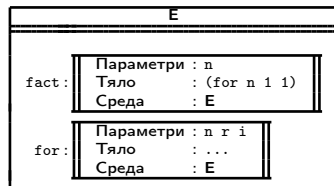
```
(fact 4)
  ↓
(for 4 1 1)
  ↓
(for 4 1 2)
  ↓
(for 4 2 3)
  ↓
(for 4 6 4)
  ↓
(for 4 24 5)
  ↓
24
```

Линеен итеративен процес

# Оценка на итеративен факториел със среди

{E}

(fact 4)



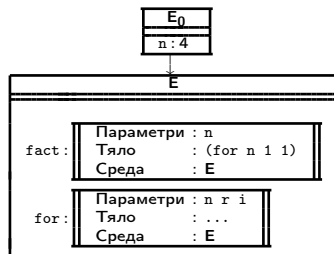
# Оценка на итеративен факториел със среди

 $\{E\}$ 

(fact 4)

 $\{E_0\}$ 

(for n 1 1)



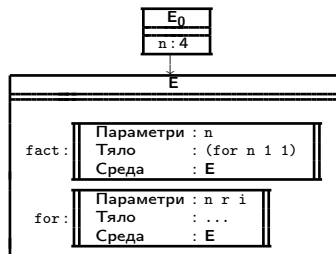
# Оценка на итеративен факториел със среди

 $\{E\}$ 

(fact 4)

 $\{E_0\}$ 

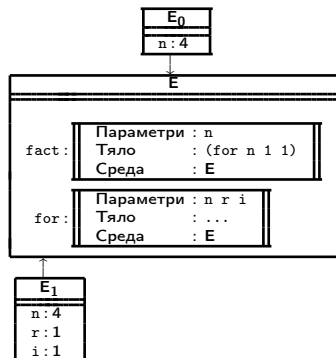
(for 4 1 1)



# Оценка на итеративен факториел със среди

```

{E}           (fact 4)
               ↓
{E0}        (for 4 1 1)
               ↓
{E1} (if (<= i n) (for n (* r i) (+ i 1)) r)
  
```





# Оценка на итеративен факториел със среди

 $\{E\}$ 

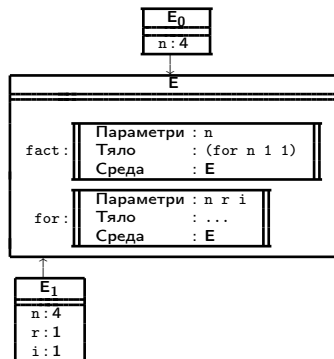
(fact 4)

 $\{E_0\}$ 

(for 4 1 1)

 $\{E_1\}$ 

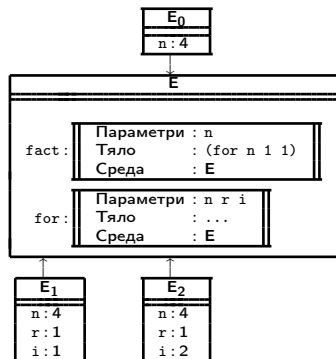
(for 4 1 2)



# Оценка на итеративен факториел със среди

```

{E}      (fact 4)
          ↓
{E0}   (for 4 1 1)
          ↓
{E1}   (for 4 1 2)
          ↓
{E2}   (if (<= i n) (for n (* r i) (+ i 1)) r)
  
```



# Оценка на итеративен факториел със среди

$\{E\}$  (fact 4)  
 $\{E_0\}$  (for 4 1 1)  
 $\{E_1\}$  (for 4 1 2)  
 $\{E_2\}$  (for 4 2 3)



# Оценка на итеративен факториел със среди

$\{E\}$  (fact 4)  
 $\downarrow$   
 $\{E_0\}$  (for 4 1 1)  
 $\downarrow$   
 $\{E_1\}$  (for 4 1 2)  
 $\downarrow$   
 $\{E_2\}$  (for 4 2 3)  
 $\downarrow$   
 $\{E_3\}$  (if ( $\leq$  i n) (for n (\* r i) (+ i 1)) r)



# Оценка на итеративен факториел със среди

$\{E\}$  (fact 4)  
 $\{E_0\}$  (for 4 1 1)  
 $\{E_1\}$  (for 4 1 2)  
 $\{E_2\}$  (for 4 2 3)  
 $\{E_3\}$  (for 4 6 4)

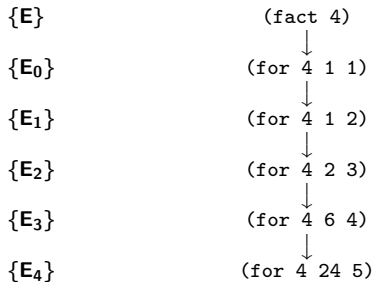


# Оценка на итеративен факториел със среди

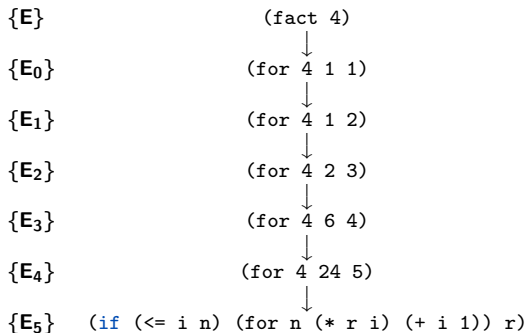
$\{E\}$  (fact 4)  
 $\{E_0\}$  (for 4 1 1)  
 $\{E_1\}$  (for 4 1 2)  
 $\{E_2\}$  (for 4 2 3)  
 $\{E_3\}$  (for 4 6 4)  
 $\{E_4\}$  (if ( $\leq$  i n) (for n (\* r i) (+ i 1)) r)



# Оценка на итеративен факториел със среди

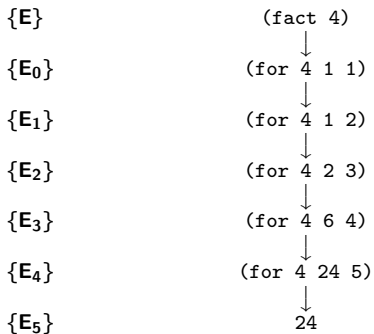


# Оценка на итеративен факториел със среди





# Оценка на итеративен факториел със среди



# Рекурсивен и итеративен процес

```

      (fact 4)
        ↓
    (* 4 (fact 3))
        ↓
    (* 4 (* 3 (fact 2)))
        ↓
    (* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
        ↓
    (* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (fact 0)))))
        ↓
    (* 4 (* 3 (* 2 (* 1 1))))
        ↓
    (* 4 (* 3 (* 2 1)))
        ↓
    (* 4 (* 3 2))
        ↓
    (* 4 6)
        ↓
    24
  
```

```

(define (fact n)
  (if (= n 0) 1
      (* n (fact (- n 1)))))
  
```

```

      (fact 4)
        ↓
    (for 4 1 1)
        ↓
    (for 4 1 2)
        ↓
    (for 4 2 3)
        ↓
    (for 4 6 4)
        ↓
    (for 4 24 5)
        ↓
    24
  
```

```

(define (for n r i)
  (if (<= i n)
      (for n (* r i) (+ i 1))
      r))
  
```

```

(define (fact n)
  (for n 1 1))
  
```

# Рекурсивен и итеративен процес

```

      (fact 4)
        ↓
    (* 4 (fact 3))
        ↓
  (* 4 (* 3 (fact 2)))
        ↓
(* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
        ↓
(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (fact 0)))))
        ↓
  (* 4 (* 3 (* 2 (* 1 1))))
        ↓
    (* 4 (* 3 (* 2 1)))
        ↓
      (* 4 (* 3 2))
        ↓
        (* 4 6)
        ↓
          24
  
```

```

(define (fact n)
  (if (= n 0) 1
      (* n (fact (- n 1)))))
  
```

$F(x) = \{ F(\dots) \}$

```

      (fact 4)
        ↓
    (for 4 1 1)
        ↓
    (for 4 1 2)
        ↓
    (for 4 2 3)
        ↓
    (for 4 6 4)
        ↓
    (for 4 24 5)
        ↓
          24
  
```

```

(define (for n r i)
  (if (<= i n)
      (for n (* r i) (+ i 1))
      r))
  
```

```

(define (fact n)
  (for n 1 1))
  
```

# Опашкова рекурсия

- Функциите, в които има отложени операции генерират същински рекурсивни процеси

# Опашкова рекурсия

- Функциите, в които има отложени операции генерират същински **рекурсивни процеси**
- Рекурсивно извикване, при което няма отложена операция се нарича **опашкова рекурсия**

# Опашкова рекурсия

- Функциите, в които има отложени операции генерират същински **рекурсивни процеси**
- Рекурсивно извикване, при което няма отложена операция се нарича **опашкова рекурсия**
- Функциите, в които всички рекурсивни извиквания са опашкови генерират **итеративни процеси**

# Опашкова рекурсия

- Функциите, в които има отложени операции генерират същински **рекурсивни процеси**
- Рекурсивно извикване, при което няма отложена операция се нарича **опашкова рекурсия**
- Функциите, в които всички рекурсивни извиквания са опашкови генерират **итеративни процеси**
- При итеративните процеси липсва етап на свиването на рекурсията

# Опашкова рекурсия

- Функциите, в които има отложени операции генерират същински **рекурсивни процеси**
- Рекурсивно извикване, при което няма отложена операция се нарича **опашкова рекурсия**
- Функциите, в които всички рекурсивни извиквания са опашкови генерират **итеративни процеси**
- При итеративните процеси липсва етап на свиването на рекурсията
- Опашковата рекурсия се използва за симулиране на цикли



# Опашкова рекурсия

- Функциите, в които има отложени операции генерират същински **рекурсивни процеси**
- Рекурсивно извикване, при което няма отложена операция се нарича **опашкова рекурсия**
- Функциите, в които всички рекурсивни извиквания са опашкови генерират **итеративни процеси**
- При итеративните процеси липсва етап на свиването на рекурсията
- Опашковата рекурсия се използва за симулиране на цикли
- В Scheme опашковата рекурсия **по стандарт** се интерпретира като цикъл

