Второ контролно (теория) по Дискретни структури, 13.01.2017г.

Име: __________________________________, ФН:______, Група:________

Задача	1a	1b	2	3a	3b	Общо
получени точки						
максимум точки	1	1	1	1	1	5

Задача 1.

(a) Дефинирайте понятието 'свързана компонента' в неориентиран граф.

(b) Дефинирайте понятието 'силно свързана компонента' в ориентиран граф.

Задача 2.

Докажете, че графът на хиперкуба B_k е двуделен.

Дефиниция: Графът $G(V, E)$ е двуделен, когато можем да боядисаме върховете с два цвята така, че всяко ребро има разноцветни краища.

Задача 3.

Булевата функция $f(x, y, z)$ приема стойност 1, точно когато четен брой от променливите ѝ са единици.

(a) Намерете нейната минимална ДНФ.

(b) Докажете, че множеството $F = \{f, \wedge\}$ е пълно.

Решения

Задача 1. Да означим графа с $G(V, E)$.

(a) Свързана компонента в неориентирания граф G наричаме множеството $[u] = \{v | v \in V, \text{ има път от } u \text{ до } v\}$, за някой връх $u \in V$.

(b) Силно свързана компонента в ориентирания граф G наричаме множеството $[u] = \{v | v \in V, \text{ има път от } u \text{ до } v \text{ и има път от } v \text{ до } u\}$, за някой връх $u \in V$.

Задача 2.

Върховете на B_k са булеви редици с дължина k. Два върха са свързани с ребро, ако съответните им редици се различават в точно една позиция. Бройките на единиците в два съседни върха на B_k ще се различават с единица, следователно ще са с различна четност.

Ако боядисаме бели всички върхове с четен брой единици и черни всички върхове с нечетен брой единици, получаваме оцветяване на B_k, при което всяко ребро има разноцветни краища.

Задача 3.

(a) $f(x, y, z)$ приема стойност 1 в четири случая, при стойности на променливите съответно 000, 011, 101 и 110. Тъй като съответните елементарни конюнкции се различават помежду си на 2 места, те не могат да бъдат съкратени и са прости импликанти.

Следователно съвършената и минимална ДНФ на $f(x, y, z)$ съвпадат и имат вида:

$f(x, y, z) = \overline{x}\overline{y}\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z}$

(b - първи начин)

Разглеждаме $f(x, x, x)$. Тя е 1, когато x е 0 и приема стойност 0, ако x е 1.

Следователно $f(x, x, x) = \overline{x}$ и множеството $F = \{f, \wedge\}$ е пълно, тъй като с функции от F изразяваме отрицание и конюнкция, които са известно пълно множество.

(b - втори начин)

С проста проверка установяваме, че $f(x, y, z)$ не запазва нулата и единицата и не е монотонна.

Конюнкцията пък не е линейна и самоспрегната.

От критерия на Пост-Яблонски следва, че двете образуват пълно множество.