Първо домашно по Дискретни структури, условия и решения

Име: ________________________________, ФН:______, Спец./курс:________

Задача	1	2	3	4	5	Общо
получени точки						
максимум точки	1	1	1	1	1	5

Задача 1. Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е определена така:

$$f(x) = \frac{2x - 7}{5}$$

(a) Докажете, че f е биекция

(b) Изразете в явен вид (чрез формула) обратната ѝ функция f^{-1}.

Задача 2. 49 точки лежат в квадрат със страна 14. Докажете, че поне две от тях са на разстояние по-малко от 3.

Упътване: Ползвайте принципа на Дирихле.

Задача 3. Нека $\mathbb{N}$ е множеството на естествените числа, а $2^{\mathbb{N}}$ е множеството от подмножествата му. Постройте биекция между множествата $2^{\mathbb{N}}$ и $2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$.

Задача 4. Добра наредба в множеството A е линейна наредба, такава, че всяко непразно подмножество на A има най-малък елемент.

Обичайната числова релация $<$ не е добра наредба върху множеството $\mathbb{Z}$ (обяснете защо).

Постройте добра наредба $\prec$ върху $\mathbb{Z}$.

Посочете примерна двойка числа (m, n), за които $m \prec n$, но $m > n$.

Задача 5. Нека R е наредба в крайното множество A.

Докажете, че R добра наредба точно когато е линейна.

Решения

Задача 1.

(a) Нека $x_1 \neq x_2$. Тогава $f(x_1) - f(x_2) = \frac{2(x_1 - x_2)}{5} \neq 0$.

(b) Означаваме стойността $f(x)$ с y. Тогава $y = \frac{2x-7}{5}$.

Изразяваме x чрез y и получаваме $x = \frac{5y+7}{2}$.

Това равенство ни дава обратната функция $f^{-1}(y) = \frac{5y+7}{2}$.

Задача 2. Първо решение (Добромир Кралчев)

Режем квадрата на 6 еднакво широки вертикални ленти, а после всяка лента режем на 8 еднакво високи правоъгълника.

Така получаваме разрязване на квадрата на 48 еднакви правоъгълника. Всеки правоъгълник е с ширина 7/3 и височина 7/4. Най-отдалечените точки в такъв правоъгълник са краищата на всеки от диагоналите му. Пресмятаме дължината на диагонала, тя е 35/12, по-малка е от 3.

Всяка от дадените в условието 49 точки ще попадне в някой от 48-те правоъгълници. Ако точка лежи на граница или връх на правоъгълник, тогава тя попада едновременно в няколко правоъгълника, но в този случай и съпоставяме кой да е от тях.

Така получената функция изобразява 49-те точки в 48 правоъгълника и съгласно принципа на Дирихле поне 2 точки ще лежат в общ правоъгълник. Разстоянието между тях е по-малко от 3.

Задача 2. Второ решение (Ангел Николов)

Нека сме разположили 49 точки в квадрата и всеки две от тях са на разстояние поне 3. Описваме окръжност с радиус $r = 1\frac{1}{2}$ около всяка точка.

Получените 49 окръжности не се пресичат и сумата от лицата им е $S_1 = 49\pi r^2 > 346.36$.

Разширяваме дадения квадрат, като залепяме ленти с ширина $r = 1\frac{1}{2}$ около всяка от страните му. Така получаваме по-голям квадрат със страна 17 и лице $S_2 = 17^2 = 289$.

Всичките 49 окръжности са изцяло в големия квадрат, тъй като центровете им са в оригиналния квадрат. Тъй като не се пресичат, сумата от лицата им е по-малка от лицето на големия квадрат, следователно $S_1 < S_2 \rightarrow 346.36 < 289$, което е противоречие.

Задача 3.

Нека $A \subset \mathbb{N}$ е произволно подмножество на естествените числа. Съпоставяме му характеристичната редица $\alpha = \alpha_0\alpha_1\alpha_2\ldots$, такава че α_i е 1, когато $i \in A$ и 0, когато $i \notin A$. От лекции знаем, че това съответствие е биективно.

Дефинираме функция $f(\alpha) = (\alpha_e, \alpha_o)$ така:

$\alpha_e = \alpha_0\alpha_2\alpha_4\ldots$ се състои от четните битове на α.

$\alpha_o = \alpha_1\alpha_3\alpha_5\ldots$ се състои от нечетните битове на α.

Лесно се проверява, че f е биекция от множеството на характеристичните редици към множеството от наредените двойки характеристични редици.

Ако означим с A_e и A_o множествата от естествени числа, съответни на характеристичните редици α_e и α_o, получаваме композиция от биекции:

$A \rightarrow \alpha \rightarrow f(\alpha) = (\alpha_e, \alpha_o) \rightarrow (A_e, A_o)$

Тази композиция е биекция между множествата $2^{\mathbb{N}}$ и $2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$.

Забележка: На лекции обсъдихме факта, че мощността на $2^{\mathbb{N}}$ съвпада с мощността на множеството реални числа в интервала $(0, 1)$, също и с мощността на континуума (множеството на всички реални числа, множеството от точките върху права линия). От представената задача следва, че същата мощност ще имат множествата от точки, разположени във вътрешността на единичен квадрат или пък всички точки в равнината или пространството, т.е. има биекция между отворения интервал $(0, 1)$ и $\mathbb{R}^3$.

Задача 4.

Нека първо построим биекция $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$.

Една примерна биекция е:
$f(n) = 2n$ ако $n \geq 0$
$f(n) = 2|n| - 1$ ако $n < 0$

Дефинираме релация $\prec$ върху $\mathbb{Z}$ така: $n \prec m$ когато $f(n) < f(m)$.

Като ползваме биективността на f и дефиницията на $\prec$ можем да проверим, че тя наследява всички свойства на релацията $<$ върху $\mathbb{N}$: $\prec$ е антирефлесивна, силно антисиметрична, транзитивна и добра наредба върху $\mathbb{Z}$.

$\prec$ не е нормалната числова наредба върху $\mathbb{Z}$. Нека $n = 1, m = -2$. Очевидно $n \prec m$, защото $f(n) = 2, f(m) = 3$, но $n > m$.

Задача 5.

Тъй като всяка добра наредба е линейна, остава да докажем, ако R е линейна наредба в крайното множество A, тя ще бъде и добра наредба.

Нека $B \neq \emptyset, B \subset A$. На лекции сме доказали, че ако R е наредба в крайното множество A, то B съдържа минимален елемент x, такъв че $\forall y \in B, x \neq y \to \neg yRx$.

Но R е линейна, за всяка двойка $(x, y), \neg yRx \to xRy$, следователно $\forall y \in B, x \neq y \to xRy$ и x е най-малък елемент в B.

Доказахме, че произволно избраното непразно подмножество B има най-малък елемент, следователно R е добра наредба.