# Опашкова рекурсия

- Функциите, в които има отложени операции генерират същински **рекурсивни процеси**
- Рекурсивно извикване, при което няма отложена операция се нарича **опашкова рекурсия**
- Функциите, в които всички рекурсивни извиквания са опашкови генерират **итеративни процеси**
- При итеративните процеси липсва етап на свиването на рекурсията
- Опашковата рекурсия се използва за симулиране на цикли
- В Scheme опашковата рекурсия **по стандарт** се интерпретира като цикъл
  - т.е. не се заделя памет за всяко рекурсивно извикване

## Рекурсивен и итеративен процес

```

      (fact 4)
        ↓
    (* 4 (fact 3))
        ↓
  (* 4 (* 3 (fact 2)))
        ↓
(* 4 (* 3 (* 2 (fact 1))))
        ↓
(* 4 (* 3 (* 2 (* 1 (fact 0)))))
        ↓
  (* 4 (* 3 (* 2 (* 1 1))))
        ↓
    (* 4 (* 3 (* 2 1)))
        ↓
      (* 4 (* 3 2))
        ↓
        (* 4 6)
          ↓
            24
  
```

```

(define (fact n)
  (if (= n 0) 1
      (* n (fact (- n 1)))))
  
```

```

      (fact 4)
        ↓
    (for 4 1 1)
        ↓
    (for 4 1 2)
        ↓
    (for 4 2 3)
        ↓
    (for 4 6 4)
        ↓
    (for 4 24 5)
        ↓
        24
  
```

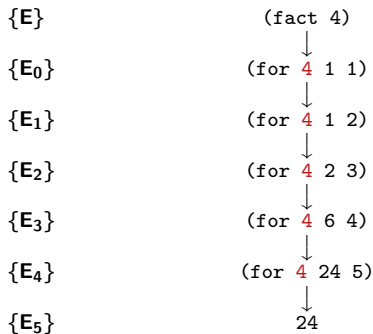
```

(define (for n r i)
  (if (<= i n)
      (for n (* r i) (+ i 1))
      r))
  
```

```

(define (fact n)
  (for n 1 1))
  
```

## Оценка на итеративен факториел със среди



# Вложени дефиниции

- `(define (<функция> {<параметър>} {<дефиниция>} <тяло>)`
- При извикване на <функция> първо се оценяват всички <дефиниция> и след това се оценява <тяло>
- Вложените дефиниции се оценяват и записват в средата, която се **оценява** функцията, а не в средата, в която е **дефинирана**
- Пример:

```
(define (dist x1 y1 x2 y2)
  (define dx (- x2 x1))
  (define dy (- y2 y1))
  (define (sq x) (* x x))
  (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
```

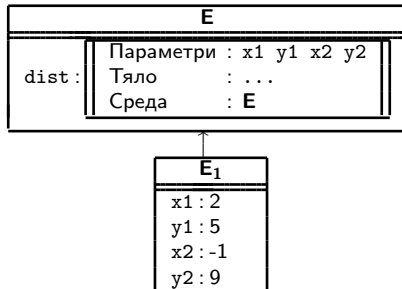
# Оценка на вложени функции

`{E}``(dist 2 5 -1 9)`

E	
dist:	Параметри : x1 y1 x2 y2 Тяло : ... Среда : E

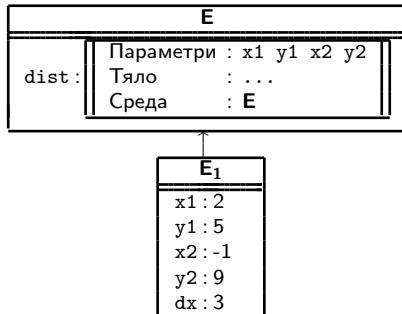
## Оценка на вложени функции

{E}      (dist 2 5 -1 9)



# Оценка на вложени функции

```
{E}      (dist 2 5 -1 9)
           ↓
{E1}   (define dx (- x2 x1))
```



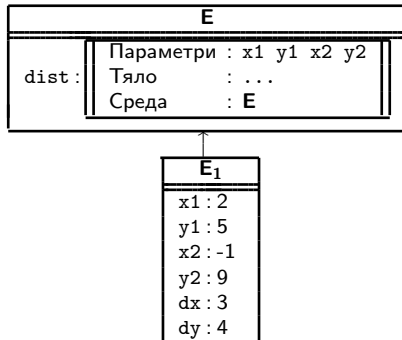


## Оценка на вложени функции

```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
           ↓
{E1}   (define dx (- x2 x1))
{E1}   (define dy (- y2 y1))

```



## Оценка на вложени функции

```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
          ↓
{E1}   (define dx (- x2 x1))
{E1}   (define dy (- y2 y1))
{E1}   (define sq (* x x))

```



# Оценка на вложени функции

```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
           ↓
{E1}   (define dx (- x2 x1))
{E1}   (define dy (- y2 y1))
{E1}   (define sq (* x x))
{E1}   (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
  
```



## Оценка на вложени функции

```

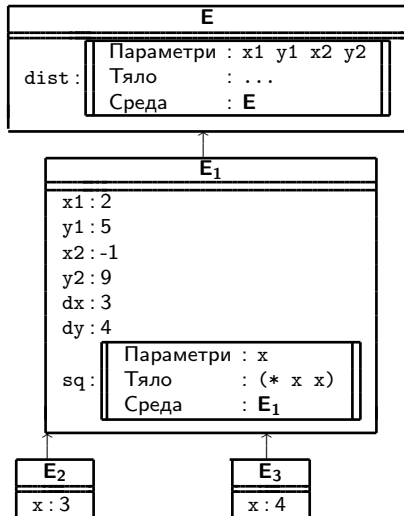
{E}      (dist 2 5 -1 9)
           ↓
{E1}   (define dx (- x2 x1))
{E1}   (define dy (- y2 y1))
{E1}   (define sq (* x x))
{E1}   (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
           ↓
{E2}   (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
  
```



## Оценка на вложени функции

```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
          ↓
{E1}   (define dx (- x2 x1))
{E1}   (define dy (- y2 y1))
{E1}   (define sq (* x x))
{E1}   (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
          ↓
{E2}   (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
          ↓
{E3}   (sqrt (+ 9 (* x x)))
  
```



## Оценка на вложени функции

```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
          ↓
{E1}   (define dx (- x2 x1))
{E1}   (define dy (- y2 y1))
{E1}   (define sq (* x x))
{E1}   (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
          ↓
{E2}   (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
          ↓
{E3}   (sqrt (+ 9 (* x x)))
          ↓
{E1}   (sqrt (+ 9 16))
  
```



## Оценка на вложени функции

```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
          ↓
{E1}   (define dx (- x2 x1))
{E1}   (define dy (- y2 y1))
{E1}   (define sq (* x x))
{E1}   (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
          ↓
{E2}   (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
          ↓
{E3}   (sqrt (+ 9 (* x x)))
          ↓
{E1}   (sqrt (+ 9 16))
          ↓
{E1}   (sqrt 25)
  
```



# Оценка на вложени функции

```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
          ↓
{E1}   (define dx (- x2 x1))
{E1}   (define dy (- y2 y1))
{E1}   (define sq (* x x))
{E1}   (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
          ↓
{E2}   (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
          ↓
{E3}   (sqrt (+ 9 (* x x)))
          ↓
{E1}   (sqrt (+ 9 16))
          ↓
{E1}   (sqrt 25)
          ↓
{E1}   5
  
```





## Вложена помощна итеративна функция

При итеративни функция е удобно помощната функция да е вложена.

```
(define (for n r i)
  (if (<= i n)
      (for n (* r i) (+ i 1))
      r))
```

```
(define (fact n)
  (for n 1 1))
```

## Вложена помощна итеративна функция

При итеративни функция е удобно помощната функция да е вложена.

```
(define (fact n)
  (define (for r i)
    (if (<= i n)
        (for (* r i) (+ i 1))
        r))
  (for 1 1))
```

## Вложена помощна итеративна функция

При итеративни функция е удобно помощната функция да е вложена.

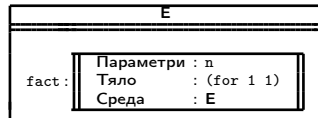
```
(define (fact n)
  (define (for r i)
    (if (<= i n)
        (for (* r i) (+ i 1))
        r))
  (for 1 1))
```

Вложените дефиниции “виждат” символите на обхващащите им дефиниции.

