Записки по Изследване на операциите

доц. д-р Надя Златева

§1. Кратък увод в Изследване на операциите

§1.1. Какво се разбира под Изследване на операциите?

Операции (Operations) са дейностите, които осъществява дадена организация или система за постигане на своите цели.

Изследване (Research) е процесът на анализ на организацията или системата чрез използване на научни методи.

Изследване на операциите (**Operations Research**) е научна дисциплина за анализ на управлението на организации и системи.

Или, както пише Хамди Таха в увода на неговата станала класическа книга „Увод в изследване на операциите“, „*Изследване на операциите* (*ИО*) *е научен подход за вземане на решения за управление на дадена система в условия на ограничения от технически, икономически или друг характер върху системата.*“.

Под ИО почти винаги се разбира използването на математически методи за моделиране на системата и за анализ на нейните характеристики. Наистина, математическите модели и методи заемат централно място в ИО, но решаването на задачи на организационното управление далеч не винаги се свежда до построяване на математически модел и до извършване на съответните изчисления. Това се обуславя от факта, че в хода на вземане на управленски решения често е необходимо да се отчитат фактори, съществени за правилното решаване на поставената задача, които обаче не могат непосредствено да бъдат включени в математическия модел. Такъв фактор например е човешкото поведение. Наличието на поведенчески елемент в моделираната система често води до това, че използваният за изработване на управленско решение математически модел се оказва твърде груб и поради това неспособен да даде правилно решение на поставената управленска задача.

В тази връзка като пример най-често се привеждаесналият част от фолклора на дисциплината ИО „*асансьорен проблем*“: служителите в административния офис на една голяма фирма често се оплаквали от това, че дълго чакат асансьора. Бил предприет опит възникналият проблем да бъде решен чрез математическите методи на теорията за масовото обслужване. Решението по ред причини се оказало неудачно. По-нататъшното изследване на проблема показало, че претенциите на служителите към режима на работа на асансьора са неоснователни, тъй като времето за чакане на асансьора в действителност било напълно приемливо. Тогава възникнала идеята, позволила решаването на „асансьорния проблем“, а именно: било предложено на всеки етаж редом с асансьорните врати да се поставят големи огледала. Когато това било направено, жалбите веднага секнали. В очакване на асансьора хората се оглеждали в огледалата. При това времето за чакане минавало неусетно за тях и те нямали никакви основания да се оплакват от бавната работа на асансьора.

Приведеният пример показва необходимостта от правилна преценка на възможностите за математическо описание на изследваните процеси и за това, че в сферата на организационното управление далеч не всичко се поддава на формализация и следователно на адекватно отразяване в математическия модел. Интересно е да се отбележи, че това обстоятелство е взето предвид още при първото използване в практиката на методите на ИО – първото приложение на ИО е направено с военни цели, т.е. първите изследвани операции са военните операции. Малко преди и по време на Втората световна война Генералният щаб на британската армия възлага на екип от изявени в различни области учени, между които и психолози, да анализира някои военни операции: разполагане на радарите, управление на конвоите, подобряване на ефективността на бомбардировките, на антиподводничарските акции, на операциите по минирането и т.н. Повечето от тези проблеми са варианти на добре изучената днес задача за оптимално разпределение на ограничени ресурси (в случая – на военна техника).

От казаното дотук става ясно, че ИО е сравнително нова, но динамично развиваща се научна дисциплина. Методите на ИО се прилагат успешно при решаване на проблеми в сферата на промишленото производство, военното дело, селското стопанство, транспорта, финансите, икономиката, планирането и др. Използването на методи на ИО за решаване на проблеми от областта финансите и икономиката се нарича още Management Science. Напоследък термините Operations Research и Management Science се използват като синоними.

Тъй като ИО се използва за решаване на задачи на организационното управление, да видим каква е

§1.2. Структурата на задачата за организационно управление

При поставяне на задачата за организационното управление преди всичко е важно да се определят три неща:

1. *целта*, преследвана от субекта на управлението;

   Целта е крайният резултат, който е необходимо да се постигне по пътя на избор и реализация на някакви управляващи въздействия върху управляваната система. В икономическата сфера целта най-често е да се максимизира печалбата или да се минимизират разходите. Когато целта е определена, за *оптимален* се счита такъв начин на действие, който води до постигането на тази цел.

2. стойностите на кои характеристики на изследваната система могат да се променят (*управляеми променливи*);

   При проучването на обекта на управление трябва да се намерят тези негови характеристики, чиито стойности могат да се променят (да се управляват). С други думи, трябва да се определи цялото множество от т. нар. *управляеми променливи*, които често ще наричаме само *променливи*. В случаите, когато априорната информация за идентификация на променливите не е достатъчна, за тяхното изясняване се налага да се привлекат специалисти от различни области, които в една или друга степен да вземат участие в процеса на анализ на системата. В тази връзка да отбележим, че най-доброто решение на „асансьорния проблем“ е било предложено от този член на екипа от анализатори, който е имал повече познания в областта на психологията, отколкото в областта на формалните методи на ИО.

3. стойностите на кои характеристики на изследваната система не се променят (*параметри* на системата).

   Идентификацията на *неуправляемите променливи* (параметри), т.е. на тези характеристики на системата, изменението на чиито стойности не зависи от решенията на субекта на управление, също е важен момент при вземане на управленски решения. Например, за да се вземе решение относно обема и структурата на продукцията, която смята да реализира на пазара, фирменото ръководство трябва да има предвид такива параметри като пазарните цени на отделните изделия. Ясно е, че в реални ситуации игнорирането на някои параметри може да доведе до построяването на неадекватен модел и следователно до вземането на погрешни решения.

След като сме изяснили структурата на задачата за управление, да преминем към

§1.3. Изкуството да се моделира

В ИО централната роля е отредена на математическото моделиране. За построяването на математически модел е необходимо да се има ясна представа за целта на изследваната система и да се разполага с точна информация за ограниченията върху системата – те определят областта от допустими стойности на управляемите променливи. Анализът на модела трябва да доведе до намирането на най-добро управленско въздействие върху обекта на управление, при което се изпълняват и всички ограничения.

Сложността на реалните системи силно затруднява представянето на целта и ограниченията в аналитичен вид. На пръв поглед при анализ на реалната ситуация е необходимо да се отчетат огромен брой променливи и ограничения, но често само една част от тях се оказва съществена за описание на поведението на изследваната система. Поради това е уместно първо да се направи опростено описание на реалната система, при което е най-важно да се открият определящите за поведението на системата променливи, параметри и ограничения. С други думи, в опростеното описание на реалната система се използват само тези фактори на системата (променливи, ограничения и параметри), които определят основната линия на поведение на реалната система. Математическият модел от своя страна представя използваните за описанието на опростената система съотношения във вид на целева функция и съвкупност от функционални ограничения.

Правила, определящи прехода от реалната система към математическия модел, не съществуват. Свеждането на множеството фактори, управляващи поведението на системата, към относително неголям брой определящи фактори и преходът от опростения образ на оригиналната система към модела, е изкуство, а не наука. Степента на адекватност на построения модел зависи преди всичко от способностите на членовете на екипа от анализатори.

Въпреки че строги предписания за това как следва да се разработва даден модел е невъзможно да се формулират, добре е да се има представа за възможните типове модели, за тяхната структура и характеристики.

§1.4. Една класификация на моделите на ИО

Най-важният тип модели на ИО са *математическите модели*. В основата на тяхното построяване стои допускането на това, че всички променливи, параметри и ограничения на системата, както и целта на управление, са количествено измерими.

Нека с x_j, $j = 1, \dots, k$ означим променливите на системата. Нека X бъде множеството от тези k-мерни вектори (точки) $\mathbf{x}(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, чиито координати $(x_1, \dots, x_k)$ удовлетворяват всички ограничения, наложени на системата. Множеството X се нарича *допустимо множество*. Ако условията за функциониране на управляваната система се описват с m на брой ограничения, то след изясняване на функционалната зависимост между параметрите и променливите на системата, допустимото множеството X може да се представи като множеството от решенията на система от m функционални равенства и/или неравенства, а целта на управление да се опише посредством функция (наречена *целева функция*) на променливите $x_1, \dots, x_k$ на системата.

