Зад. Да се докаже коректността на алгоритъма за сортиране чрез пряк избор:

```
   SelectionSort(A[1...n]: array of numbers)
1) for k ← 1 to n-1
2)    for j ← k+1 to n
3)       if A[j] < A[k]
4)          swap(A[j], A[k])  // размяна на стойностите
```

Решение: Доказателството за коректност се състои от две части.

Първо, доказваме, че алгоритъмът изобщо ще завърши своето изпълнение. Това следва от факта, че всички цикли в алгоритъма са цикли по брояч. За разлика от циклите по условие, циклите по брояч непременно завършват, т.е. зацикляне е невъзможно.

Второ, доказваме, че алгоритъмът дава желания резултат, т.е. че след като алгоритъмът бъде изпълнен, масивът A ще е сортиран. За тази цел използваме инварианти на циклите. Всеки от двата цикъла има собствена инварианта:

— Инварианта на външния цикъл: Всеки път, когато алгоритъмът изпълнява проверката $k \overset{?}{\leq} n-1$ на ред № 1, са в сила за $\forall p = k,\ k+1,\ k+2,\ \dots,\ n$ неравенствата $A[1] \leq A[2] \leq A[3] \leq \dots \leq A[k-1] \leq A[p]$, а редицата от текущите стойности на елементите $A[1],\ A[2],\ A[3],\ \dots,\ A[n]$ е пермутация на редицата от първоначалните (входните) стойности на елементите на масива.

— Инварианта на вътрешния цикъл: Всеки път, когато алгоритъмът изпълнява проверката $j \overset{?}{\leq} n$ на ред № 2, са в сила за $\forall p = k,\ k+1,\ k+2,\ \dots,\ n$ неравенствата $A[1] \leq A[2] \leq A[3] \leq \dots \leq A[k-1] \leq A[p]$,
за $\forall q = k+1,\ k+2,\ \dots,\ j-1$ е в сила неравенството $A[k] \leq A[q]$,
а редицата от текущите стойности на елементите $A[1],\ A[2],\ A[3],\ \dots,\ A[n]$ е пермутация на редицата от първоначалните (входните) стойности.

За втората част от инвариантите — в която се твърди, че редицата от текущите стойности на елементите $A[1],\ A[2],\ A[3],\ \dots,\ A[n]$ е пермутация на редицата от първоначалните (входните) стойности — доказателството се получава без индукция: единствената инструкция в алгоритъма, променяща стойностите на елементите, е операцията swap, а всяка последователност от транспозиции поражда пермутация.

Първата част от инвариантите (т.е. всичко останало) се доказва чрез разновидност на математическата индукция; тази разновидност доказва желаното твърдение за краен брой стойности на параметъра на индукцията. Като такъв параметър служи някакъв идентификатор на итерацията на цикъла, например броячът на цикъла; стойностите на този параметър са краен брой, защото всеки от двата цикъла се изпълнява краен брой пъти.

Доказателството на инвариантите следва структурата на алгоритъма, т.е. доказателството на инвариантата на вътрешния цикъл се намира вътре в доказателството на инвариантата на външния цикъл. Това е неизбежно, защото базата на индукцията за вътрешния цикъл ($j = k + 1$) е различна при всяко влизане в него (тъй като k има различна стойност при всяко влизане във вътрешния цикъл).

Доказателство на инвариантата на <u>външния</u> цикъл:

<u>База</u>: $k = 1$. Трябва да проверим, че за $\forall p = k,\ k+1,\ k+2,\ \dots,\ n$ са в сила неравенствата $A[1] \le A[2] \le A[3] \le \dots \le A[k-1] \le A[p]$. При произволно, но фиксирано p тази верига е конюнкция от $k–1 = 0$ неравенства и затова е тривиално вярна (празната конюнкция се счита за истинна по определение). Казано по друг начин, твърдението е вярно, защото липсват изисквания, които да могат евентуално да бъдат нарушени.

<u>Индуктивна стъпка</u>: Нека $k = \widetilde{k} \in \{ 1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n-1 \}$; това са всички възможни стойности на k при изпълнение на проверката за край на цикъла на ред № 1; липсва само стойността n.