# Оценка на итеративен факториел с вложена функция

 $\{E\}$ 

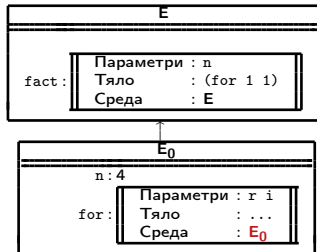
(fact 4)



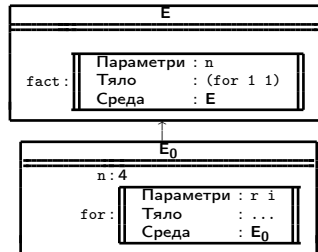
# Оценка на итеративен факториел с вложена функция

$\{E\}$  `(fact 4)`  
 $\{E_0\}$  `(define (for r i) ...)`

↓



# Оценка на итеративен факториел с вложена функция

 $\{E\}$ `(fact 4)` $\{E_0\}$ `(for 1 1)`

# Оценка на итеративен факториел с вложена функция

```

{E}      (fact 4)
          ↓
{E0}   (for 1 1)
          ↓
{E1}   (if (<= i n) (for (* r i) (+ i 1)) r)
  
```



# Оценка на итеративен факториел с вложена функция

$\{E\}$                     (fact 4)  
                               ↓  
 $\{E_0\}$                     (for 1 1)  
                               ↓  
 $\{E_1\}$                     (for 1 2)





# Оценка на итеративен факториел с вложена функция

```

{E}      (fact 4)
          ↓
{E0}   (for 1 1)
          ↓
{E1}   (for 1 2)
          ↓
{E2}   (if (<= i n) (for (* r i) (+ i 1)) r)
  
```



# Оценка на итеративен факториел с вложена функция

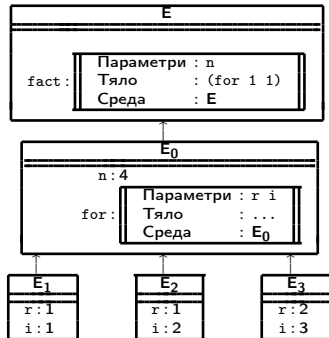
$\{E\}$                     (fact 4)  
                               ↓  
 $\{E_0\}$                     (for 1 1)  
                               ↓  
 $\{E_1\}$                     (for 1 2)  
                               ↓  
 $\{E_2\}$                     (for 2 3)



# Оценка на итеративен факториел с вложена функция

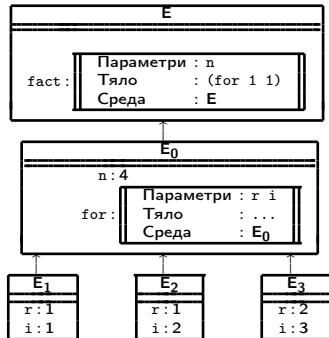
```

{E}      (fact 4)
          ↓
{E0}   (for 1 1)
          ↓
{E1}   (for 1 2)
          ↓
{E2}   (for 2 3)
          ↓
{E3}   (if (<= i n) (for (* r i) (+ i 1)) r)
  
```



# Оценка на итеративен факториел с вложена функция

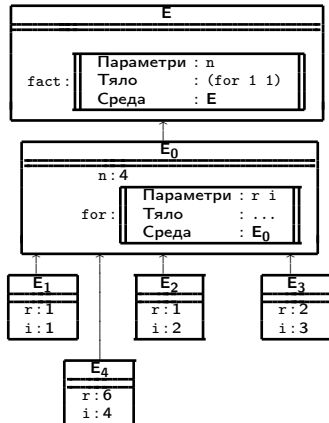
{E}	(fact 4)
	↓
{E <sub>0</sub> }	(for 1 1)
	↓
{E <sub>1</sub> }	(for 1 2)
	↓
{E <sub>2</sub> }	(for 2 3)
	↓
{E <sub>3</sub> }	(for 6 4)



# Оценка на итеративен факториел с вложена функция

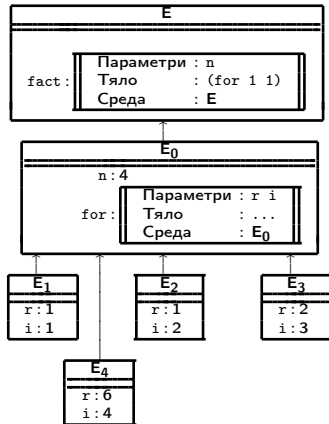
```

{E}      (fact 4)
          ↓
{E0}   (for 1 1)
          ↓
{E1}   (for 1 2)
          ↓
{E2}   (for 2 3)
          ↓
{E3}   (for 6 4)
          ↓
{E4}   (if (<= i n) (for (* r i) (+ i 1)) r)
  
```



# Оценка на итеративен факториел с вложена функция

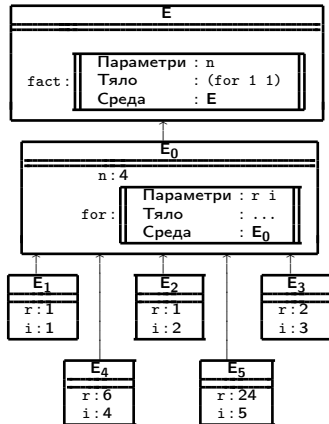
{E}	(fact 4)
	↓
{E <sub>0</sub> }	(for 1 1)
	↓
{E <sub>1</sub> }	(for 1 2)
	↓
{E <sub>2</sub> }	(for 2 3)
	↓
{E <sub>3</sub> }	(for 6 4)
	↓
{E <sub>4</sub> }	(for 24 5)



# Оценка на итеративен факториел с вложена функция

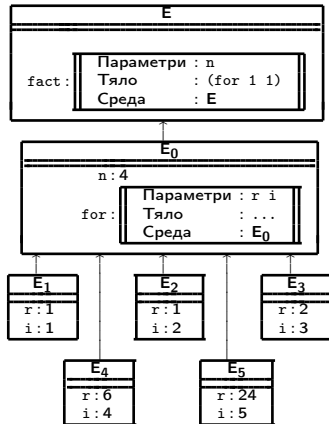
```

{E}      (fact 4)
          ↓
{E0}   (for 1 1)
          ↓
{E1}   (for 1 2)
          ↓
{E2}   (for 2 3)
          ↓
{E3}   (for 6 4)
          ↓
{E4}   (for 24 5)
          ↓
{E5}   (if (<= i n) (for (* r i) (+ i 1)) r)
  
```



# Оценка на итеративен факториел с вложена функция

{E}	(fact 4)
	↓
{E <sub>0</sub> }	(for 1 1)
	↓
{E <sub>1</sub> }	(for 1 2)
	↓
{E <sub>2</sub> }	(for 2 3)
	↓
{E <sub>3</sub> }	(for 6 4)
	↓
{E <sub>4</sub> }	(for 24 5)
	↓
{E <sub>5</sub> }	24





# Специална форма let

- `(let ({(<символ> <израз>)}) <тяло>)`

# Специална форма let

- `(let ({(<символ> <израз>)}) <тяло>)`
- `(let ((<символ1> <израз1>)  
(<символ2> <израз2>)  
...  
(<символn> <изразn>))  
<тяло>)`

# Специална форма let

- `(let ({(<символ> <израз>)}) <тяло>)`
- `(let ((<символ1> <израз1>)  
(<символ2> <израз2>)  
...  
(<символn> <изразn>))  
<тяло>)`
- При оценка на `let` в среда **E**:

## Специална форма let

- `(let ({(<символ> <израз>)}) <тяло>)`
- `(let ((<символ1> <израз1>)  
(<символ2> <израз2>)  
...  
(<символn> <изразn>))  
<тяло>)`
- При оценка на `let` в среда **E**:
  - Създава се нова среда **E<sub>1</sub>** разширение на текущата среда **E**

## Специална форма let

- `(let ({<символ> <израз>})) <тяло>`
- `(let ((<символ1> <израз1>)  
(<символ2> <израз2>)  
...  
(<символn> <изразn>))  
<тяло>)`
- При оценка на `let` в среда **E**:
  - Създава се нова среда **E<sub>1</sub>** разширение на текущата среда **E**
  - Оценката на `<израз1>` в **E** се свързва със `<символ1>` в **E<sub>1</sub>**

## Специална форма let

- $(\text{let } (\{ \langle \text{символ} \rangle \langle \text{израз} \rangle \}) \langle \text{тяло} \rangle)$
- $(\text{let } ((\langle \text{символ}_1 \rangle \langle \text{израз}_1 \rangle)$   
     $(\langle \text{символ}_2 \rangle \langle \text{израз}_2 \rangle)$   
    ...  
     $(\langle \text{символ}_n \rangle \langle \text{израз}_n \rangle))$   
     $\langle \text{тяло} \rangle)$
- При оценка на let в среда  $E$ :
  - Създава се нова среда  $E_1$  разширение на текущата среда  $E$
  - Оценката на  $\langle \text{израз}_1 \rangle$  в  $E$  се свързва със  $\langle \text{символ}_1 \rangle$  в  $E_1$
  - Оценката на  $\langle \text{израз}_2 \rangle$  в  $E$  се свързва със  $\langle \text{символ}_2 \rangle$  в  $E_1$

# Специална форма let

- $(\text{let } (\{(\langle \text{символ} \rangle \langle \text{израз} \rangle)\}) \langle \text{тяло} \rangle)$
- $(\text{let } ((\langle \text{символ}_1 \rangle \langle \text{израз}_1 \rangle)$   
     $(\langle \text{символ}_2 \rangle \langle \text{израз}_2 \rangle)$   
    ...  
     $(\langle \text{символ}_n \rangle \langle \text{израз}_n \rangle))$   
     $\langle \text{тяло} \rangle)$
- При оценка на let в среда  $E$ :
  - Създава се нова среда  $E_1$  разширение на текущата среда  $E$
  - Оценката на  $\langle \text{израз}_1 \rangle$  в  $E$  се свързва със  $\langle \text{символ}_1 \rangle$  в  $E_1$
  - Оценката на  $\langle \text{израз}_2 \rangle$  в  $E$  се свързва със  $\langle \text{символ}_2 \rangle$  в  $E_1$
  - ...