Следователно, математическият модел се заключава в свеждането на задачата за организационно управление до следната математическа задача: Да се намери оптималната стойност на целевата функция

$$f(x_1, \dots, x_k)$$

при следните ограничения

$$g_i(x_1, \dots, x_k) \lesseqqgtr b_i,\ \ i = 1, \dots, m,$$

където $f, g_i, i = 1, \dots, m$, са функции на k променливи, а $b_i, i = 1, \dots, m$, са реални числа. Знакът $\lesseqqgtr$ означава, че функционалното ограничение е от един от следните три вида: неравенство $\leqslant$, равенство $=$ или неравенство $\geqslant$.

Тази математическа задача се нарича *задача на математическото оптимиране* или още *оптимизационна задача.*

Всяка точка $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$, чиито координати удовлетворяват всичките m ограничения на оптимизационната задача (т.е. точка $\mathbf{x} \in X$) се нарича *допустима точка* или *допустимо решение. Оптимално решение* е такава допустима точка, в която целевата функция приема най-добрата си стойност (оптимум) сред стойностите си във всички допустими точки. Оптималната стойност на целевата функция, която се търси, е *минимум* или *максимум* и зависи от задачата. Например това може да бъде максимума на печалбата или минимума на загубите при дадено производство.

От своя страна математическите модели могат да се разделят на *детерминистични* и *стохастични* модели.

При *детерминистичните модели* стойностите на параметрите на системата са известни константи. С такива модели работят линейното оптимиране, целочисленото оптимиране, оптимирането върху графи, теорията на оптималното управление и др.

При *стохастичните модели* параметрите на системата приемат определени стойности с някаква вероятност. С такива модели работят теорията случайните процеси, теорията на масовото обслужване, теорията за полезността, теорията на игрите, динамичното оптимиране и др.

Настоящият курс е посветен основно на детерминистичните математически модели и методите за тяхното решаване.

Въпреки че в курса се разглеждат предимно математически модели, добре е да се знае, че освен математическите модели в ИО се използват и *имитационни* и *евристични* модели.

Имитационните модели „възпроизвеждат“ поведението на системата в продължение на някакъв период от време. Това се постига чрез определяне на поредност от събития, които дават важна информация за поведението на системата. След това характеристиките на системата се регистрират само в моментите, когато тези събития се случват. Получената информация се събира във вид на статистически данни от наблюденията на тези събития. Тази информация се обновява всеки път при настъпване на някое от интересуващите анализатора събития.

Тъй като при построяването на имитационен модел не е необходимо използването на математически функции, свързващи в явен вид променливите и параметрите на системата, тези модели по правило позволяват да се имитира поведението на много сложни системи, за които построяването на математически модели и получаването чрез тях на решение е невъзможно. Освен това гъвкавостта, присъща на имитационните модели, позволява да се получи по-точно представяне на системата. Основният недостатък на имитационното моделиране се състои в това, че неговата реализация е еквивалентна на провеждането на множество експерименти, а това неизбежно води до експериментални грешки. При имитационното моделиране обикновено възникват големи трудности, свързани с разработката на експеримента (статистически аспект), натрупването и съхраняването на резултатите от наблюденията и необходимата проверка на статистическите изводи. Имитационното моделиране е по-неудобен инструмент за изследване от математическите модели, които позволяват да се получи явно решение на поставената в общ вид задача.

Видяхме, че математическият модел на ИО търси оптимално решение на поставения проблем. Съответната му математическа задача обаче може да се окаже толкова сложна, че намирането на нейно точно решение да бъде невъзможно. Дори когато съществуването на оптимално решение е теоретически доказано, необходимите за неговото получаване пресмятания могат да бъдат огромен брой, а необходимото за тяхното извършване време — твърде дълго. В такива случаи за получаване на рационално (приближено) решение могат да се използват *евристични методи*, базирани на интуитивно или емпирично избрани правила, чрез които се подобрява текущото решение. По същество евристичните методи представляват процедури за търсене на разумен преход от едно допустимо решение към друго допустимо решение с цел подобряване на текущата стойност на целевата функция на модела. Когато по-нататъшно приближение към оптимума е невъзможно да се получи, най-доброто от получените до момента решения се приема за приближено решение на задачата.

§1.5. Изчислителни аспекти на ИО

Повечето алгоритми, разработени за решаване на оптимизационни задачи, не позволяват тяхното решение да се получи директно в аналитична форма. Като правило решението се намира чрез последователност от повтарящи се изчислителни процедури (*итерации*). Основната особеност на итерационния процес се състои в това, че на всяка стъпка съществува възможност за получаване на решение, което е по-близко до оптимума, отколкото текущото решение.

Итерационният характер на изчислителния процес, използван за решаване на задачи с помощта на методи на ИО обуславя използването на компютри за числените пресмятания. Освен това размерността на някой оптимизационни задачи е толкова голяма, че опитите да се получи тяхно решение, като се пресмята на ръка, са безсмислени.

Въпреки, че успехите в използването в практиката на методите на ИО се дължат на мощните изчислителни машини, остават ред задачи, за които не съществуват ефективни числени методи за решаване. Основната причина за възникващите трудности се състои в това, че даже в случая, когато сходимостта на алгоритъма е теоретически доказана и се използват мощни компютри за пресмятанията, времето за извършване на тези пресмятания може да бъде много дълго. Друг проблем е характерният за компютърните пресмятания недостатък — грешките от закръгляване. Влиянието на грешките от закръгляване неизбежно се проявява при решаване на задачи с целочислени стойности на променливите, понеже в компютъра аритметичните действия се изпълняват с плаваща запетая. При реализиране на итерационен изчислителен процес влиянието на натрупването на грешките от закръгляване в даден момент може да стане съществено. Този проблем напоследък не е толкова актуален поради постигнатото вече високо технологично ниво на компютрите, което позволява постигането на по-голяма точност при пресмятанията.

Възможните трудности при осъществяване на изчислителния процес при решаване на оптимизационни задачи винаги трябва да се имат предвид. Затруднения от този род могат да заставят анализатора да опрости модела и да го приведе в съответствие с наличните възможности за числени пресмятания. За съжаление такива опростявания по правило увеличават разрива между оригиналната система и модела, което води до получаване на по-неточно решение на изходната задача.

§1.6. Етапи на ИО

Вече се убедихме, че в процеса по ИО специалистът в областта на математическото моделиране е добре да бъде подпомогнат от други специалисти, компетентни в различните аспекти на изследваната проблемна ситуация. Следователно в състава на екипа от анализатори е необходимо да влизат и представители на възложителя, носещи пряка отговорност за функционирането на изследваната система, а също така за проверката и практическото внедряване на получените решения.

Работата, изпълнявана от анализаторския екип в процеса на ИО, се състои от следните етапи:

1. описание на проблема;
2. построяване на модела;
3. решаване на поставената задача с помощта на модела;
4. проверка на адекватността на модела;
5. прилагане на получените резултати в практиката.

Въпреки че тази последователност не е задължителна, тя може да се счита за общоприета. С изключение на третия етап, при който решението се получава като се използват апробирани формализирани методи, всички останали етапи се изпълняват без строго регламентирани правила. Това се обуславя от факта, че изборът на една или друга процедура за изпълнение на всеки етап зависи от конкретния проблем, от условията за функциониране на системата и от опита на екипа.

На *първия етап* се описва проблемът, което в общи линии включва следните основни стъпки:

- формулировка на задачата;
- намиране на присъщите на изследваната система параметри и променливи, цел и ограничения.

Вторият етап е свързан с построяването на модела. На този етап екипът, след като отчете особеностите на поставената задача, трябва да избере най-подходящия за адекватно описание на изследваната система модел. При построяването на такъв модел трябва да се установят количествените съотношения, необходими за изразяване на целта и ограниченията във вид на функции от управляемите променливи. Ако разработваната задача се включва в някой общ клас задачи на ИО (например линейни задачи, целочислени задачи и т.н.), удобно е да се използва някой от добре известните математически методи за тяхното решаване. Ако математическите съотношения, използвани в модела, са твърде сложни и не позволяват да се получи аналитично решение на задачата, по-подходящ за изследване може да се окаже имитационен модел. В някои случаи може да се наложи съвместно използване на математически, имитационни и евристични модели.

