# Решения на домашна работа № 1
# Дискретна Математика
# 3-та и 6-та група, Информатика, ФМИ, СУ

2 ноември 2009 г.

5 т. **Задача 1:** Нека $A = \{1, 2, \ldots, 10\,000\,000\,000\}$. Колко числа от $A$ съдържат цифрата 1? Има се предвид, в записа си в десетична позиционна бройна система.

*Решение:* $|A| = 10^{10}$. Ако $B \subset A$ е множеството от числата от $\{1, 2, \ldots, 10\,000\,000\,000\}$, несъдържащи единица (в записа си в десетична позиционна бройна система), отговорът е $10^{10} - |B|$.

Между 0 и $9\,999\,999\,999$ има $9^{10}$ числа, които не съдържат единица. За да се убедим в това: има биекция между тези числа и стринговете над азбуката $\{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ с дължина 10. Следователно, между 1 и $9\,999\,999\,999$ има $9^{10} - 1$ числа, които не съдържат единица (тъй като 0 не съдържа единица). Тъй като $10\,000\,000\,000$ съдържа единица, числата между 1 и $10\,000\,000\,000$, несъдържащи единица, са $9^{10}-1$. Тоест, $|B| = 9^{10} - 1$. Следователно отговорът е $10^{10} - 9^{10} + 1$.

5 т. **Задача 2:** Колко булеви вектора с дължина $n$, $n \geq 1$, съдържат четен брой нули? Забележка: векторът $\underbrace{1\,1\,\ldots\,1}_{n \text{ единици}}$ съдържа четен брой нули.

*Решение:* Отговорът е $2^{n-1}$. Ще докажем това с индукция по $n$. Нека $S_i$ означава множеството от всички булеви вектори с дължина $i$, за $i \geq 1$.

**База:** Има точно един вектор с четен брой единици от $S_1$, а именно 1. От друга страна, $2^{n-1} = 2^0 = 1$ за $n = 1$

**Индуктивна хипотеза:** Допускаме, че в $S_n$ има точно $2^{n-1}$ булеви вектора с четен брой нули.

**Индуктивна стъпка:** Нека $S^0_{n+1}$ са булевите вектори с дължина $n+1$, имащи $0$ в най-лявата.позиция. Нека $S^1_{n+1}$ са булевите вектори с дължина $n+1$, имащи $1$ в най-лявата позиция. Очевидно $S_{n+1}$ се разбива на $S^0_{n+1}$ и $S^1_{n+1}$. Също така, $|S^0_{n+1}| = |S^1_{n+1}| = \frac{2^{n+1}}{2} = 2^n$.

$S_n$ се разбива на векторите с четен брой нули и на тези с нечетен брой нули. Съгласно индуктивната хипотеза, тези с четен брой нули на брой са $2^{n-1} = \frac{2^n}{2}$. Тъй като $|S_n| = 2^n$, векторите с нечетен брой нули са също $2^{n-1}$.

Добавянето на нула вляво обръща четността на броя на нулите, така че векторите в $S^0_{n+1}$ с четен брой нули са колкото векторите с нечетен брой нули в $S_n$, които са, както казахме, $2^{n-1}$.

Добавянето на единица вляво запазва четността на нулите, следователно векторите в $S^1_{n+1}$ с четен брой нули са колкото векторите с четен брой нули в $S_n$, които са, по индуктивната хипотеза, $2^{n-1}$.

Общо в $S_{n+1}$ има $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2.2^{n-1} = 2^n$ вектора с четен брой нули.

5 т. **Задача 3:** Колко диагонала има в правилен $n$-ъгълник?

*Решение:* От всеки връх има точно $n-3$ диагонала; няма диагонали към него самия и към двата му съседни върха. Върховете са $n$, следователно $n(n-3)$ е два пъти броят на диагоналите, понеже това произведение „брои“ всеки диагонал два пъти. Отговорът е $\frac{n(n-3)}{2}$.

5 т. **Задача 4:** Разполагаме с купчина монети, съдържаща монети от $5$ ст., $10$ ст., $20$ ст. и $50$ ст., поне по $6$ монети от всеки вид. Монетите от всеки вид са неразличими. По колко различни начина можем да подберем $6$ монети от купчината, ако няма значение редът, в който ги вземаме?

*Решение:* Вземанията на монети по този начин са комбинаторни конфигурации без наредба, с повторение, с дължина $6$. Опорното множество е $A = \{5\text{ ст.}, 10\text{ ст.}, 20\text{ ст.}, 50\text{ ст.}\}$. Тъй като $A = 4$, броят на конфигурациите е $\binom{6+4-1}{6} = 84$.

5 т. **Задача 5:** По колко различни начина можем да хвърлим $5$ различни зара (примерно, бял, черен, син, зелен и червен зар)?