# Специална форма let

- $(\text{let } (\{(\langle \text{символ} \rangle \langle \text{израз} \rangle)\}) \langle \text{тяло} \rangle)$
- $(\text{let } ((\langle \text{символ}_1 \rangle \langle \text{израз}_1 \rangle)$   
     $(\langle \text{символ}_2 \rangle \langle \text{израз}_2 \rangle)$   
    ...  
     $(\langle \text{символ}_n \rangle \langle \text{израз}_n \rangle))$   
     $\langle \text{тяло} \rangle)$
- При оценка на let в среда  $E$ :
  - Създава се нова среда  $E_1$  разширение на текущата среда  $E$
  - Оценката на  $\langle \text{израз}_1 \rangle$  в  $E$  се свързва със  $\langle \text{символ}_1 \rangle$  в  $E_1$
  - Оценката на  $\langle \text{израз}_2 \rangle$  в  $E$  се свързва със  $\langle \text{символ}_2 \rangle$  в  $E_1$
  - ...
  - Оценката на  $\langle \text{израз}_n \rangle$  в  $E$  се свързва със  $\langle \text{символ}_n \rangle$  в  $E_1$



## Специална форма let

- $(\text{let } (\{(\langle \text{символ} \rangle \langle \text{израз} \rangle)\}) \langle \text{тяло} \rangle)$
- $(\text{let } ((\langle \text{символ}_1 \rangle \langle \text{израз}_1 \rangle)$   
     $(\langle \text{символ}_2 \rangle \langle \text{израз}_2 \rangle)$   
    ...  
     $(\langle \text{символ}_n \rangle \langle \text{израз}_n \rangle))$   
     $\langle \text{тяло} \rangle)$
- При оценка на let в среда  $E$ :
  - Създава се нова среда  $E_1$  разширение на текущата среда  $E$
  - Оценката на  $\langle \text{израз}_1 \rangle$  в  $E$  се свързва със  $\langle \text{символ}_1 \rangle$  в  $E_1$
  - Оценката на  $\langle \text{израз}_2 \rangle$  в  $E$  се свързва със  $\langle \text{символ}_2 \rangle$  в  $E_1$
  - ...
  - Оценката на  $\langle \text{израз}_n \rangle$  в  $E$  се свързва със  $\langle \text{символ}_n \rangle$  в  $E_1$
  - Връща се оценката на  $\langle \text{тяло} \rangle$  в средата  $E_1$

## Специална форма let

- $(\text{let } (\{(\langle \text{символ} \rangle \langle \text{израз} \rangle)\}) \langle \text{тяло} \rangle)$
- $(\text{let } ((\langle \text{символ}_1 \rangle \langle \text{израз}_1 \rangle)$   
     $(\langle \text{символ}_2 \rangle \langle \text{израз}_2 \rangle)$   
    ...  
     $(\langle \text{символ}_n \rangle \langle \text{израз}_n \rangle))$   
     $\langle \text{тяло} \rangle)$
- При оценка на let в среда  $E$ :
  - Създава се нова среда  $E_1$  разширение на текущата среда  $E$
  - Оценката на  $\langle \text{израз}_1 \rangle$  в  $E$  се свързва със  $\langle \text{символ}_1 \rangle$  в  $E_1$
  - Оценката на  $\langle \text{израз}_2 \rangle$  в  $E$  се свързва със  $\langle \text{символ}_2 \rangle$  в  $E_1$
  - ...
  - Оценката на  $\langle \text{израз}_n \rangle$  в  $E$  се свързва със  $\langle \text{символ}_n \rangle$  в  $E_1$
  - Връща се оценката на  $\langle \text{тяло} \rangle$  в средата  $E_1$
- let няма странични ефекти върху средата!

## Специална форма let

- $(\text{let } (\{(\langle \text{символ} \rangle \langle \text{израз} \rangle)\}) \langle \text{тяло} \rangle)$
- $(\text{let } ((\langle \text{символ}_1 \rangle \langle \text{израз}_1 \rangle)$   
     $(\langle \text{символ}_2 \rangle \langle \text{израз}_2 \rangle)$   
    ...  
     $(\langle \text{символ}_n \rangle \langle \text{израз}_n \rangle))$   
     $\langle \text{тяло} \rangle)$
- При оценка на let в среда  $E$ :
  - Създава се нова среда  $E_1$  разширение на текущата среда  $E$
  - Оценката на  $\langle \text{израз}_1 \rangle$  в  $E$  се свързва със  $\langle \text{символ}_1 \rangle$  в  $E_1$
  - Оценката на  $\langle \text{израз}_2 \rangle$  в  $E$  се свързва със  $\langle \text{символ}_2 \rangle$  в  $E_1$
  - ...
  - Оценката на  $\langle \text{израз}_n \rangle$  в  $E$  се свързва със  $\langle \text{символ}_n \rangle$  в  $E_1$
  - Връща се оценката на  $\langle \text{тяло} \rangle$  в средата  $E_1$
- let няма странични ефекти върху средата!
  - за разлика от define

## Пример за let

```
(define (dist x1 y1 x2 y2)
  (let ((dx (- x2 x1))
        (dy (- y2 y1)))
    (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))))
```

## Пример за let

```
(define (dist x1 y1 x2 y2)
  (let ((dx (- x2 x1))
        (dy (- y2 y1)))
    (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))))
```

```
(define (area x1 y1 x2 y2 x3 y3)
  (let ((a (dist x1 y1 x2 y2))
        (b (dist x2 y2 x3 y3))
        (c (dist x3 y3 x1 y1))
        (p (/ (+ a b c) 2)))
    (sqrt (* p (- p a) (- p b) (- p c)))))
```

## Пример за let

```
(define (dist x1 y1 x2 y2)
  (let ((dx (- x2 x1))
        (dy (- y2 y1)))
    (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))))
```

```
(define (area x1 y1 x2 y2 x3 y3)
  (let ((a (dist x1 y1 x2 y2))
        (b (dist x2 y2 x3 y3))
        (c (dist x3 y3 x1 y1))
        (p (/ (+ a b c) 2)))
    (sqrt (* p (- p a) (- p b) (- p c)))))
```

## Оценка на let

 $\{E\}$ 

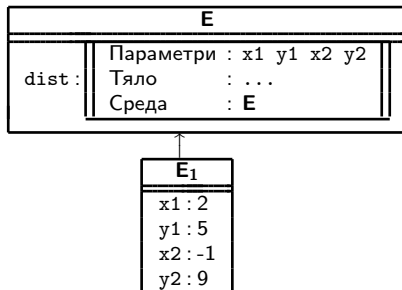
(dist 2 5 -1 9)

E	
dist:	Параметри : x1 y1 x2 y2 Тяло : ... Среда : E

## Оценка на let

```

{E}           (dist 2 5 -1 9)
               ↓
{E1}      (let ((dx (- x2 x1))
                  (dy (- y2 y1)))
              (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
  
```



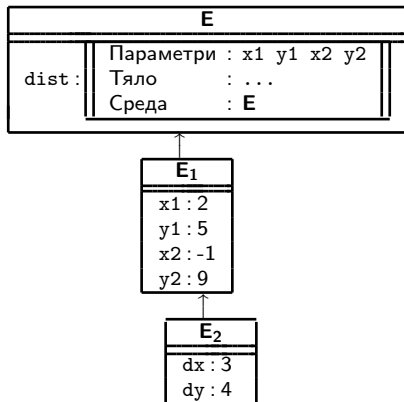


## Оценка на let

```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
           ↓
{E1}  (let ((dx (- x2 x1))
              (dy (- y2 y1)))
          (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
           ↓
{E2}  (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))

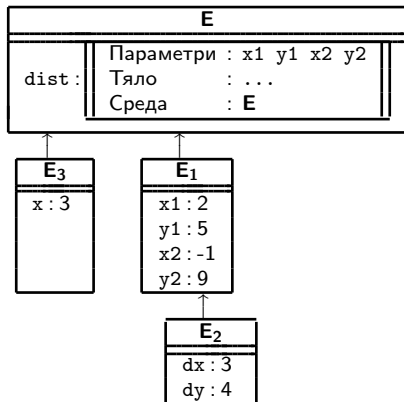
```



## Оценка на let

```

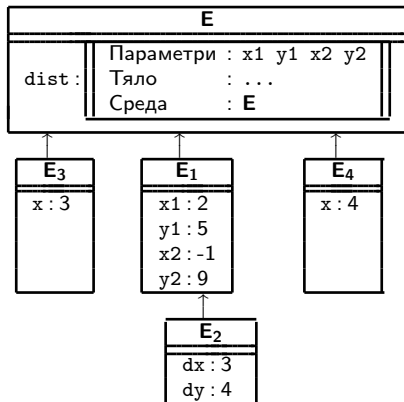
{E}      (dist 2 5 -1 9)
          ↓
{E1}     (let ((dx (- x2 x1))
              (dy (- y2 y1)))
          (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
          ↓
{E2}     (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
          ↓
{E3}     (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
  
```



## Оценка на let

```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
          ↓
{E1}  (let ((dx (- x2 x1))
              (dy (- y2 y1)))
          (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
          ↓
{E2}  (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
          ↓
{E3}  (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
          ↓
{E4}  (sqrt (+ 9 (* x x)))
  
```

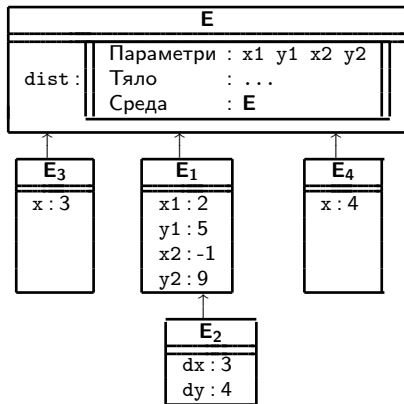


## Оценка на let

```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
          ↓
{E1}  (let ((dx (- x2 x1))
             (dy (- y2 y1)))
        (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
          ↓
{E2}  (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
          ↓
{E3}  (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
          ↓
{E4}  (sqrt (+ 9 (* x x)))
          ↓
{E2}  (sqrt (+ 9 16))

```

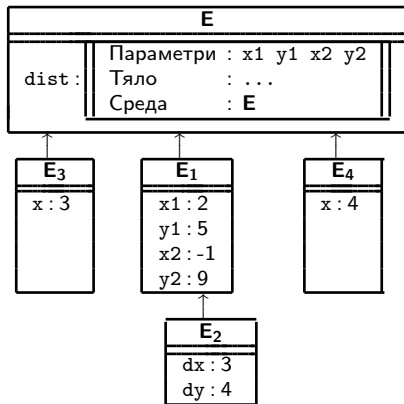


## Оценка на let

```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
           ↓
{E1}   (let ((dx (- x2 x1))
              (dy (- y2 y1)))
          (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
           ↓
{E2}   (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
           ↓
{E3}   (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
           ↓
{E4}   (sqrt (+ 9 (* x x)))
           ↓
{E2}   (sqrt (+ 9 16))
           ↓
{E2}   (sqrt 25)