На *третия етап* се осъществява решаването на формулираната задача. При използване на математически модели решението се получава с помощта на апробирани оптимизационни методи, които водят до оптимално решение на задачата. В случая на прилагане на имитационни или евристични модели понятието за оптималност става по-неопределено и полученото решение само приблизително удовлетворява критерия за оптималност за функциониране на системата.

На третия етап освен намирането на оптимално решение винаги, когато това е възможно, трябва да бъде получена допълнителна информация за възможното изменение на решението при изменение на параметрите на системата. Тази част от изследването обикновено се нарича *анализ за чувствителност* на модела. Той е много полезен, когато някои параметри на изследваната система не подлежат на точно измерване. В такава ситуация е важно да се изследват възможните изменения на оптимума в зависимост от изменението в някакви интервали на съответните параметри на системата.

Четвъртият етап се състои в проверка на адекватността на модела. Моделът може да се счита за адекватен, ако е способен да даде достатъчно надеждно предсказание за поведението на системата. Общият метод за проверка за адекватност на модела се състои в съпоставяне на получените резултати с характеристиките на системата, които тя е имала при определени условия в миналото. Ако при аналогични входни параметри моделът достатъчно точно възпроизвежда поведението на системата, той се счита за адекватен. Тъй като построяването на модела обикновено става като се използват щателно проверени ретроспективни данни, благоприятният изход от едно такова сравнение е предопределен.

Този способ за оценка на адекватност на модела е непригоден при разработване на нови системи, тъй като в този случай липсват необходимите за проверка на модела данни. В някои случаи е допустима паралелна разработка на имитационен модел, предназначен за генериране на данни, необходими за проверката на основния математически модел.

Заключителният етап е свързан с реализацията на получените и проверени резултати. На този етап е необходимо да се оформят крайните резултати от изследването във вид на точни инструкции по прилагане на резултатите, които трябва да са съставени така, че лесно да се възприемат от лицата, осъществяващи управлението на системата.

§1.7. Кратко описание, цели и източници на курса по ИО

Целта на курса по ИО е да запознае студентите с основни класове задачи на ИО, със съответните им модели, както и с някои математически методи за тяхното решаване.

Въпреки че на упражнения ще бъде използван софтуер за решаване на задачите, заблуждаващо е мнението, че не е необходимо да се изучава математическия апарат на ИО, понеже компютърът може сам да „реши“ задачата. Не бива да се забравя, че компютърът решава това, което анализаторът е формулирал като задача. Следователно, ако той самият не е наясно с вида и възможностите на използвания модел, както и с преимуществата и недостатъците на съответния математически метод, то това неизбежно ще се отрази на качеството на полученото решение.

Целта на курса е да даде на студентите представа за математическия апарат на ИО и с помощта на прости примери да покаже сферата на приложение на методите на ИО. След като получи знания за математическите основи на ИО студентът би могъл се занимава с практическо изследване на реални задачи и сам да повишава нивото на своята подготовка в дадена конкретна област на ИО, като изучава съответните специализирани публикации.

За начало в курса подробно ще бъдат разгледани основите на линейното оптимиране (ЛО). Такава е създалата се традиция, която неотменно се спазва във всички книги по ИО и която се обуславя от това, че ЛО служи за основа и на много други математически методи на ИО, като например целочисленото оптимиране. По-нататък в курса ще бъдат разгледани целочисленото оптимиране, някои графови модели и др.

Полезни за доброто и бързо овладяване на преподавания материал ще бъдат вече придобитите знания от студентите в областите линейна алгебра и теория на графите.

Записките върху преподавания в курса материал са базирани на следните основни източници:

[1] Х. Таха, Введение в исследование операций, Мир, Москва, 1985; Вильямс, Москва, 2005.

[2] D. Goldfarb, M. Todd. Chapter II. Linear programming, In: Handbooks in OR & MS, vol. 1 (G. L. Nemhauser et al. Eds.), Elsevier, 1989.

[3] W. L. Winston, Operations Research. Applications and Algorithms, 4th ed., Duxbury Press, 2004.

[4] М. Базара, К. Шетти, Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы, Москва, Мир, 1982.

[5] P. Jensen, J. Bard, Operations Research. Models and Methods, John Wiley & Sons, 2003.

[6] Й. Митев, Записки по Изследване на операциите II част, 2009, `http://www.fmi.uni-sofia.bg/bg/lecturers/vois/jormit`

§2. Задача на линейното оптимиране. Каноничен вид

В §1.4 видяхме, че построяването на математическия модел води до формулирането на задача на математическото оптимиране (оптимизационна задача) от следния вид:

$$\begin{aligned}
&\text{да се намери}\\
&\min / \max \ f(x_1, \dots, x_k) \quad \text{(целева функция)}\\
&\text{при}\\
&g_i(x_1, \dots, x_k) \lesseqqgtr b_i,\ i = 1, \dots, m \quad \text{(ограничения)},
\end{aligned}$$

където $f, g_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ са функции на k променливи $x_1, \dots, x_k$, а b_i, $i = 1, \dots, m$ са реални числа. Знакът $\lesseqqgtr$ означава, че функционалното ограничение е от един от следните три вида: неравенство $\leqslant$, равенство $=$ или неравенство $\geqslant$.

С други думи, решаването на оптимизационната задача се състои в това да се намери оптималната стойност (минимум или максимум) на някаква функция $f(\mathbf{x})$ за стойности на аргумента $\mathbf{x}$, които принадлежат на някакво подмножество X на пространството $\mathbb{R}^k$, състоящо се от решенията на m-те функционални равенства и неравенства.

Основен дял на математическото оптимиране е *линейното оптимиране.*

§2.1. Задача на линейното оптимиране

Задача на линейното оптимиране (ЛО) е такава задача на математическото оптимиране, в която целевата функция f, както и всички функции g_i, $i = 1, \dots, m$ описващи ограниченията, са *линейни функции.*

Следователно общият вид на задача на линейното оптимиране е следният

$$(L) \qquad \begin{aligned}
&\min / \max \ z(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j,\\
&\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j \lesseqqgtr b_i,\ i = 1, \dots, m,\\
&x_j \geqslant 0,\ j \in J \subseteq \{1, 2, \dots, k\},
\end{aligned}$$

като за удобство неравенствата, отнасящи се само до неотрицателния знак на някои от променливите се записват отделно от останалите ограничения.

Теоретичните основи на линейното оптимиране се полагат с изучаването на системи линейни неравенства, което може да се проследи назад във времето до една работа на Фурие от 1826 г. По-късно много математици доказват различни частни случаи на най-важният резултат на линейното оптимиране, който и ние ще разгледаме — т. нар. *силна теорема за двойнственост.*

Приложната страна на теорията започва да се разработва през 1939 г. от руския математик Леонид Канторович, който пръв забелязва практическата важност на някои класове линейни оптимизационни задачи и пръв дава алгоритъм за тяхното решаване. За съжаление години наред работите на Канторович остават непознати на Запад и незабелязани на Изток. Силен тласък в развитието на приложната страна на линейното оптимиране дават работите на Джордж Данциг, който през 1947 г. разработва симплекс метода за решаване на линейни задачи, които възникват в планирането на въздушните операции на военно-въздушните сили на САЩ. За първи път симплекс методът е публикуван през 1951 г. и си остава най-широко използваният алгоритъм за решаване на линейни задачи. По-късно с развитието на компютърните технологии се създават редица програмни реализации на този и други алгоритми за решаване на линейни задачи.

През същата 1951 г., през която Данциг публикува симплекс метода, в своя публикация Тялинг Купманс показва, че линейните задачи представляват подходящ модел за анализ на класически икономически теории. През 1975 г. Шведската Кралска Академия на Науките присъжда Нобеловата награда за икономика на Канторович и Купманс „за техния принос в теорията за оптималното разпределение на ресурси“. Академията намира работата на Данциг като твърде математическа за присъждане на наградата по икономика (а знаем, че не се присъжда Нобелова награда за математика).