<u>Индуктивно предположение</u>: Нека първата част от инвариантата е в сила при текущата стойност на k; с други думи, предполагаме, че при проверката на ред № 1 за $\forall p = \widetilde{k},\ \widetilde{k}+1,\ \widetilde{k}+2,\ \dots,\ n$ са удовлетворени неравенствата $A[1] \le A[2] \le A[3] \le \dots \le A[\widetilde{k}-1] \le A[p]$.

<u>Индуктивно заключение</u>: Въз основа на направеното предположение ще докажем, че при следващото изпълнение на проверката на ред № 1, т.е. когато k стане равно на $\widetilde{k}+1$, първата част от инвариантата пак ще бъде в сила, тоест за $\forall p = \widetilde{k}+1,\ \widetilde{k}+2,\ \dots,\ n$ ще бъдат удовлетворени неравенствата $A[1] \le A[2] \le A[3] \le \dots \le A[\widetilde{k}-1] \le A[\widetilde{k}] \le A[p]$.

Наистина, с текущата стойност на k, т.е. $k = \widetilde{k} \in \{ 1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n-1 \}$, проверката на ред № 1 връща true, защото $\widetilde{k} \le n-1$. Затова започва да се изпълнява тялото на външния цикъл, т.е. управлението се предава на ред № 2. Броячът j на вътрешния цикъл се инициализира със стойност $k+1 = \widetilde{k} + 1$. Сега ще докажем, че важи първата част на инвариантата на <u>вътрешния</u> цикъл.

<u>База</u>: $j = k+1 = \widetilde{k} + 1$. Трябва да докажем, че са изпълнени неравенствата $A[1] \le A[2] \le A[3] \le \dots \le A[\widetilde{k}-1] \le A[p]$ за $\forall p = \widetilde{k},\ \widetilde{k}+1,\ \widetilde{k}+2,\ \dots,\ n$. Това следва от индуктивното предположение за инвариантата на външния цикъл. Трябва да проверим още, че $A[k] \le A[q]$ за $\forall q = k+1,\ k+2,\ \dots,\ j-1$. Тъй като $k = \widetilde{k}$ и $j = \widetilde{k} + 1$, то $j - 1 = \widetilde{k}$, следователно множеството от допустими стойности на q е празно и твърдението е тривиално вярно.

Индуктивна стъпка: Нека $j = \widetilde{j} \in \{ \widetilde{k}+1, \widetilde{k}+2, \widetilde{k}+3, \ldots, n \}$; това са всички възможни стойности на j при изпълнение на проверката за край на цикъла на ред № 2; липсва само стойността $n+1$.

Индуктивно предположение: Нека първата част от инвариантата е в сила при текущата стойност на j; с други думи, предполагаме, че при проверката на ред № 2 за $\forall p = \widetilde{k}, \widetilde{k}+1, \widetilde{k}+2, \ldots, n$ са удовлетворени неравенствата $A[1] \leq A[2] \leq A[3] \leq \ldots \leq A[\widetilde{k}-1] \leq A[p]$ и че освен това $A[\widetilde{k}] \leq A[q]$ за $\forall q = \widetilde{k}+1, \widetilde{k}+2, \ldots, \widetilde{j}-1$.

Индуктивно заключение: Въз основа на направеното предположение ще докажем, че при следващото изпълнение на проверката на ред № 2, т.е. когато j стане равно на $\widetilde{j}+1$, първата част от инвариантата пак ще бъде в сила, тоест за $\forall p = \widetilde{k}, \widetilde{k}+1, \widetilde{k}+2, \ldots, n$ ще бъдат удовлетворени неравенствата $A[1] \leq A[2] \leq A[3] \leq \ldots \leq A[\widetilde{k}-1] \leq A[p]$, а неравенството $A[\widetilde{k}] \leq A[q]$ ще важи за $\forall q = \widetilde{k}+1, \widetilde{k}+2, \ldots, \widetilde{j}$.

Наистина, с текущата стойност на j, т.е. $j = \widetilde{j} \in \{ \widetilde{k}+1, \widetilde{k}+2, \ldots, n \}$, проверката на ред № 2 връща true, защото $\widetilde{j} \leq n$. Затова започва да се изпълнява тялото на вътрешния цикъл, т.е. алгоритъмът отива на ред № 3.