```

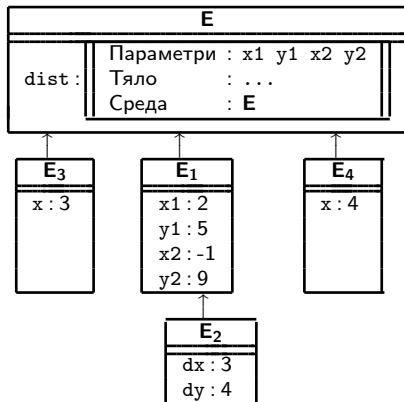


## Оценка на let

```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
          ↓
{E1}  (let ((dx (- x2 x1))
              (dy (- y2 y1)))
          (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
          ↓
{E2}  (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
          ↓
{E3}  (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
          ↓
{E4}  (sqrt (+ 9 (* x x)))
          ↓
{E2}  (sqrt (+ 9 16))
          ↓
{E2}  (sqrt 25)
          ↓
{E2}  5

```



## Специална форма let\*

- `(let* ({(<символ> <израз>)}) <тяло>)`

## Специална форма let\*

- `(let* ({(<символ> <израз>)}) <тяло>)`
- `(let* ((<символ1> <израз1>)  
(<символ2> <израз2>)  
...  
(<символn> <изразn>))  
<тяло>)`



## Специална форма let\*

- `(let* ({(<символ> <израз>)}) <тяло>)`
- `(let* ((<символ1> <израз1>)  
(<символ2> <израз2>)  
...  
(<символn> <изразn>))  
<тяло>)`
- При оценка на `let*` в среда **E**:

## Специална форма let\*

- `(let* ({(<символ> <израз>)}) <тяло>)`
- `(let* ((<символ1> <израз1>)  
(<символ2> <израз2>)  
...  
(<символn> <изразn>))  
<тяло>)`
- При оценка на `let*` в среда **E**:
  - Създава се нова среда **E<sub>1</sub>** разширение на текущата среда **E**

## Специална форма let\*

- $(\text{let}^* (\{(\langle \text{символ} \rangle \langle \text{израз} \rangle)\}) \langle \text{тяло} \rangle)$
- $(\text{let}^* ((\langle \text{символ}_1 \rangle \langle \text{израз}_1 \rangle)$   
     $(\langle \text{символ}_2 \rangle \langle \text{израз}_2 \rangle)$   
    ...  
     $(\langle \text{символ}_n \rangle \langle \text{израз}_n \rangle))$   
     $\langle \text{тяло} \rangle)$
- При оценка на  $\text{let}^*$  в среда  $\mathbf{E}$ :
  - Създава се нова среда  $\mathbf{E}_1$  разширение на текущата среда  $\mathbf{E}$
  - Оценката на  $\langle \text{израз}_1 \rangle$  в  $\mathbf{E}$  се свързва със  $\langle \text{символ}_1 \rangle$  в  $\mathbf{E}_1$

## Специална форма let\*

- $(\text{let}^* (\{(\langle \text{символ} \rangle \langle \text{израз} \rangle)\}) \langle \text{тяло} \rangle)$
- $(\text{let}^* ((\langle \text{символ}_1 \rangle \langle \text{израз}_1 \rangle)$   
     $(\langle \text{символ}_2 \rangle \langle \text{израз}_2 \rangle)$   
    ...  
     $(\langle \text{символ}_n \rangle \langle \text{израз}_n \rangle))$   
     $\langle \text{тяло} \rangle)$
- При оценка на let\* в среда **E**:
  - Създава се нова среда **E<sub>1</sub>** разширение на текущата среда **E**
  - Оценката на  $\langle \text{израз}_1 \rangle$  в **E** се свързва със  $\langle \text{символ}_1 \rangle$  в **E<sub>1</sub>**
  - Създава се нова среда **E<sub>2</sub>** разширение на текущата среда **E<sub>1</sub>**

## Специална форма let\*

- $(\text{let}^* (\{(\langle \text{символ} \rangle \langle \text{израз} \rangle)\}) \langle \text{тяло} \rangle)$
- $(\text{let}^* ((\langle \text{символ}_1 \rangle \langle \text{израз}_1 \rangle)$   
     $(\langle \text{символ}_2 \rangle \langle \text{израз}_2 \rangle)$   
    ...  
     $(\langle \text{символ}_n \rangle \langle \text{израз}_n \rangle))$   
     $\langle \text{тяло} \rangle)$
- При оценка на  $\text{let}^*$  в среда  $\mathbf{E}$ :
  - Създава се нова среда  $\mathbf{E}_1$  разширение на текущата среда  $\mathbf{E}$
  - Оценката на  $\langle \text{израз}_1 \rangle$  в  $\mathbf{E}$  се свързва със  $\langle \text{символ}_1 \rangle$  в  $\mathbf{E}_1$
  - Създава се нова среда  $\mathbf{E}_2$  разширение на текущата среда  $\mathbf{E}_1$
  - Оценката на  $\langle \text{израз}_2 \rangle$  в  $\mathbf{E}_1$  се свързва със  $\langle \text{символ}_2 \rangle$  в  $\mathbf{E}_2$

# Специална форма let\*

- $(\text{let}^* (\{(\langle \text{символ} \rangle \langle \text{израз} \rangle)\}) \langle \text{тяло} \rangle)$
- $(\text{let}^* ((\langle \text{символ}_1 \rangle \langle \text{израз}_1 \rangle)$   
     $(\langle \text{символ}_2 \rangle \langle \text{израз}_2 \rangle)$   
    ...  
     $(\langle \text{символ}_n \rangle \langle \text{израз}_n \rangle))$   
     $\langle \text{тяло} \rangle)$
- При оценка на  $\text{let}^*$  в среда  $E$ :
  - Създава се нова среда  $E_1$  разширение на текущата среда  $E$
  - Оценката на  $\langle \text{израз}_1 \rangle$  в  $E$  се свързва със  $\langle \text{символ}_1 \rangle$  в  $E_1$
  - Създава се нова среда  $E_2$  разширение на текущата среда  $E_1$
  - Оценката на  $\langle \text{израз}_2 \rangle$  в  $E_1$  се свързва със  $\langle \text{символ}_2 \rangle$  в  $E_2$
  - ...

# Специална форма let\*

- $(\text{let}^* (\{(\langle \text{символ} \rangle \langle \text{израз} \rangle)\}) \langle \text{тяло} \rangle)$
- $(\text{let}^* ((\langle \text{символ}_1 \rangle \langle \text{израз}_1 \rangle)$   
     $(\langle \text{символ}_2 \rangle \langle \text{израз}_2 \rangle)$   
    ...  
     $(\langle \text{символ}_n \rangle \langle \text{израз}_n \rangle))$   
     $\langle \text{тяло} \rangle)$
- При оценка на  $\text{let}^*$  в среда  $E$ :
  - Създава се нова среда  $E_1$  разширение на текущата среда  $E$
  - Оценката на  $\langle \text{израз}_1 \rangle$  в  $E$  се свързва със  $\langle \text{символ}_1 \rangle$  в  $E_1$
  - Създава се нова среда  $E_2$  разширение на текущата среда  $E_1$
  - Оценката на  $\langle \text{израз}_2 \rangle$  в  $E_1$  се свързва със  $\langle \text{символ}_2 \rangle$  в  $E_2$
  - ...
  - Създава се нова среда  $E_n$  разширение на текущата среда  $E_{n-1}$

## Специална форма let\*

- $(\text{let}^* (\{(\langle \text{символ} \rangle \langle \text{израз} \rangle)\}) \langle \text{тяло} \rangle)$
- $(\text{let}^* ((\langle \text{символ}_1 \rangle \langle \text{израз}_1 \rangle)$   
 $(\langle \text{символ}_2 \rangle \langle \text{израз}_2 \rangle)$   
 $\dots$   
 $(\langle \text{символ}_n \rangle \langle \text{израз}_n \rangle))$   
 $\langle \text{тяло} \rangle)$
- При оценка на  $\text{let}^*$  в среда  $\mathbf{E}$ :
  - Създава се нова среда  $\mathbf{E}_1$  разширение на текущата среда  $\mathbf{E}$
  - Оценката на  $\langle \text{израз}_1 \rangle$  в  $\mathbf{E}$  се свързва със  $\langle \text{символ}_1 \rangle$  в  $\mathbf{E}_1$
  - Създава се нова среда  $\mathbf{E}_2$  разширение на текущата среда  $\mathbf{E}_1$
  - Оценката на  $\langle \text{израз}_2 \rangle$  в  $\mathbf{E}_1$  се свързва със  $\langle \text{символ}_2 \rangle$  в  $\mathbf{E}_2$
  - ...
  - Създава се нова среда  $\mathbf{E}_n$  разширение на текущата среда  $\mathbf{E}_{n-1}$
  - Оценката на  $\langle \text{израз}_n \rangle$  в  $\mathbf{E}_{n-1}$  се свързва със  $\langle \text{символ}_n \rangle$  в  $\mathbf{E}_n$



## Специална форма let\*

- $(\text{let}^* (\{(\langle \text{символ} \rangle \langle \text{израз} \rangle)\}) \langle \text{тяло} \rangle)$
- $(\text{let}^* ((\langle \text{символ}_1 \rangle \langle \text{израз}_1 \rangle)$   
 $(\langle \text{символ}_2 \rangle \langle \text{израз}_2 \rangle)$   
 $\dots$   
 $(\langle \text{символ}_n \rangle \langle \text{израз}_n \rangle))$   
 $\langle \text{тяло} \rangle)$
- При оценка на  $\text{let}^*$  в среда  $\mathbf{E}$ :
  - Създава се нова среда  $\mathbf{E}_1$  разширение на текущата среда  $\mathbf{E}$
  - Оценката на  $\langle \text{израз}_1 \rangle$  в  $\mathbf{E}$  се свързва със  $\langle \text{символ}_1 \rangle$  в  $\mathbf{E}_1$
  - Създава се нова среда  $\mathbf{E}_2$  разширение на текущата среда  $\mathbf{E}_1$
  - Оценката на  $\langle \text{израз}_2 \rangle$  в  $\mathbf{E}_1$  се свързва със  $\langle \text{символ}_2 \rangle$  в  $\mathbf{E}_2$
  - ...
  - Създава се нова среда  $\mathbf{E}_n$  разширение на текущата среда  $\mathbf{E}_{n-1}$
  - Оценката на  $\langle \text{израз}_n \rangle$  в  $\mathbf{E}_{n-1}$  се свързва със  $\langle \text{символ}_n \rangle$  в  $\mathbf{E}_n$
  - Връща се оценката на  $\langle \text{тяло} \rangle$  в средата  $\mathbf{E}_n$