След като Канторович дава математическата формулировка на общата задача на ЛО, а Данциг разработва симплекс метода за решаването ѝ, редица задачи биват разпознати като задачи на ЛО. Важни примери за такива задачи са транспортната задача, поставена от Хичкок (1941) и задачата за диета, поставена от Стиглър (1945). Конкретни модели на тези и други линейни задачи ще бъдат разгледани на упражненията. Много практически задачи могат да се формулират като задачи на линейното оптимиране, а линейните модели се използуват най-вече в икономическия анализ и планирането.

Първото успешно решаване на линейна задача с компютър датира от 1952 г., след което симплекс методът, негови вариации, а и принципно различни алгоритми за решаване на линейната задача са кодирани за среден и висок клас машини.

По-нататък в курса ще бъде развита основната теория на линейното оптимиране и ще бъде представен симплекс метода за решаване на линейни задачи. Изложението ще бъде едновременно геометрично, аналитично и алгоритмично.

Пример за конкретна линейна задача в общ вид с две променливи е следния

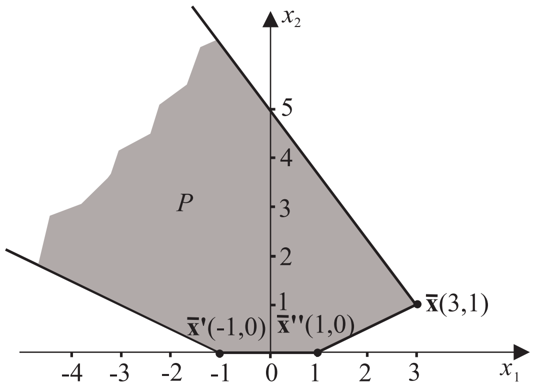
Пример 2.1. Да се намери

$$\max z(\mathbf{x}) = 3x_1 - 2x_2$$

при ограничения

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\leqslant 1, \\ 4x_1 + 3x_2 &\leqslant 15, \\ x_1 + 2x_2 &\geqslant -1, \\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

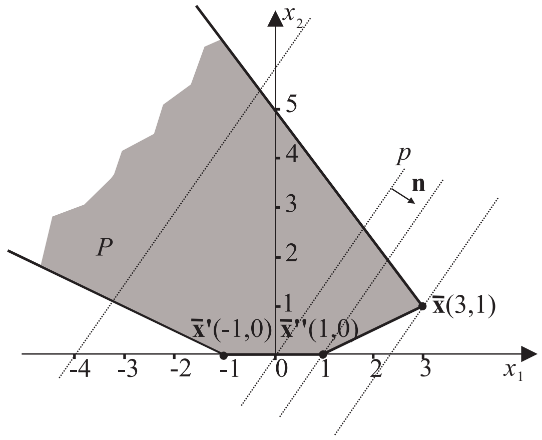
Нека P е допустимото множество на задачата. То се състои от всички вектори $\mathbf{x}(x_1, x_2)$, чиито координати удовлетворяват и четирите линейни неравенства. От геометрична гледна точка, множеството от точки, чиито координати са решения на линейно неравенство, е *полуравнина.* Следователно допустимото множество P е сечение на четири полуравнини и представлява защрихования неограничен многоъгълник с върхове в точките $\overline{\mathbf{x}}(3,1)$, $\overline{\mathbf{x}}'(-1,0)$ и $\overline{\mathbf{x}}''(1,0)$, който е изобразен на фиг. 2.1.



Фигура 2.1.

Интересуваме се от най-голямата стойност на линейната функция $z(\mathbf{x}) = 3x_1 - 2x_2$, която тя може да приеме за векторите $\mathbf{x}(x_1, x_2) \in P$. Да разгледаме уравнението $z(\mathbf{x}) = 0$. Негови решения са всички точки от правата $p : 3x_1 - 2x_2 = 0$, а точките от допустимото множество, в които z приема стойност 0, са точките от сечението на p с многоъгълника, което е отсечка, както се вижда на фиг. 2.2.

Нормалният вектор към правата p е векторът $\mathbf{n}(3, -2)$. Той указва посоката, при движение в която стойността на линейната функция z нараства (в нашия случай надясно). Тъй като решаваната задача е за максимум, ясно е че увеличаване на стойността на целевата функция ще получим при успоредно преместване на p надясно. Това преместване е смислено дотогава, докато сечението на правата с допустимото множество е непразно. В нашия случай можем да преместваме p надясно дотогава, докато сечението ѝ с допустимото множество стане върха $\overline{\mathbf{x}}(3,1)$. За стойността на z в $\overline{\mathbf{x}}$ имаме $z(\overline{\mathbf{x}}) = 3x_1 - 2x_2 = 3.3 - 2.1 = 7$.



Фигура 2.2.

По-нататъшно увеличение на стойностите на z не е възможно, тъй като при по-нататъшно местене на p надясно сечението ѝ с допустимото множество P ще бъде празно. Следователно максималната стойност на z върху допустимото множество P е 7 и тя се постига във върха $\overline{\mathbf{x}}(3,1)$, или с други думи казано, за стойности на променливите $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$.

Ако вместо най-голямата ни интересува най-малката стойност на z върху P, то трябва успоредно да местим p наляво. Но колкото и далеч да отместим наляво правата p, сечението ѝ с допустимото множество е непразно. Това означава, че в допустимото множество има точки, в които z приема произволно малки стойности. Следователно задачата за минимум на z върху P няма решение поради неограничено намаляване към $-\infty$ на целевата функция z върху допустимото множество P.

Разгледаният метод за решаване може да се приложи към произволна линейна задача с две променливи и да послужи за намиране на нейно решение или за установяване на неограниченост на целевата ѝ функция върху допустимото ѝ множество. Той обаче е неуместен за линейни задачи с повече от две променливи, което налага за тяхното решаване да се търси по-систематичен подход.

Вектор $\mathbf{x}(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ записваме в матрична форма като вектор-стълб, т.е. като $k \times 1$ матрица състояща се от неговите координати, или $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$. С $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}$ означаваме транспонирания вектор на вектора $\mathbf{x}$, т.е. $1 \times k$ матрицата $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = [x_1, \ldots, x_k]$. Скаларното произведение на векторите $\mathbf{c}$ и $\mathbf{x}$ в $\mathbb{R}^k$ записваме като резултат от матрично умножение:

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = [c_1, \ldots, c_k] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j,$$

а целевата функция на линейната задача (L) изразяваме като $z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$.

Аналогично, всяко от m-те ограничения на (L) записваме във вида

$$\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \lesseqqgtr b_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

където $\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}} = [a_{i1}, \ldots, a_{ik}]$.

След въведените означения задачата (L) се записва така:

$$(L) \qquad \begin{aligned} &\min / \max \; z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \\ &\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \lesseqqgtr b_i, \; i = 1, \ldots, m, \\ &x_j \geqslant 0, \; j \in J \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}, \end{aligned}$$

§2.2. Канонична задача

Линейна задача в общ вид (L) може да бъде за минимум или пък за максимум, а ограниченията могат да бъдат неравенства $\leqslant$ и $\geqslant$ и равенства. За да се улесни и уеднакви подхода към линейна задача в общ вид (L) тя се привежда в *каноничен вид*. Линейна задача, която е в каноничен вид се нарича *канонична задача*.

Дефиниция 2.1. Канонична задача е линейна задача за минимум с ограничения равенства с неотрицателни десни страни, върху всичките променливи на която са наложени условия за неотрицателност.

