Домашно № 3 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Компютърни науки", I курс, II поток, зимен семестър на 2016/2017 уч. г. в СУ, ФМИ

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	Общо
получени точки					
максимум точки	*10*	*10*	*10*	*10*	*40*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

За всяка от следните задачи да се състави и реши подходящо рекурентно уравнение. Опишете подробно разсъжденията по съставянето на уравнението.

Задача 1. Колко n-цифрени цели положителни числа съдържат в десетичния си запис четен брой тройки (включително нито една)?

Упътване: Разгледайте два случая за цифрата на единиците: да е тройка или да не е тройка.

Задача 2. Пресметнете детерминантата

$$D_n = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 6 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

Упътване: Развийте детерминантата по ред или стълб. Удобно е да се работи с ред или стълб, който съдържа най-много нули.

Задача 3. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, които удовлетворяват функционалното уравнение

$$f(f(x)) = 21x - 4f(x).$$

Упътване: Разгледайте такава редица: $a_0 \in \mathbb{N}$ е произволно, $a_1 = f\left(a_0\right)$, $a_2 = f\left(f\left(a_0\right)\right)$, $\ldots$, $a_n = \underbrace{f\left(f\left(\ldots\left(f\right.\right.\right.}_{n \text{ пъти}}\left.\left.\left.\left(a_0\right)\right)\ldots\right)\right)$.

Задача 4. Намерете цифрата на единиците и цифрата на десетиците на числото 3^{2016}.

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Нека a_n е броят на n-цифрените цели положителни числа, чийто десетичен запис съдържа четен брой тройки. Според цифрата на единиците тези числа са два вида.

Първи случай: цифрата на единиците не е тройка. За тази цифра има девет възможности — 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Следователно числото, образувано от останалите $n-1$ цифри, съдържа четен брой тройки. За него има a_{n-1} възможности. Всяка от тези a_{n-1} възможности се комплектова с всяка от деветте възможности за последната цифра. От правилото за умножение следва, че броят на n-цифрените числа от първия вид е равен на $9\,a_{n-1}$.

Втори случай: цифрата на единиците е тройка. Следователно числото, образувано от останалите $n-1$ цифри, съдържа нечетен брой тройки. Броят на тези числа е равен на броя на всички числа с $n-1$ цифри минус броя на тези, които съдържат четен брой тройки, т.е. $\left(10^{n-1}-10^{n-2}\right)-a_{n-1}$. Умаляемото $10^{n-1}-10^{n-2}$ е броят на всички $(n-1)$-цифрени числа: от $1\underbrace{00\ldots000}_{n-2 \text{ пъти}}$ до $\underbrace{999\ldots999}_{n-1 \text{ пъти}}$.

Няма други възможности за цифрата на единиците. Прилагаме правилото за събиране:

$$a_n \;=\; 9\,a_{n-1} \;+\; \left(10^{n-1}-10^{n-2}\right) \;-\; a_{n-1}\,.$$

След преработка формулата приема вида

$$a_n \;=\; 8\,a_{n-1} \;+\; 0,09\;.\;10^n.$$

Това е линейно-рекурентно уравнение. Съответното му характеристично уравнение е

$$\lambda^n \;=\; 8\,\lambda^{n-1},$$

чийто единствен ненулев корен е $\lambda=8$. От свободния член идва още един корен: 10. Тогава

$$a_n \;=\; C_1\;.\;10^n \;+\; C_2\;.\;8^n.$$

Едноцифрените цели положителни числа с четен брой тройки са тези, които не съдържат тройка в десетичния си запис. Те са осем на брой (1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9), следователно $a_1=8$. От рекурентното уравнение намираме

$$a_2 \;=\; 8\,a_1 \;+\; 0,09\;.\;10^2 \;=\; 8\;.\;8 \;+\; 9 \;=\; 73.$$

Във формулата с неопределените коефициенти заместваме $n=1$ и $n=2$:

$$\left|\begin{array}{rcrcr} 10\;C_1 & + & 8\;C_2 & = & 8 \\ 100\;C_1 & + & 64\;C_2 & = & 73. \end{array}\right.$$

Тази система има единствено решение:

$$C_1 \;=\; \frac{9}{20}\;,\;\; C_2 \;=\; \frac{7}{16}\,.$$

Следователно $a_n \;=\; \dfrac{9\;.\;10^{n-1}\;+\;7\;.\;8^{n-1}}{2}$ е броят на n-цифрените числа с четен брой тройки.