## Пример за let\*

```
(define (area x1 y1 x2 y2 x3 y3)
  (let* ((a (dist x1 y1 x2 y2))
         (b (dist x2 y2 x3 y3))
         (c (dist x3 y3 x1 y1))
         (p (/ (+ a b c) 2)))
    (sqrt (* p (- p a) (- p b) (- p c)))))
```

## Пример за let\*

```
(define (area x1 y1 x2 y2 x3 y3)
  (let* ((a (dist x1 y1 x2 y2))
         (b (dist x2 y2 x3 y3))
         (c (dist x3 y3 x1 y1))
         (p (/ (+ a b c) 2)))
    (sqrt (* p (- p a) (- p b) (- p c)))))
```

```
(define (area x1 y1 x2 y2 x3 y3)
  (let* ((p (/ (+ a b c) 2))
         (a (dist x1 y1 x2 y2))
         (b (dist x2 y2 x3 y3))
         (c (dist x3 y3 x1 y1)))
    (sqrt (* p (- p a) (- p b) (- p c)))))
```

## Оценка на let\*

 $\{E\}$ 

(dist 2 5 -1 9)

E	
dist:	Параметри : x1 y1 x2 y2 Тяло : ... Среда : E

## Оценка на let\*

```

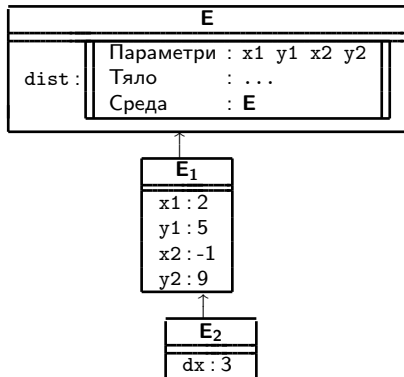
{E}      (dist 2 5 -1 9)
           ↓
{E1}  (let* ((dx (- x2 x1))
              (dy (- y2 y1)))
         (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
  
```



## Оценка на let\*

```

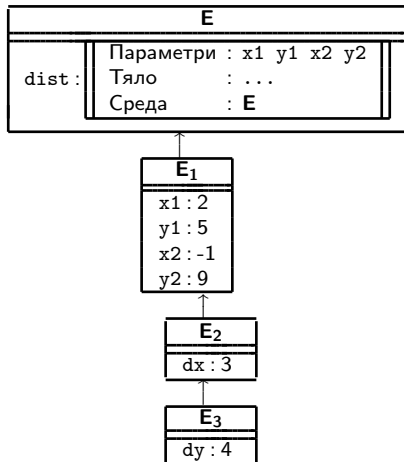
{E}      (dist 2 5 -1 9)
           ↓
{E1}  (let* ((dx (- x2 x1))
              (dy (- y2 y1)))
          (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
  
```



## Оценка на let\*

```

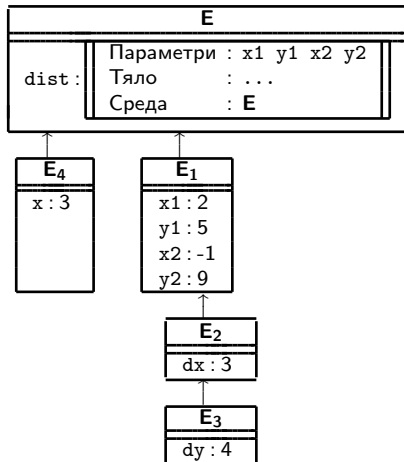
{E}      (dist 2 5 -1 9)
           ↓
{E1}  (let* ((dx (- x2 x1))
              (dy (- y2 y1)))
          (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
           ↓
{E3}  (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
  
```



## Оценка на let\*

```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
           ↓
{E1}  (let* ((dx (- x2 x1))
              (dy (- y2 y1)))
          (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
           ↓
{E3}  (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
           ↓
{E4}  (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
  
```

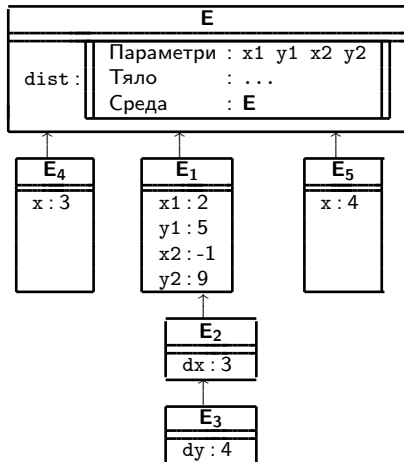




## Оценка на let\*

```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
           ↓
{E1}  (let* ((dx (- x2 x1))
              (dy (- y2 y1)))
          (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
           ↓
{E3}  (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
           ↓
{E4}  (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
           ↓
{E5}  (sqrt (+ 9 (* x x)))
  
```

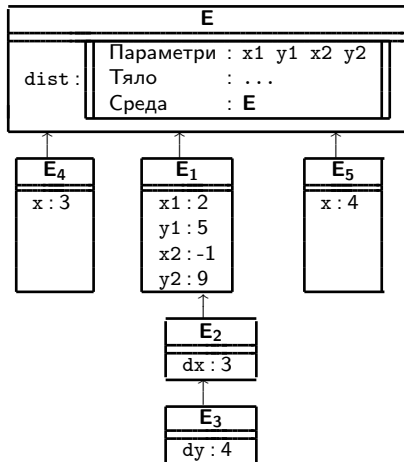


## Оценка на let\*

```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
           ↓
{E1}  (let* ((dx (- x2 x1))
              (dy (- y2 y1)))
          (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
           ↓
{E3}  (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
           ↓
{E4}  (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
           ↓
{E5}  (sqrt (+ 9 (* x x)))
           ↓
{E3}  (sqrt (+ 9 16))

```

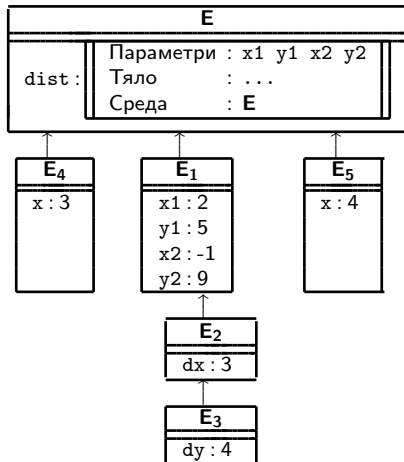


## Оценка на let\*

```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
           ↓
{E1}  (let* ((dx (- x2 x1))
              (dy (- y2 y1)))
          (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
           ↓
{E3}  (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
           ↓
{E4}  (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
           ↓
{E5}  (sqrt (+ 9 (* x x)))
           ↓
{E3}  (sqrt (+ 9 16))
           ↓
{E3}  (sqrt 25)

```

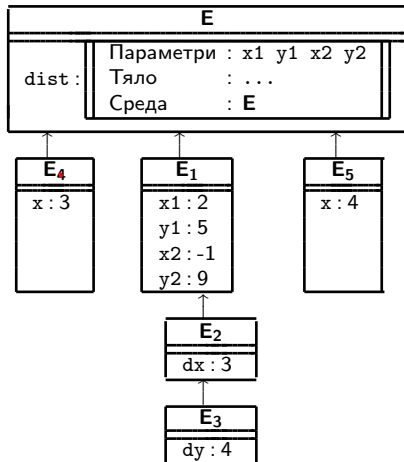


## Оценка на let\*

```

{E}      (dist 2 5 -1 9)
           ↓
{E1}     (let* ((dx (- x2 x1))
               (dy (- y2 y1)))
            (sqrt (+ (sq dx) (sq dy))))
           ↓
{E3}     (sqrt (+ (sq dx) (sq dy)))
           ↓
{E4}     (sqrt (+ (* x x) (sq dy)))
           ↓
{E5}     (sqrt (+ 9 (* x x)))
           ↓
{E3}     (sqrt (+ 9 16))
           ↓
{E3}     (sqrt 25)
           ↓
{E3}     5

```



# Степенуване

Функцията  $x^n$  може да се дефинира по следния начин:

$$x^n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 0, \\ \frac{1}{x^{-n}}, & \text{ако } n < 0, \\ x \cdot x^{n-1}, & \text{ако } n > 0. \end{cases}$$

# Степенуване

Функцията  $x^n$  може да се дефинира по следния начин:

$$x^n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 0, \\ \frac{1}{x^{-n}}, & \text{ако } n < 0, \\ x \cdot x^{n-1}, & \text{ако } n > 0. \end{cases}$$

```
(define (pow x n)
  (cond ((= n 0) 1)
        ((< n 0) (/ 1 (pow x (- n))))
        (else (* x (pow x (- n 1))))))
```

# Оценка на степенуване

$$\begin{array}{c} (\text{pow } 2 \ 6) \\ \downarrow \\ (* \ 2 \ (\text{pow } 2 \ 5)) \end{array}$$

# Оценка на степенуване

```
(pow 2 6)
  ↓
(* 2 (pow 2 5))
  ↓
(* 2 (* 2 (pow 2 4)))
```



# Оценка на степенуване

```
(pow 2 6)
  ↓
(* 2 (pow 2 5))
  ↓
(* 2 (* 2 (pow 2 4)))
  ↓
(* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 3))))
```