Линейна задача в общ вид (L) се привежда в съответната ѝ канонична задача (K) като се направят следните прости преобразувания:

- търсенето на $\max \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ се заменя с търсенето на $\min -\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$, тъй като за произволно множество $X \subset \mathbb{R}^k$ и произволна функция $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ е изпълнено, че $\max\limits_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x}) = -\min\limits_{\mathbf{x}\in X} -f(\mathbf{x})$;

- ако $b_i < 0$ за някое i, двете страни на съответното ограничение се умножават с -1;

- всяка *свободна променлива* x_j, $j \notin J$, (променлива x_j, върху която в (L) няма наложено условие за неотрицателност) се заменя с разликата на две неотрицателни променливи x_j^+ и x_j^-:

$$x_j = x_j^+ - x_j^-, \quad x_j^+ \geqslant 0, \; x_j^- \geqslant 0;$$

- неравенство от вида

$$\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leqslant b_i$$

  се превръща в равенство чрез добавяне към лявата му страна на нова неотрицателна променлива x_{k+i}, наречена *допълнителна променлива*

$$\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + x_{k+i} = b_i, \quad x_{k+i} \geqslant 0.$$

- неравенство от вида
$$\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \geqslant b_i$$
  се превръща в равенство чрез изваждане от лявата му страна на нова неотрицателна променлива x_{k+i}, наречена също *допълнителна променлива*:
$$\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - x_{k+i} = b_i, \quad x_{k+i} \geqslant 0.$$

От казаното е ясно, че преобразуването на задачата (L) в съответната ѝ канонична задача (K) става за сметка на увеличаване на броя на променливите (от k на n).

В матрична форма каноничната задача се записва така:

$$(K) \qquad \begin{array}{ll} \min & z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\,, \end{array}$$

където $\mathbf{c}(c_1, \ldots, c_n)$ е n-мерен вектор, който наричаме *вектор на целевата функция*, $\mathbf{x}(x_1, \ldots, x_n)$ е n-мерен вектор, който наричаме *вектор на променливите*, $\mathbf{b}(b_1, \ldots, b_m)$ е m-мерен вектор с неотрицателни координати, който наричаме *вектор на дясната страна*, а $m \times n$ матрицата $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i=1\div m}^{j=1\div n}$, чиито вектор-редове са векторите $\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}$ на линейните функции, описващи ограниченията, наричаме *матрица на ограниченията.*

Да отбележим, че неравенството $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ трябва да се разбира като векторно неравенство и означава, че $x_j \geqslant 0$ за всяко $j = 1, \ldots, n$, т.е. $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ е еквивалентно на система от n числови неравенства. Аналогично, равенството $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ е векторно равенство и означава, че координатите на векторите $\mathbf{A}\mathbf{x}$ и $\mathbf{b}$ са съответно равни, т.е. $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ е еквивалентно на система от m числови равенства.

Да отбележим също така, че координатите на вектора на целевата функция в каноничната задача (K), съответстващи на допълнителни променливи, са нули.

Изходната задача (L) и съответната ѝ канонична задача (K) са еквивалентни в смисъл, че на всяка допустима точка на (L) чрез подходящо преобразуване на координатите ѝ може да се съпостави допустима точка на (K) (и обратно) така че стойностите на целевите функции на двете задачи в тях да се различават евентуално само по знак.

Следователно, за да решим изходната задача (L) е достатъчно да решим съответната ѝ канонична задача (K).

По-нататък ще разглеждаме предимно канонични линейни задачи.

За да илюстрираме правилата за преобразуване на линейна задача в канонична, да приведем в каноничен вид задачата от Пример 2.1.

Тъй като x_1 е свободна по знак променлива, навсякъде (в целевата функция и в ограниченията) я представяме във вида $x_1 = x_1^+ - x_1^-$, където $x_1^+ \geqslant 0$ и $x_1^- \geqslant 0$.

От задача за максимум преминаваме към задача за минимум

$$\min z_K(\mathbf{x}) = -3x_1^+ + 3x_1^- + 2x_2.$$

Тъй като третото неравенство е с отрицателна дясна страна, го умножаваме с -1, за да получим

$$-x_1 - 2x_2 \leqslant 1.$$

Добавяме по една неотрицателна допълнителна променлива в лявата страна на трите неравенства, които сега са в посоката $\leqslant$.

Окончателно, каноничният вид на задачата от примера е

$$\begin{array}{l}
\min z_K(\mathbf{x}) = -3x_1^+ + 3x_1^- + 2x_2 \\
\quad x_1^+ - \ \ x_1^- - 2x_2 + x_3 \qquad\qquad\quad = \ \ 1, \\
\ \ 4x_1^+ - 4x_1^- + 3x_2 \qquad + x_4 \qquad\ = 15, \\
\ -x_1^+ + \ \ x_1^- - 2x_2 \qquad\qquad\quad + x_5 = \ \ 1, \\
x_1^+, x_1^-, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0.
\end{array}$$

От изходната линейна задача с две променливи (x_1, x_2) получихме съответната ѝ канонична задача с шест променливи $(x_1^+, x_1^-, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

Ако векторът $\mathbf{x}_L(x_1, x_2)$ е допустим за изходната задача и

- $x_1 \geqslant 0$, то съответният вектор $\mathbf{x}_K(x_1, 0, x_2, 1 - x_1 + 2x_2, 15 - 4x_1 - 3x_2, 1 + x_1 + 2x_2)$ е допустим за каноничната задача;

- $x_1 < 0$, то съответният вектор $\mathbf{x}_K(0, -x_1, x_2, 1 - x_1 + 2x_2, 15 - 4x_1 - 3x_2, 1 + x_1 + 2x_2)$ е допустим за каноничната задача.

И в двата случая $z_K(\mathbf{x}_K) = -z(\mathbf{x}_L)$, т.е. стойностите на целевите функции в съответните допустими решения се различават само по знак.

Обратно, ако $\mathbf{x}_K(x_1^+, x_1^-, x_2, x_3, x_4, x_5)$ е допустим за каноничната задача, то съответният му $\mathbf{x}_L(x_1^+ - x_1^-, x_2)$ е допустим за изходната задача, като отново $z(\mathbf{x}_L) = -z_K(\mathbf{x}_K)$.

§3. Канонично многостенно множество. Върхове и базисни допустими решения

В § 2.2 показахме как произволна линейна задача (L) се свежда до съответна на нея канонична задача

$$(K) \qquad \begin{array}{ll} \min & z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \\ & \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\,, \end{array}$$

където $\mathbf{A}$ е $(m \times n)$ матрица, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m_+$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ е n-мерен вектор на променливите.

Вектор $\mathbf{x}(x_1, \ldots, x_n)$ се нарича *допустима точка* (*допустимо решение*) на задачата (K), ако координатите му удовлетворяват всички ограничения. Допустима точка се нарича *оптимално решение*, ако в нея целевата функция z приема най-малката си стойност от стойностите си във всички допустими точки. Множеството от всички допустими точки на задачата (K) означаваме с

$$M := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$$

и наричаме нейно *допустимо множество.*

За задачата (K) има точно три възможности:

- Допустимото ѝ множество M е празно. Това означава, че ограниченията на (K) са несъвместими. В този случай (K) няма решение и се нарича *несъвместима.*

- Допустимото множество M е непразно, а целевата функция $z(\mathbf{x})$ е неограничена отдолу върху M (т.е. $z(\mathbf{x}) \to -\infty$ за точки $\mathbf{x} \in M$). Тогава (K) няма решение и се нарича *неограничена.*

- Допустимото множество M е непразно, а целевата функция $z(\mathbf{x})$ е ограничена отдолу върху M. В този случай ще докажем, че (K) има оптимално решение, т.е. съществува $\mathbf{x}^* \in M$, такова че $z(\mathbf{x}^*) = \min\{z(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in M\}$ и (K) се нарича *разрешима.*

Очевидно от вида на допустимото множество $M := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$ на каноничната задача (K) до голяма степен зависи нейната разрешимост. Затова е необходимо да изучим свойствата на това множество, което поради очевидната му връзка с каноничната задача ще наричаме *канонично множество.* От алгебрична гледна точка то се състои от неотрицателните решения $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ на система линейни уравнения $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. За да вникнем обаче в теорията на линейното оптимиране и за да разберем симплекс метода, използван за решаване на линейни задачи, от съществено значение е да изучим геометричните свойства на това множество.

§3.1. Изпъкнали множества. Някои свойства

Дефиниция 3.1. Нека $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ са две точки в $\mathbb{R}^n$. За всяко $\lambda \in [0,1]$ съответната точка

$$\mathbf{x}_\lambda = \lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$$

се нарича *изпъкнала комбинация* на точките $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ с *тегла* съответно λ и $1-\lambda$. Ако $\lambda \neq 0, 1$, то $\mathbf{x}_\lambda$ се нарича *истинска изпъкнала комбинация* на точките $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$.