Задача 2. Развиваме детерминантата по първия стълб:

$$D_n = 7 \, . \begin{vmatrix} 7 & 6 & \ldots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 7 & 6 \\ 0 & 0 & \ldots & 2 & 7 \end{vmatrix} - 2 \, . \begin{vmatrix} 6 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 7 & 6 \\ 0 & 0 & \ldots & 2 & 7 \end{vmatrix} .$$

Детерминантата в първото събираемо е със същия строеж като D_n, но има един ред и един стълб по-малко, т.е. тя е D_{n-1}. Колкото до детерминантата във второто събираемо, тя може отново да бъде развита по ред или стълб. Удобно е да я развием по първия ред, тъй като той съдържа най-много нули:

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 7 & 6 \\ 0 & 0 & \ldots & 2 & 7 \end{vmatrix} = 6 \, . \begin{vmatrix} 7 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 7 & 6 \\ 0 & \ldots & 2 & 7 \end{vmatrix} = 6 \, . \, D_{n-2} .$$

Получихме линейно-рекурентно уравнение без свободен член:

$$D_n = 7.D_{n-1} - 12.D_{n-2} \, , \quad n = 3, \ 4, \ 5, \ \ldots$$

Съответното му характеристично уравнение е $\lambda^n = 7\lambda^{n-1} - 12\lambda^{n-2}$.
Делим на $\lambda^{n-2} \neq 0$ и получаваме квадратно уравнение: $\lambda^2 = 7\lambda - 12$, т.е. $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$, чиито корени са $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = 4$. Следователно

$$D_n = C_1 \, . \, 3^n + C_2 \, . \, 4^n .$$

За намирането на C_1 и C_2 са нужни две уравнения, т.е. трябва да пресметнем D_1 и D_2. Очевидно $D_1 = 7$, $D_2 = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 37$.

Заместваме във формулата за общия член:
Заместваме $n = 1$: $D_1 = C_1 \, . \, 3^1 + C_2 \, . \, 4^1 = 3C_1 + 4C_2 = 7$.

Заместваме $n = 2$: $D_2 = C_1 \, . \, 3^2 + C_2 \, . \, 4^2 = 9C_1 + 16C_2 = 37$.

Решаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} 3C_1 + 4C_2 = 7 \\ 9C_1 + 16C_2 = 37 \end{array} \right.$$

и намираме $C_1 = -3$, $C_2 = 4$. Остава само да заместим намерените стойности във формулата за общия член. **Отг.** $D_n = 4^{n+1} - 3^{n+1}$.

Задача 3. Избираме произволно число $a_0 \in \mathbb{N}$ и разглеждаме следната безкрайна редица:

$$a_0 \ , \ a_1 = f\left(a_0\right) \ , \ a_2 = f\left(f\left(a_0\right)\right) \ , \ \ldots \ , \ a_n = \underbrace{f\left(f\left(\ldots\left(f\right.\right.\right.}_{n \text{ пъти}}\left.\left.\left.\left(a_0\right)\right)\ldots\right)\right) \ , \ \ldots$$