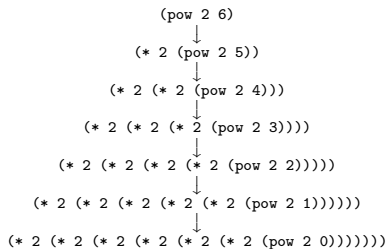
# Оценка на степенуване

(pow 2 6)  
↓  
(\* 2 (pow 2 5))  
↓  
(\* 2 (\* 2 (pow 2 4)))  
↓  
(\* 2 (\* 2 (\* 2 (pow 2 3))))  
↓  
(\* 2 (\* 2 (\* 2 (\* 2 (pow 2 2))))))

# Оценка на степенуване

(pow 2 6)  
↓  
(\* 2 (pow 2 5))  
↓  
(\* 2 (\* 2 (pow 2 4)))  
↓  
(\* 2 (\* 2 (\* 2 (pow 2 3))))  
↓  
(\* 2 (\* 2 (\* 2 (\* 2 (pow 2 2))))))  
↓  
(\* 2 (\* 2 (\* 2 (\* 2 (\* 2 (pow 2 1)))))))

# Оценка на степенуване

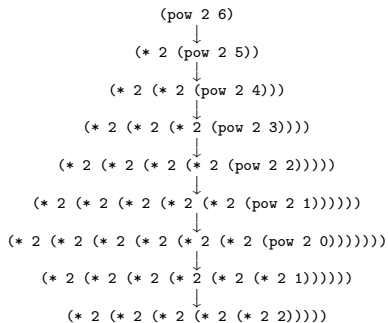


# Оценка на степенуване

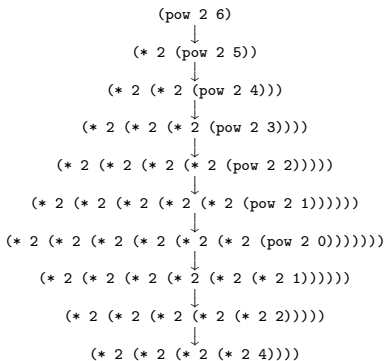
```

      (pow 2 6)
      ↓
    (* 2 (pow 2 5))
      ↓
  (* 2 (* 2 (pow 2 4)))
      ↓
(* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 3))))
      ↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 2))))))
      ↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 1)))))))
      ↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (pow 2 0))))))))
      ↓
(* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 (* 2 1)))))))
  
```

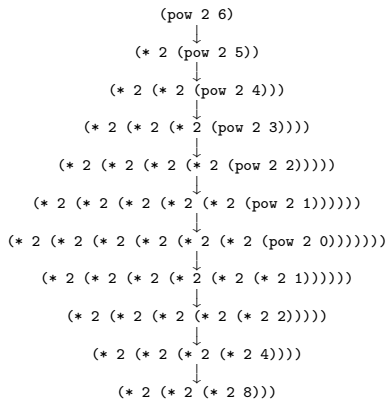
# Оценка на степенуване



# Оценка на степенуване

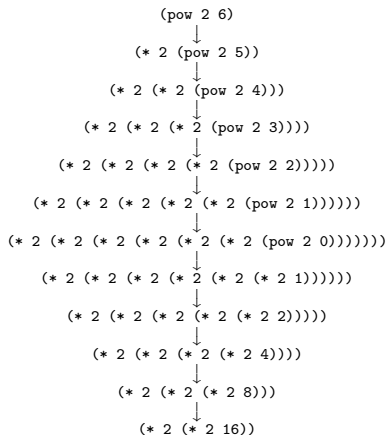


# Оценка на степенуване

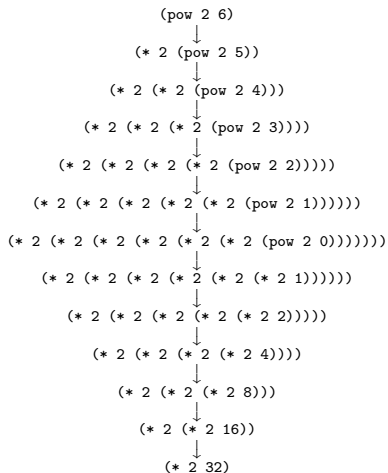




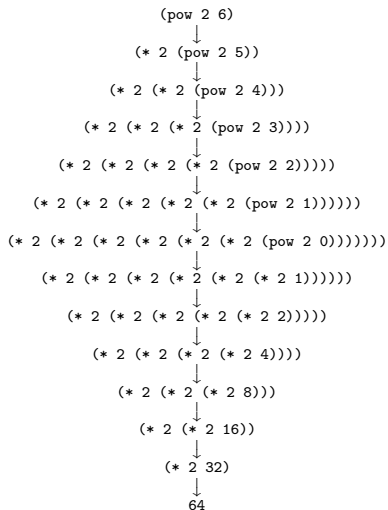
# Оценка на степенуване



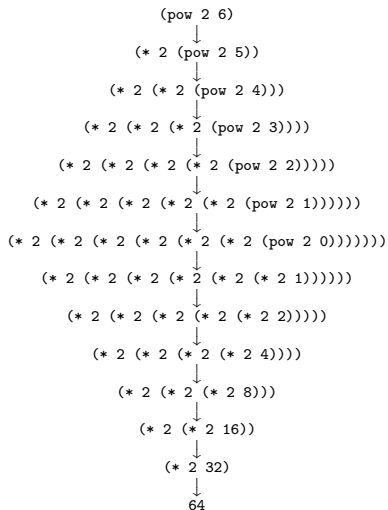
# Оценка на степенуване



# Оценка на степенуване



# Оценка на степенуване



## Линеен рекурсивен процес

# Бързо степенуване

Алтернативна дефиниция на  $x^n$ :

$$x^n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 0, \\ \frac{1}{x^{-n}}, & \text{ако } n < 0, \\ (x^{\frac{n}{2}})^2, & \text{ако } n > 0, n \text{ — четно,} \\ x \cdot x^{n-1}, & \text{ако } n > 0, n \text{ — нечетно.} \end{cases}$$

$$x^0 = 1$$

$$x^n = \frac{1}{x^{-n}} = (x^{-n})^{-1}$$

$$(x^{\frac{n}{2}})^2 = x^n$$

$$x \cdot x^{n-1} = x^n$$

# Бързо степенуване

Алтернативна дефиниция на  $x^n$ :

$$x^n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n = 0, \\ \frac{1}{x^{-n}}, & \text{ако } n < 0, \\ (x^{\frac{n}{2}})^2, & \text{ако } n > 0, n \text{ — четно,} \\ x \cdot x^{n-1}, & \text{ако } n > 0, n \text{ — нечетно.} \end{cases}$$

$$x^2 = (x^1)^2 = \dots$$

```
(define (qpow x n)
  (define (sqr x) (* x x))
  (cond ((= n 0) 1)
        ((< n 0) (/ 1 (qpow x (- n))))
        ((even? n) (sqr (qpow x (quotient n 2))))
        (else (* x (qpow x (- n 1))))))
```

*Handwritten note:* (qpow ... 2)

# Оценка на бързо степенуване

```
(qpow 2 6)
  ↓
(sqrr (qpow 2 3))
```

# Оценка на бързо степенуване

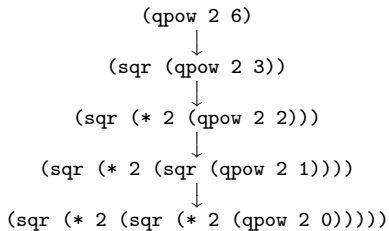
$(\text{qpow } 2 \ 6)$   
↓  
 $(\text{sqr } (\text{qpow } 2 \ 3))$   
↓  
 $(\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{qpow } 2 \ 2)))$



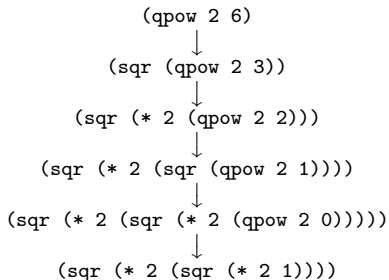
# Оценка на бързо степенуване

$(\text{qpow } 2 \ 6)$   
↓  
 $(\text{sqr } (\text{qpow } 2 \ 3))$   
↓  
 $(\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{qpow } 2 \ 2)))$   
↓  
 $(\text{sqr } (* \ 2 \ (\text{sqr } (\text{qpow } 2 \ 1))))$

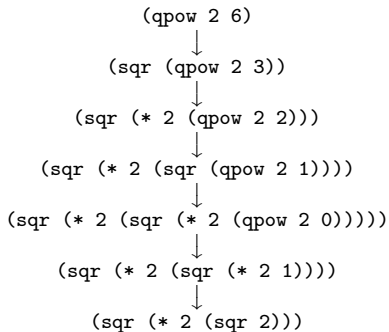
# Оценка на бързо степенуване



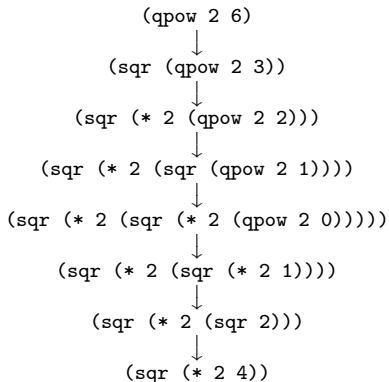
# Оценка на бързо степенуване



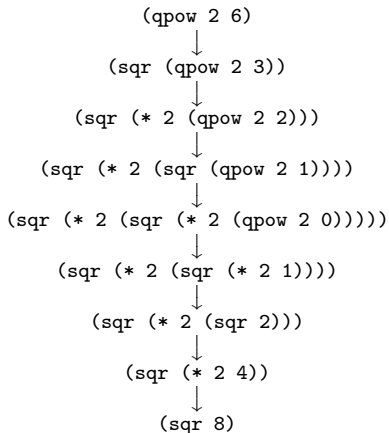
# Оценка на бързо степенуване



# Оценка на бързо степенуване



# Оценка на бързо степенуване



## Оценка на бързо степенуване

```

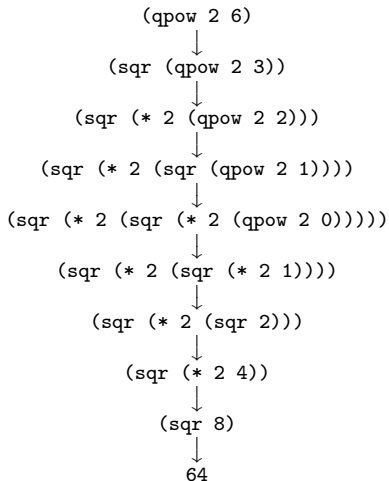
(qpow 2 6)
  ↓
(sqr (qpow 2 3))
  ↓
(sqr (* 2 (qpow 2 2)))
  ↓
(sqr (* 2 (sqr (qpow 2 1))))
  ↓
(sqr (* 2 (sqr (* 2 (qpow 2 0)))))
  ↓
(sqr (* 2 (sqr (* 2 1))))
  ↓
(sqr (* 2 (sqr 2)))
  ↓
(sqr (* 2 4))
  ↓
(sqr 8)
  ↓
64