Очевидно, когато λ се мени от 0 до 1 съответните изпъкнали комбинации $\mathbf{x}_\lambda$ описват отсечката с краища $\mathbf{x}_2$ и $\mathbf{x}_1$.

Дефиниция 3.2. Множество $C \subseteq \mathbb{R}^n$ се нарича *изпъкнало*, когато за всеки две точки $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$, принадлежащи на C, на C принадлежи и всяка изпъкнала комбинация на $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ (всяка точка от съединяващата ги отсечка).

С други думи, едно множество е изпъкнало, ако заедно с всеки две точки от множеството в него се съдържа изцяло и отсечката, която ги съединява (вж. фиг. 3.3). Празното и едноточковото множество по дефиниция са изпъкнали множества.

Фигура 3.3.

Дефиниция 3.3. Точка $\mathbf{x}$ от изпъкнало множество C се нарича *връх* на C ако $\mathbf{x}$ не може да се представи като истинска изпъкнала комбинация на две различни точки от C.

С други думи, $\mathbf{x} \in C$ е връх на C, ако не е вътрешна точка за никоя отсечка с краища в C, т.е. представянето $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$, където $0 < \lambda < 1$ и $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C$, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ е невъзможно.

Например, върхове на един триъгълник са върховете му, върхове на евклидовото единично кълбо $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leqslant 1\}$ са точките от единичната сфера $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\}$, а правата и полуравнината са изпъкнали множества, които нямат върхове.

Като обобщение на Дефиниция 3.1 за k-точки получаваме

Дефиниция 3.4. *Изпъкнала комбинация* на k точки $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ се нарича точка от вида

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}_i, \quad \text{където } \lambda_i \geqslant 0 \text{ за всяко } i = 1, \dots, k, \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\,.$$

Да забележим, че в една изпъкнала комбинация теглата са неотрицателни и сумата им е равна на 1.

Множеството от всички изпъкнали комбинации на k точки $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ се нарича тяхна *изпъкнала обвивка*, означава се с $\operatorname{co}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ и е най-малкото изпъкнало множество, което ги съдържа. Например, изпъкналата обвивка на две точки е отсечката, която ги съединява, изпъкналата обвивка на три точки в общо положение е триъгълникът с върхове в тях, на четири — образуваната от тях пирамида, и т. н.

Симплекс с размерност k се нарича изпъкналата обвивка $k+1$ точки $\operatorname{co}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$, такива че векторите $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0$ са линейно независими.

Твърдение 3.1. *Ако $C_1, \dots, C_k$ са изпъкнали множества в $\mathbb{R}^n$, то тяхното сечение $C := \bigcap_{i=1}^{k} C_i$ също е изпъкнало множество.*

Доказателство. Ако C е празното множество или е едноточково, то няма какво да доказваме. Да вземем две произволни точки $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in C$ и произволно число $\lambda \in [0, 1]$ и да образуваме изпъкналата им комбинация $\lambda\mathbf{x}' + (1-\lambda)\mathbf{x}''$. Ако покажем, че тя принадлежи на C, твърдението ще бъде доказано. Да фиксираме индекс i в множеството $\{1, \dots, k\}$. От това, че $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in C_i$, което е изпъкнало, следва, че $\lambda\mathbf{x}' + (1-\lambda)\mathbf{x}'' \in C_i$. Тъй като това е вярно за всяко i в множеството $\{1, \dots, k\}$ имаме, че $\lambda\mathbf{x}' + (1-\lambda)\mathbf{x}'' \in \bigcap_{i=1}^{k} C_i = C$. □

§3.2. Многостенно множество. Изпъкналост. Канонично многостенно множество

Дефиниция 3.5. Множество от точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, които са решения на някакво линейно уравнение $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = b$, където $\mathbf{a}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ е ненулев вектор, а $b \in \mathbb{R}$ е реално число, се нарича *хиперравнина* и се означава с $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = b\}$. Векторът $\mathbf{a}$ се нарича *нормален вектор* на H.

При $n = 2$ хиперравнината е права, при $n = 3$ хиперравнината е равнина и т. н.

Дефиниция 3.6. Множество от точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, които са решения на някакво линейно неравенство $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \geqslant b$, където $\mathbf{a}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ е ненулев вектор, а $b \in \mathbb{R}$ е реално число, се нарича *затворено полупространство* и се означава с $H^{+} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \geqslant b\}$.

Всяка хиперравнина $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = b\}$ определя затворените полупространства $H^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \geqslant b\}$ и $H^- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leqslant b\}$.

Дефиниция 3.7. *Многостенно множество* $P \subset \mathbb{R}^n$ наричаме множество, образувано от пресичането на краен брой затворени полупространства и хиперравнини. Ако многостенно множество е непразно и ограничено, то се нарича *многостен*.

Твърдение 3.2. *Многостенно множество $P \subset \mathbb{R}^n$ е изпъкнало.*

Доказателство. Лесно се доказва, че хиперравнините и затворените полупространства са изпъкнали множества. Като сечение на изпъкнали множества P е изпъкнало съгласно Твърдение 3.1. □

Следствие 3.1. *Канонично множество $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$ е многостенно множество.*

Доказателство. Множеството M представлява сечение на m-те хиперравнини, определени от уравненията

$$\mathbf{a}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = b_1, \ \ldots, \ \mathbf{a}_m^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = b_m$$

и на n-те затворените полупространства, определени от неравенствата

$$\mathbf{e}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \geqslant 0, \ \ldots, \ \mathbf{e}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \geqslant 0,$$

където $\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}$ е i-ят вектор-ред на матрицата $\mathbf{A}$, а $\mathbf{e}_i^{\mathrm{T}}$ е i-ят вектор-ред на единичната матрица от ред n. □

Множество M ще наричаме още *канонично многостенно множество.*

Следствие 3.2. *Канонично множество M е изпъкнало множество.*

Доказателство. Непосредствено от Следствие 3.1 и Твърдение 3.2. □

§3.3. Как да разпознаем точките в канонично множество M, които не са негови върхове

От оптимизационна гледна точка върховете на канонично множество M са важни негови елементи, защото (както ще покажем по-късно в Теорема 5.2) ако каноничната задача (K) е разрешима, то сред решенията ѝ има такова, което е връх на допустимото ѝ множество M.

Нека е дадено канонично множество $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$. Нека е дадена и точка $\mathbf{x} \in M$.

Ще покажем, че ако съответните на положителните координати на $\mathbf{x}$ вектор-стълбове на $\mathbf{A}$ са в линейна зависимост, то коефициентите на линейната комбинация са координати на ненулев вектор $\mathbf{z}$, такъв че тръгвайки от $\mathbf{x}$ можем да се придвижваме донякъде както по посока на $\mathbf{z}$ така и по посока на $-\mathbf{z}$ без да напускаме множеството M. Очевидно, в този случай $\mathbf{x}$ ще бъде във вътрешността на отсечка с краища в M и няма да бъде връх на M.

Лема 3.1. *Нека* $\mathbf{x} \in M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$. *Ако вектор-стълбовете на матрицата* $\mathbf{A}$ *съответстващи на положителните координати на* $\mathbf{x}$ *са линейно зависими, то съществува ненулев вектор* $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ *и числа* $t^- < 0 < t^+$, *такива че*

1. $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{0}$;
2. $z_i = 0$ *ако* $x_i = 0$;
3. *векторът* $\mathbf{x} + t\mathbf{z} \in M$ *за всяко* $t \in [t^-, t^+]$

и $\mathbf{x}$ *не е връх на* M.

Доказателство. Да означим вектор-стълбовете на матрицата $\mathbf{A}$ с $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$.

Да допуснем, че първите p координати на $\mathbf{x}$ са положителни, а последните $n-p$ са нули, т.е. $\mathbf{x}(x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$ като $x_j > 0$, $j = 1, \dots, p$, което винаги можем да постигнем с преномериране на променливите.