Във функционалното уравнение

$$f(f(x)) = 21x - 4f(x)$$

заместваме $x = a_n$:

$$f\left(f\left(a_n\right)\right) = 21\,a_n - 4f\left(a_n\right).$$

Преработваме новото уравнение:

$$f\left(a_{n+1}\right) = 21\,a_n - 4\,a_{n+1}\,,$$

$$a_{n+2} = 21\,a_n - 4\,a_{n+1}\,.$$

На полученото линейно-рекурентно уравнение съответства следното характеристично уравнение:

$$\lambda^{n+2} = 21\,\lambda^n - 4\,\lambda^{n+1}\,.$$

Тъй като търсим само ненулевите корени, делим на λ^n :

$$\lambda^2 + 4\,\lambda - 21 = 0.$$

Корените на това квадратно уравнение са $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = -7$. Следователно

$$a_n = C_1 \,.\, 3^n + C_2 \,.\, (-7)^n.$$

Понеже функцията $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ приема само цели неотрицателни стойности, то следва, че a_n е цяло неотрицателно число за всяко цяло $n \geq 1$. Тъй като $|-7| > |3|$, то за всички достатъчно големи n знакът на числото a_n съвпада със знака на събираемото $C_2 \,.\, (-7)^n$, при условие че $C_2 \neq 0$. Строгото доказателство следва от представянето

$$a_n = C_2 \,.\, (-7)^n \,.\, \left(1 + \frac{C_1}{C_2} \,\cdot\, \left(-\frac{3}{7}\right)^n\right).$$

Тъй като $\left|-\frac{3}{7}\right| < 1$, то $\left(-\frac{3}{7}\right)^n \to 0$ при $n \to \infty$, следователно изразът в големите скоби клони към 1. Затова

$$a_n \approx C_2 \,.\, (-7)^n$$

за всички достатъчно големи n.

Следователно, ако $C_2 > 0$, то $a_n < 0$ за всички достатъчно големи нечетни n; а пък ако $C_2 < 0$, то $a_n < 0$ за всички достатъчно големи четни n. И в двата случая се стига до противоречие с това, че всички a_n са неотрицателни.

Остава само една възможност: $C_2 = 0$. Тогава

$$a_n = C_1 \,.\, 3^n.$$

При $n = 0$ намираме $C_1 = a_0$. При $n = 1$ следва $a_1 = 3\,C_1$, т.е. $f\left(a_0\right) = 3\,a_0$. Понеже a_0 е произволно число от $\mathbb{N}$, то $f(x) = 3x$ за всяко $x \in \mathbb{N}$. Проверката показва, че тази функция наистина е решение на функционалното уравнение. Проверката е задължителна, тъй като рекурентното уравнение е следствие от функционалното (двете уравнения не са равносилни).

Отговор: $f(x) = 3x$, $\forall x \in \mathbb{N}$.

Задача 4. Да означим с a_n числото, образувано от последните две цифри на 3^n, тоест остатъка на 3^n при деление на 100. Понеже $3^{n+1} = 3 \,.\, 3^n$, то a_{n+1} е остатъкът, който $3\,a_n$ дава при деление на 100; т.е. a_{n+1} е числото, образувано от последните две цифри на $3\,a_n$. Например $a_1 = 3$, $a_2 = 9$, $a_3 = 27$, $a_4 = 81$, $a_5 = 43$, защото $3 \,.\, 81 = 243$ завършва на 43. Възможните стойности на членовете на редицата са краен брой (точно сто: от 0 до 99). Тъй като редицата е безкрайна, то най-късно сто и първият член ще повтори някой от предишните членове. Понеже всеки член на редицата се определя еднозначно от предходния, то оттам нататък ще се повтарят всички членове. Следователно редицата е периодична и периодът ѝ не надхвърля 100.

За да намерим точната стойност на периода, пресмятаме първите няколко члена:
3, 9, 27, 81, 43, 29, 87, 61, 83, 49, 47, 41, 23, 69, 7, 21, 63, 89, 67, 1, 3, 9, 27 и т.н. Тъй като $a_{21} = a_1 = 3$, то периодът на редицата е равен на 20.

Числото 2016 при деление на периода 20 дава частно 100 и остатък 16. Оттук следва, че $a_{2016} = a_{16} = 21$. С други думи, 3^{2016} завършва на 21; тоест цифрата на единиците е 1, а цифрата на десетиците е 2.