```

$110_2 = 6$   
 $\downarrow$   
 $11_2$   
 $\downarrow$   
 $10_2$   
 $\downarrow$   
 $1_2$   
 $\downarrow$   
 $0_2$

$1000_2$   
 $\downarrow$   
 $100_2$   
 $\downarrow$   
 $10_2$   
 $\downarrow$   
 $1_2$

# Оценка на бързо степенуване



## Логаритмичен рекурсивен процес



# Числа на Фибоначи

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

# Числа на Фибоначи

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

$$f_n = \begin{cases} 0, & \text{за } n = 0, \\ 1, & \text{за } n = 1, \\ f_{n-1} + f_{n-2}, & \text{за } n \geq 2. \end{cases}$$

# Числа на Фибоначи

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

$$f_n = \begin{cases} 0, & \text{за } n = 0, \\ 1, & \text{за } n = 1, \\ f_{n-1} + f_{n-2}, & \text{за } n \geq 2. \end{cases}$$

```
(define (fib n)
  (cond ((= n 0) 0)
        ((= n 1) 1)
        (else (+ (fib (- n 1)) (fib (- n 2))))))
```

# Числа на Фибоначи

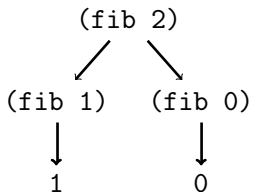
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

$$f_n = \begin{cases} 0, & \text{за } n = 0, \\ 1, & \text{за } n = 1, \\ f_{n-1} + f_{n-2}, & \text{за } n \geq 2. \end{cases}$$

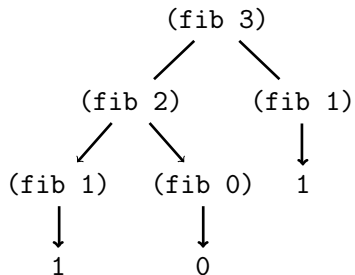
```
(define (fib n)
  (cond ((= n 0) 0)
        ((= n 1) 1)
        (else (+ (fib (- n 1)) (fib (- n 2))))))
```

$f_{40} = ?$

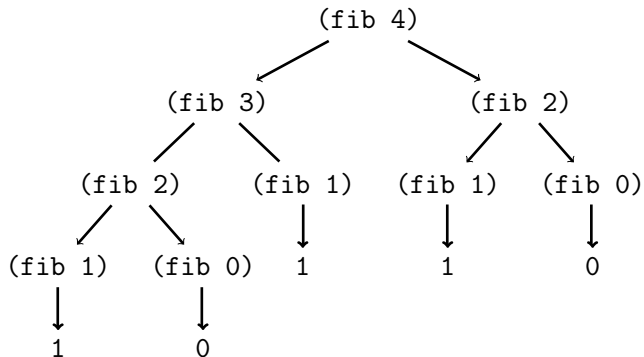
# Дървовидна рекурсия



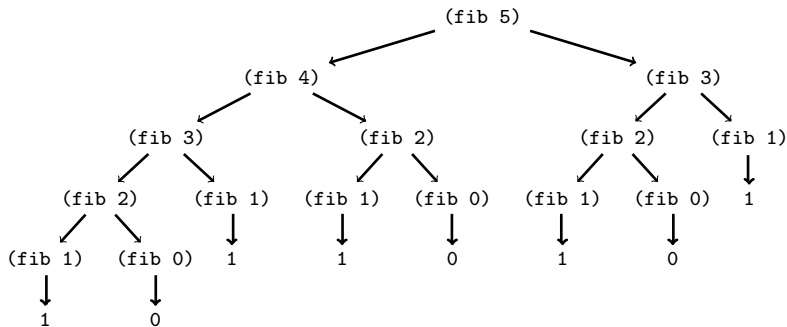
# Дървовидна рекурсия



# Дървовидна рекурсия



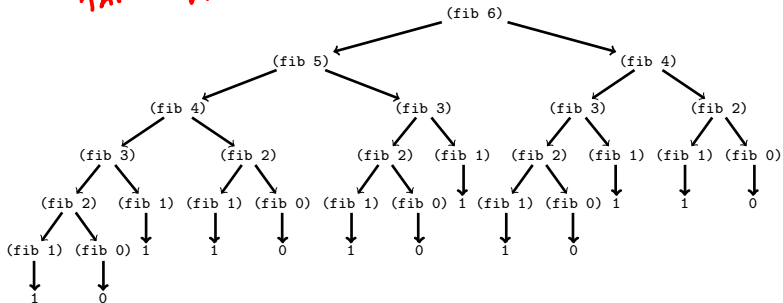
# Дървовидна рекурсия



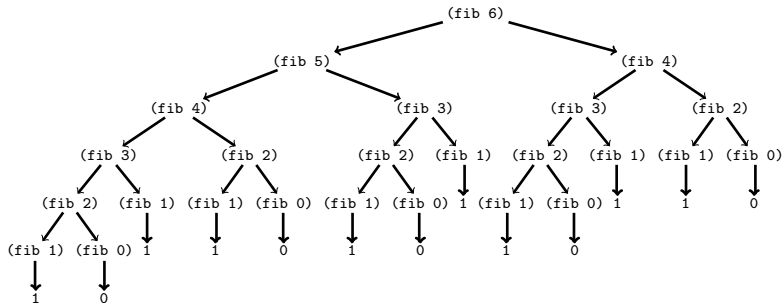


# Дървовидна рекурсия

$$f_n \approx n \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$$



# Дървовидна рекурсия



Дървовиден рекурсивен процес

## Как да оптимизираме?

### Решение №1: мемоизация

Да помним вече пресметнатите стойности, вместо да ги смятаме пак.

## Как да оптимизираме?

### Решение №1: мемоизация

Да помним вече пресметнатите стойности, вместо да ги смятаме пак.

За реализацията са нужни странични ефекти.

## Как да оптимизираме?

### Решение №1: мемоизация

Да помним вече пресметнатите стойности, вместо да ги смятаме пак.  
За реализацията са нужни странични ефекти.

### Решение №2: динамично програмиране

Строим последователно всички числа на Фибоначи в нарастващ ред.

## Как да оптимизираме?

### Решение №1: мемоизация

Да помним вече пресметнатите стойности, вместо да ги смятаме пак.  
За реализацията са нужни странични ефекти.

### Решение №2: динамично програмиране

Строим последователно всички числа на Фибоначи в нарастващ ред.  
Нужно е да помним само последните две числа!

## Как да оптимизираме?

### Решение №1: мемоизация

Да помним вече пресметнатите стойности, вместо да ги смятаме пак.  
За реализацията са нужни странични ефекти.

### Решение №2: динамично програмиране

Строим последователно всички числа на Фибоначи в нарастващ ред.  
Нужно е да помним само последните две числа!

```
(define (fib n)
  (define (iter i fib_i fib_i-1)
    (if (= i n) fib_i
        (iter (+ i 1) (+ fib_i fib_i-1) fib_i)))
  (if (= n 0) 0
      (iter 1 1 0)))
```

# Итеративно генериране на числата на Фибоначи

```
(fib 7)
```



# Итеративно генериране на числата на Фибоначи

```
(fib 7)
  ↓
(iter 1 1 0)
```

# Итеративно генериране на числата на Фибоначи

```
(fib 7)
  ↓
(iter 1 1 0)
  ↓
(iter 2 1 1)
```

# Итеративно генериране на числата на Фибоначи

```
(fib 7)
  ↓
(iter 1 1 0)
  ↓
(iter 2 1 1)
  ↓
(iter 3 2 1)
```

# Итеративно генериране на числата на Фибоначи

```
(fib 7)
  ↓
(iter 1 1 0)
  ↓
(iter 2 1 1)
  ↓
(iter 3 2 1)
  ↓
(iter 4 3 2)
```

# Итеративно генериране на числата на Фибоначи

```
(fib 7)
  ↓
(iter 1 1 0)
  ↓
(iter 2 1 1)
  ↓
(iter 3 2 1)
  ↓
(iter 4 3 2)
  ↓
(iter 5 5 3)
```

# Итеративно генериране на числата на Фибоначи

```
(fib 7)
  ↓
(iter 1 1 0)
  ↓
(iter 2 1 1)
  ↓
(iter 3 2 1)
  ↓
(iter 4 3 2)
  ↓
(iter 5 5 3)
  ↓
(iter 6 8 5)
```

# Итеративно генериране на числата на Фибоначи

```
(fib 7)
  ↓
(iter 1 1 0)
  ↓
(iter 2 1 1)
  ↓
(iter 3 2 1)
  ↓
(iter 4 3 2)
  ↓
(iter 5 5 3)
  ↓
(iter 6 8 5)
  ↓
(iter 7 13 8)
```

# Итеративно генериране на числата на Фибоначи

```
(fib 7)
  ↓
(iter 1 1 0)
  ↓
(iter 2 1 1)
  ↓
(iter 3 2 1)
  ↓
(iter 4 3 2)
  ↓
(iter 5 5 3)
  ↓
(iter 6 8 5)
  ↓
(iter 7 13 8)
  ↓
13
```