От линейната зависимост на $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_p$, следва че съществуват числа $z_1, \dots z_p$ не всичките равни на нула и такива, че $\sum_{j=1}^{p} z_j \mathbf{A}_j = \mathbf{0}$. Нека означим $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_p, 0, \dots 0) \in \mathbb{R}^n$. Да разгледаме векторите $\mathbf{x} + t\mathbf{z}$, където t е реално число.

Да забележим, че

$$\mathbf{A}\mathbf{z} = \sum_{j=1}^{n} z_j \mathbf{A}_j = \sum_{j=1}^{p} z_j \mathbf{A}_j = \mathbf{0}, \tag{3.1}$$

откъдето за всяко $t \in \mathbb{R}$ е изпълнено $\mathbf{A}(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + t\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Следователно, $\mathbf{x} + t\mathbf{z} \in M$ точно тогава, когато $\mathbf{x} + t\mathbf{z} \geqslant \mathbf{0}$.

Векторът $\mathbf{x} + t\mathbf{z} \geqslant \mathbf{0}$ тогава и само тогава, когато $x_i + tz_i \geqslant 0$ за $i = 1, \dots, p$, т.е. $t \geqslant -\frac{x_i}{z_i}$ за всяко i, такова че $z_i > 0$ и $t \leqslant -\frac{x_i}{z_i}$ за всяко i, такова че $z_i < 0$.

Полагаме $t^- := \max\limits_{i:z_i>0} -\dfrac{x_i}{z_i}$, а ако няма i, такива че $z_i > 0$, полагаме $t^- := -\infty$. Аналогично, полагаме $t^+ := \min\limits_{i:z_i<0} -\dfrac{x_i}{z_i}$, а ако няма i, такива че $z_i < 0$, полагаме $t^+ := +\infty$. Тогава $t^- < 0 < t^+$ като поне едно от двете числа е крайно ($\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$) и за всяко $t \in [t^-, t^+]$ е изпълнено $\mathbf{x} + t\mathbf{z} \in M$. □

Възниква логичният въпрос: след като от линейната зависимост на вектор-стълбовете на матрицата $\mathbf{A}$ съответстващи на положителните координати на вектор $\mathbf{x} \in M$ следва, че $\mathbf{x}$ не е връх на M можем ли да твърдим че от линейната независимост на вектор-стълбовете на матрицата $\mathbf{A}$ съответстващи на положителните координати на вектор $\mathbf{x} \in M$ следва, че $\mathbf{x}$ е връх на M? Положителният отговор на този въпрос дава

§3.4. Алгебрична характеризация на върховете на M

Теорема 3.1 (алгебрична характеризация на върховете на M). *Точка $\mathbf{x} \in M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$ е връх на M тогава и само тогава, когато вектор-стълбовете на матрицата $\mathbf{A}$, съответстващи на положителните координати на $\mathbf{x}$, са линейно независими.*

Доказателство. Да фиксираме $\mathbf{x} \in M$ като допуснем, че първите p координати на $\mathbf{x}$ са положителни, а последните $n - p$ са нули, т.е. $\mathbf{x}(x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$ като $x_j > 0$, $j = 1, \dots, p$.

Ако $p = 0$, т.е. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, то очевидно $\mathbf{x}$ е връх на M, защото ако допуснем че $\mathbf{0} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2$ за някое $\lambda \in (0, 1)$ и някои $\mathbf{x}_1 \geqslant \mathbf{0}$ и $\mathbf{x}_2 \geqslant \mathbf{0}$ от M, то това води до $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$.

Нека $p > 0$ и $\mathbf{x}$ е връх на M. Трябва да докажем, че векторите $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_p$ са линейно независими. Допускаме противното. Прилагаме Лема 3.1 и получаваме ненулев вектор $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_p, 0, \dots 0)$ и числа $t^- < 0 < t^+$, такива че $\mathbf{x} + t\mathbf{z} \in M$ за всяко $t \in [t^-, t^+]$. Да фиксираме $t > 0$, такова че t и $-t$ да бъдат в интервала $[t^-, t^+]$. Тогава точките $\mathbf{x}_1 := \mathbf{x} + t\mathbf{z}$ и $\mathbf{x}_2 := \mathbf{x} - t\mathbf{z}$ са в M, като $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, защото $t > 0$ и $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. Като вземем средата на отсечката с краища $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$, получаваме

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - t\mathbf{z}) = \mathbf{x},$$

т.е. $\mathbf{x}$ е истинска изпъкнала комбинация на две различни точки $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ от M, което е в противоречие с това, че $\mathbf{x}$ е връх на M. Полученото противоречие показва, че ако точката $\mathbf{x}$ е връх та M, то стълбовете на $\mathbf{A}$, съответстващи на положителните ѝ координати са линейно независими.

Обратно, нека сега стълбовете $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_p$ са линейно независими. Трябва да покажем, че $\mathbf{x}$ е връх на M.

Да допуснем, че $\mathbf{x}$ не е връх на M. Това означава, че $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2$ за някои $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in M$, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ и някое $0 < \lambda < 1$. Тъй като и двете точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}_1$ са в M, $\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Тъй като двете числа λ и $1 - \lambda$ са положителни и последните $n - p$ координати на $\mathbf{x}$ са равни на нула, то последните $n - p$ координати на $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ също са равни на нула. Следователно последните $n - p$ координати на вектора $\mathbf{x} - \mathbf{x}_1$ са нули, а сред първите p има поне една ненулева (в противен случай $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$, което е невъзможно, тъй като $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$). Тогава $\mathbf{0} = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) = \sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{1j})\mathbf{A}_j = \sum_{j=1}^{p}(x_j - x_{1j})\mathbf{A}_j$, което означава, че стълбовете $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_p$ са линейно зависими.

Полученото противоречие показва, че ако вектор-стълбовете на $\mathbf{A}$, съответстващи на положителните координати на $\mathbf{x}$, са линейно независими, то $\mathbf{x}$ е връх на M. $\square$

§3.5. Базисни решения. Базисни допустими решения

Вече знаем, че върховете на M се характеризират с линейната независимост на вектор-стълбовете на матрицата $\mathbf{A}$, съответстващи на положителните им координати.

Да припомним, че максималният брой линейно независими вектор-стълбове на $m \times n$ матрица $\mathbf{A}$ се нарича *ранг* на $\mathbf{A}$ и се означава с $r(\mathbf{A})$. Рангът на $\mathbf{A}$ също така е равен на максималния брой линейно независими вектор-редове на $\mathbf{A}$, както и на реда на най-големия ненулев минор на $\mathbf{A}$. Казваме, че $\mathbf{A}$ има пълен ранг по редове, ако $r(\mathbf{A}) = m$. Очевидно в този случай $m \leqslant n$.

Когато $\mathbf{A}$ няма пълен ранг по редове, то

- или някои от уравненията в системата $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ са *излишни* (в смисъл, че са линейно зависими от останалите уравнения);

- или системата линейни уравнения $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ няма решение (и съответно M е празното множество).

Тези два случая зависят от съвместимостта на линейната зависимост на вектор-редовете на $\mathbf{A}$ и десните страни на уравненията.

Да означим с $\mathbf{a}_k^{\mathrm{T}}$, $k = 1, \ldots, m$ вектор-редовете на $\mathbf{A}$. Нека вектор-редът $\mathbf{a}_k^{\mathrm{T}}$ е в линейна зависимост от останалите вектор-редове на $\mathbf{A}$, т.е. за някои $\alpha_i \in \mathbb{R}$ не всички равни на нула е изпълнено $\mathbf{a}_k^{\mathrm{T}} = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant m, i \neq k} \alpha_i \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}$.

Ако $b_k \neq \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant m, i \neq k} \alpha_i b_i$, то системата $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ няма решение.

Ако $b_k = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant m, i \neq k} \alpha_i b_i$, то k-то уравнение е в линейна зависимост от останалите, следователно е излишно и може да се отстрани от системата.

След като едно по едно бъдат отстранени всички излишни уравнения, се достига до система от уравнения, чиято матрица е с пълен ранг по редове.