Първи случай: $A[j] \geq A[k]$, т.е. $A[\widetilde{j}] \geq A[\widetilde{k}]$. Следователно ред № 4 няма да се изпълни, т.е. няма да има разместване на елементи на масива. Алгоритъмът отива на ред № 2, стойността на j се увеличава с 1, т.е. променливата j приема стойност $\widetilde{j}+1$ и се преминава към проверка за край на вътрешния цикъл. Трябва да докажем, че в този момент са изпълнени неравенствата от индуктивното заключение на инвариантата на вътрешния цикъл.

Като сравним индуктивното предположение и индуктивното заключение, виждаме, че повечето неравенства са едни и същи. Те са били в сила (съгласно с индуктивното предположение) при предишната проверка за край на вътрешния цикъл; а остават в сила при новата (текущата) проверка, защото през последната итерация алгоритъмът не е променял елементите на масива (ред № 4 не беше изпълнен).

Единственото неравенство в индуктивното заключение, което липсва в индуктивното предположение, е неравенството $A[\widetilde{k}] \leq A[q]$ при $q = \widetilde{j}$, т.е. $A[\widetilde{k}] \leq A[\widetilde{j}]$. То е изпълнено, защото се намираме в първия случай.

Втори случай: $A[j] < A[k]$, т.е. $A[\widetilde{j}] < A[\widetilde{k}]$. Следователно ред № 4 ще се изпълни, т.е. ще бъдат разместени $\widetilde{j}$-ият и $\widetilde{k}$-ият елемент на масива.

След това алгоритъмът отива на ред № 2, стойността на j се увеличава с 1, т.е. променливата j приема стойност $\tilde{j}+1$ и се преминава към проверка за край на вътрешния цикъл. Трябва да докажем, че в този момент са изпълнени неравенствата от индуктивното заключение на инвариантата на вътрешния цикъл.

Както по-горе (т.е. както в първия случай) се забелязва, че истинността на повечето неравенства преминава "по наследство" от индуктивното предположение към индуктивното заключение. Тук обаче трябва да отчетем и разместването на $\tilde{j}$ -ия и $\tilde{k}$ -ия елемент.

Неравенствата $A[1] \le A[2] \le A[3] \le \ldots \le A[\tilde{k}-1] \le A[p]$ остават в сила за $\forall p = \tilde{k},\ \tilde{k}+1,\ \tilde{k}+2,\ \ldots, n$, защото извършеното разместване не променя стойностите на елементите $A[1],\ A[2],\ A[3],\ \ldots,\ A[\tilde{k}-1]$. Променят се само стойностите на $\tilde{j}$ -ия и $\tilde{k}$ -ия елемент, но $\tilde{j}$ и $\tilde{k}$ са просто две от стойностите на $p = \tilde{k},\ \tilde{k}+1,\ \tilde{k}+2,\ \ldots, n$, защото $\tilde{j} \in \left\{\ \tilde{k}+1,\ \tilde{k}+2,\ \tilde{k}+3,\ \ldots\ ,\ n\ \right\}$. Размяна на две стойности в множеството $\left\{\ A[p]\ \middle|\ p = \tilde{k},\ \tilde{k}+1,\ \tilde{k}+2,\ \ldots, n \right\}$ не променя самото множество (елементите на множествата нямат наредба), затова неравенствата $A[1] \le A[2] \le A[3] \le \ldots \le A[\tilde{k}-1] \le A[p]$ в крайна сметка остават в сила за $\forall p = \tilde{k},\ \tilde{k}+1,\ \tilde{k}+2,\ \ldots, n$ въпреки разместването.

Остава да докажем, че $A[\tilde{k}] \le A[q]$ за $\forall q = \tilde{k}+1,\ \tilde{k}+2,\ \ldots, \tilde{j}$. Удобно е да отделим стойността $q = \tilde{j}$, т.е. удобно е да докажем, че: $A[\tilde{k}] \le A[\tilde{j}]$ и че $A[\tilde{k}] \le A[q]$ за $\forall q = \tilde{k}+1,\ \tilde{k}+2,\ \ldots, \tilde{j}-1$. Тези две твърдения трябва да бъдат доказани за стойностите, които елементите на масива имат след разместването на на $\tilde{j}$ -ия и $\tilde{k}$ -ия елемент. За стойностите, които елементите на масива са имали преди разместването, същите неравенства изглеждат така: $A[\tilde{j}] \le A[\tilde{k}]$ и $A[\tilde{j}] \le A[q]$ за $\forall q = \tilde{k}+1,\ \tilde{k}+2,\ \ldots, \tilde{j}-1$. Ще ги докажем в този им вид (за стойностите на елементите преди разместването).