*Отговор:* $6^5$.

5 т. **Задача 6:** По колко начина можем да хвърлим 5 неразличими зара?

*Решение:* Това са комбинаторни конфигурации с дължина 5 над опорното множество $A = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$, с повторение и без наредба. Броят им е $\binom{5+6-1}{5} = 252$.

5 т. **Задача 7:** Търговец на пазара разполага с везна и $n$ теглилки. Какъв е максималният брой различни тегла, които търговецът може да постигне, комбинирайки някои (не непременно всички) от теглилките си?

*Решение:* Максималният брой се постига, когато теглилките са такива, че комбинирането на кои да е от тях дава уникално тегло – такова, което не може да се постигне с друга комбинация на теглилки. Такава възможност съществува: примерно, ако теглилките имат маси $1 = 2^0$ гр., $2 = 2^1$ гр., $4 = 2^2$ гр., $\ldots$, $2^{n-1}$ гр.

Нека множеството от теглилките е $A$. По условие $|A| = n$. Нека теглилките са такива, че комбинирането на кои да е от тях дава уникално тегло. Тогава всяка комбинация от теглилки съответства на точно едно непразно подмножество на $A$. Всички поднможества на $A$ са $2^n$; всички непразни подмножества на $A$ са $2^n - 1$. Следователно различните тегла, които могат да се постигнат с различни комбинации от теглилки, е $2^n-1$.

5 т. **Задача 8:** По колко различни начина можем да подредим в редица 5 ябълки, 8 круши и 9 мандарини, ако плодовете от всеки вид са неразличими?

*Отговор:* $\dfrac{(5+8+9)!}{5!\,8!\,9!} = 640\,179\,540$.

5 т. **Задача 9:** Дадена е група от $100$ студента. Известно е, че $37$ студента учат английски, $35$ студента учат френски, $33$ студента учат немски, $38$ студента учат испански, $16$ студента учат английски и френски, $8$ учат английски и немски, $18$ учат английски и испански, $13$ учат френски и немски, $9$ учат френски и испански, $13$ учат немски и испански, $5$ студента учат английски, френски и немски, $6$ студента учат английски, немски и испански, $5$ студента учат френски, немски и испански, а $3$ студента учат английски, немски, френски и испански. Колко студента учат английски, френски и испански, ако $14$ студента не изучават никакви езици?

*Решение:* Нека търсеният брой е $x$. По принципа на включването и изключването имаме:

$$
\begin{aligned}
14 = 100 & \\
& - (37 + 35 + 33 + 38) \\
& + (16 + 8 + 18 + 13 + 9 + 13) \\
& - (5 + 6 + 5 + x) \\
& + 3
\end{aligned}
$$

тоест

$$14 = 21 - x \Leftrightarrow x = 7$$

5 т. **Задача 10:** Нека $A = \{a, b, c, d, e\}$. Нека $R \subseteq A \times A$, $S \subseteq A \times A$ и $T \subseteq A \times A$. Нека

$$R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, e)\}$$

$$S = \{(b, c), (c, e)\}$$

$$T = \{(e, d), (d, e)\}$$

За всяка от следните релации да се определи дали е симетрична и дали е антисиметрична:

1. $R$
2. $S$
3. $T$
4. $(R \cup T) \setminus S$

*Решение:* $R$ не е симетрична, понеже $(b, c) \in R$, но $(c, b) \notin R$. $R$ не е антисиметрична, понеже $(a, b) \in R$ и $(b, a) \in R$. $S$ не е симетрична, понеже $(b, c) \in S$, но $(c, b) \notin S$. $S$ е антисиметрична, понеже не съществува двойка елементи $x, y \in A$, такива че $(x, y) \in S$ и $(y, x) \in S$. $T$ е симетрична, понеже за всяка двойка елементи $x, y \in A$, или $(x, y) \in T$ и $(y, x) \in T$, или $(x, y) \notin T$ и $(y, x) \notin T$. $T$ не е антисиметрична, понеже $(d, e) \in T$ и $(e, d) \in T$. Относно последната релация:

$$
\begin{aligned}
& (R \cup T) \setminus S = \\
& \big(\{(a, b), (b, a), (b, c), (c, e)\} \cup \{(b, c), (c, e)\}\big) \setminus \{(b, c), (c, e)\} = \\
& \big(\{(a, b), (b, a), (b, c), (c, e)\}\big) \setminus \{(b, c), (c, e)\} = \{(a, b), (b, a)\}
\end{aligned}
$$

Релацията е симетрична, понеже за всяка двойка елементи $x, y \in A$, или $(x, y)$ и $(y, x)$ са в нея, или и двете не са в нея. Релацията не е антисиметрична, понеже съдържа $(a, b)$ и $(b, a)$.