Неравенството $A[\tilde{j}] \le A[\tilde{k}]$ е вярно (дори строго), защото сме във втория случай. От това неравенство и от индуктивното предположение $A[\tilde{k}] \le A[q]$ следва, че $A[\tilde{j}] \le A[q]$ за $\forall q = \tilde{k}+1,\ \tilde{k}+2,\ \ldots, \tilde{j}-1$.

С това инвариантата на вътрешния цикъл е доказана.

Завършек на вътрешния цикъл: При $j = n+1$ от доказаната инварианта следва, че $A[1] \le A[2] \le \ldots \le A[\tilde{k}-1] \le A[p]$ за $\forall p = \tilde{k},\ \tilde{k}+1,\ \ldots, n$ и че $A[\tilde{k}] \le A[q]$ за $\forall q = \tilde{k}+1,\ \tilde{k}+2,\ \ldots, j-1$, т.е. за $\forall q = \tilde{k}+1,\ \tilde{k}+2,\ \ldots, n$.

В частност, ако заместим $p = \widetilde{k}$, ще получим веригата от неравенства $A[1] \le A[2] \le \ldots \le A[\widetilde{k}-1] \le A[\widetilde{k}]$. Като присъединим към нея второто неравенство, получаваме серията $A[1] \le A[2] \le \ldots \le A[\widetilde{k}-1] \le A[\widetilde{k}] \le A[q]$ за $\forall q = \widetilde{k}+1,\ \widetilde{k}+2,\ \ldots,\ n$.

?

При $j = n+1$ проверката $j \le n$ връща false и тялото на вътрешния цикъл не се изпълнява повече. Алгоритъмът отива на ред № 1, при което стойността на k се увеличава с 1, т.е. k приема стойност $\widetilde{k}+1$.

Продължаваме с индуктивната стъпка на инвариантата на външния цикъл. Трябва да докажем нейното индуктивно заключение, т.е. че неравенствата $A[1] \le A[2] \le A[3] \le \ldots \le A[\widetilde{k}-1] \le A[\widetilde{k}] \le A[p]$ са удовлетворени за $\forall p = \widetilde{k}+1,\ \widetilde{k}+2,\ \ldots,\ n$. Но ние вече установихме това (вж. малко по-горе завършека на вътрешния цикъл) с единствената разлика, че там пишеше q вместо p, което не е съществено, тъй като всяка от променливите p и q е свързана чрез квантор за всеобщност и множеството от допустими стойности е едно и също, затова истинността на твърдението не зависи от променливата.

С това инвариантата на външния цикъл е доказана.

Завършек на външния цикъл: При $k = n$ от доказаната инварианта следва, че $A[1] \le A[2] \le A[3] \le \ldots \le A[k-1] \le A[p]$ за $\forall p = k,\ k+1,\ k+2,\ \ldots,\ n$, т.е. $A[1] \le A[2] \le A[3] \le \ldots \le A[n-1] \le A[p]$ за $\forall p = n$. С други думи, единствената допустима стойност на p е стойността $p = n$. Заместваме $p = n$ и получаваме неравенствата $A[1] \le A[2] \le A[3] \le \ldots \le A[n-1] \le A[n]$.

?

При $k = n$ проверката $k \le n-1$ връща false и тялото на външния цикъл не се изпълнява повече. Алгоритъмът приключва работа, при което остават в сила неравенствата $A[1] \le A[2] \le A[3] \le \ldots \le A[n-1] \le A[n]$, важащи за последните стойности на елементите на масива. С други думи, елементите на изходния масив A са подредени в нарастващ ред, т.е. масивът A е сортиран. При това, получената редица от стойности на елементите е пермутация на редицата от първоначалните стойности, тоест алгоритъмът е подредил в нарастващ ред именно входните данни. А това означава, че SelectionSort е коректен алгоритъм за сортиране.