Без ограничение на общността, оттук нататък ще предполагаме, че матрицата $\mathbf{A}$ е с пълен ранг по редове. В този случай координатите на върховете на M се получават като *базисни решения* на линейната система $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Какво се разбира под базисно решение?

Тъй като $r(\mathbf{A}) = m$, то съществува поне една неособена подматрица от ред m на матрицата $\mathbf{A}$. Всяка такава подматрица се нарича *базисна матрица*.

Нека фиксираме базисна матрица $\mathbf{B}$. Означаваме с B множеството от индекси на стълбове на $\mathbf{A}$, които са стълбове на $\mathbf{B}$. Ако предположим, че $\mathbf{B}$ се състои от първите m стълба на $\mathbf{A}$ (винаги можем да го постигнем чрез преномериране на променливите), тогава $B = \{1, \dots, m\}$.

Матрицата $\mathbf{A}$ се разделя на две подматрици $\mathbf{A} = [\mathbf{B}|\mathbf{N}]$, където с $\mathbf{N}$ е означена подматрицата на $\mathbf{A}$, състояща се от останалите $n - m$ стълба. Съответно с N означаваме множеството от небазсните индекси, в случая $N = \{m + 1, \dots, n\}$.

m-те променливи, чиито индекси са базисни, т.е. x_j за $j \in B$ наричаме *базисни променливи* или *базис*, а останалите $n - m$ променливи, т.е. x_j за $j \in N$ наричаме *небазисни променливи.* Векторът на базисните променливи означаваме с $\mathbf{x}_B$, а векторът на небазисните променливи – с $\mathbf{x}_N$. Така произволен вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ се представя във вида $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix}$.

Нека сега векторът $\mathbf{x}$ е решение на системата $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Тогава

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{B}|\mathbf{N}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b}.$$

Тъй като $\mathbf{B}$ е неособена матрица, съществува матрицата $\mathbf{B}^{-1}$, с която умножаваме отляво преобразуваната система, за да получим

$$\mathbf{B}^{-1}\,|\, \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N. \tag{3.2}$$

Последното векторно равенство означава, че линейната система $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ е разрешена относно базисните променливи $\mathbf{x}_B$, т.е. че посредством (3.2) базисните координати $\mathbf{x}_B$ на решение $\mathbf{x}$ на системата се изразяват чрез небазисните му координати $\mathbf{x}_N$.

Казано с други думи, за всеки зададен набор от $n-m$ числени стойности на небазисните променливи $\mathbf{x}_N$ чрез (3.2) се пресмятат числените стойности на m-те базисни променливи $\mathbf{x}_B$ и така се получават n-те координати на едно частно решение $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix}$ на системата.

Ако зададем нулеви стойности на небазисните променливи, т.е. положим $\overline{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}$, от (3.2) за базисните променливи ще получим $\overline{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$. По този начин на всяка базисна матрица $\mathbf{B}$ (на всеки базис B) по единствен начин се съпоставя решение на системата $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ от вида $\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}_B \\ \overline{\mathbf{x}}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$.

Дефиниция 3.8. Нека $\mathbf{B}$ е базисна матрица, съставена от m (линейно независими) стълба на $\mathbf{A}$. Векторът $\overline{\mathbf{x}}$, чиито небазисни координати са нули (т.е. $\overline{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}$), а базисните му координати са $\overline{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ се нарича *базисно решение* с *базисна матрица* $\mathbf{B}$ (с *базис* B).

Терминът базис идва от това, че вектор-стълбовете на матрицата $\mathbf{B}$ образуват базис за линейното пространство, породено от вектор-стълбовете на $\mathbf{A}$, и на $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ може да се гледа като на представяне на вектора $\mathbf{b}$ като линейна комбинация на вектор-стълбовете на $\mathbf{A}$, чиито коефициенти са координатите на решение $\mathbf{x}$ на системата.

Дефиниция 3.9. Ако базисно решение $\overline{\mathbf{x}}$ с базис B е неотрицателно, т.е. ако $\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}_B \\ \overline{\mathbf{x}}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \geqslant \mathbf{0}$, то се нарича *базисно допустимо решение*, т.к. в този случай $\overline{\mathbf{x}} \in M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax}{=}\mathbf{b}, \mathbf{x}{\geqslant}\mathbf{0}\}$ и следователно $\overline{\mathbf{x}}$ е допустимо решение за каноничната задача (K).

Върховете на каноничното множество M са базисни допустими решения, както ще се убедим от следната

Теорема 3.2. *Ако каноничното множество* $M{=}\{\mathbf{x}{\in}\mathbb{R}^n : \mathbf{Ax}{=}\mathbf{b}, \mathbf{x}{\geqslant}\mathbf{0}\}$ *е непразно, следните твърдения са еквивалентни:*

(а) $\overline{\mathbf{x}}$ *е връх на* M*;*

(б) $\overline{\mathbf{x}}$ *е базисно допустимо решение.*

Доказателство. (а) $\Longrightarrow$ (б). От Теорема 3.1 следва линейната независимост на стълбовете на $\mathbf{A}$, съответстващи на положителните координати на $\overline{\mathbf{x}}$. Тъй като $r(\mathbf{A}) = m$ техният брой не надминава m и можем да ги допълним до базисна $m \times m$ матрица $\mathbf{B}$ на $\overline{\mathbf{x}}$ с някои от другите стълбове на $\mathbf{A}$.

(б) $\Longrightarrow$ (а). Нека $\overline{\mathbf{x}}$ е базисно допустимо решение с базисна матрица $\mathbf{B}$, т.е. $\overline{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}$, $\overline{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geqslant \mathbf{0}$. Положителните координати на $\overline{\mathbf{x}}$ са сред базисните му координати, чиито индекси, разбира се, са индекси на стълбове на $\mathbf{B}$, а те са линейно независими. От Теорема 3.1 следва, че $\overline{\mathbf{x}}$ е връх на M. □

Теорема 3.2 позволява по-нататък да използваме термините връх и базисно допустимо решение като синоними.

§3.6. Изродени и неизродени базисни допустими решения

Тъй като $r(\mathbf{A}) = m$, връх в M може да има най-много m на брой положителни координати. Правим разлика между върхове с точно m положителни координати и върхове с по-малко от m положителни координати.

Дефиниция 3.10. Базисно допустимо решение $\overline{\mathbf{x}}$ с базис B се нарича *неизродено*, ако $\overline{\mathbf{x}}_B > \mathbf{0}$, и *изродено* в противен случай. Тогава сред базисните му координати има такива с нулева стойност, които се наричат *базисни нули*.

Връх на M се нарича *неизроден*, ако съответното му базисно допустимо решение е неизродено и се нарича *изроден* в противен случай.

Знаем, че на всяка базисна матрица съответства точно едно базисно решение, което – ако е допустимо – е връх на M. Ако обаче връх на M има по-малко от m положителни координати, то той може да има няколко различни базиса (допълването до базисна матрица с останалите вектор-стълбове на $\mathbf{A}$ може да става по различни начини).

Възможно е изроден връх $\overline{\mathbf{x}}$ да има огромен брой базиси: ако $\overline{\mathbf{x}}$ има $p < m$ положителни координати, то $\overline{\mathbf{x}}$ може да има

$$\binom{n-p}{n-m} = \frac{(n-p)!}{(n-m)!(m-p)!}$$

различни базиса. Координатите на върха $\overline{\mathbf{x}}$ са едни и същи, но множествата от координати, означени като базисни и небазисни са различни.

Типичен пример за изроденост се получава в задачата за назначения. Каноничното множество от допустими решения

$$M_k = \left\{ x_{ij} : \sum_{j=1}^{k} x_{ij}=1, i=1,\dots,k; \sum_{i=1}^{k} x_{ij}=1, j=1,\dots,k; x_{ij}\geqslant 0, i,j=1,\dots,k \right\}$$

на тази задача има $k!$ върха, на всеки от които съответстват по $2^{k-1}k^{k-2}$ различни базиса. Следователно, при $k = 8$, всеки от 40 320-те върха на M_8 има по 33 554 432 различни базиса!

От Теорема 3.2 следва и изключително важният факт, че върховете на канонично множество са краен брой.

Следствие 3.3. *Канонично множество* $M = \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}, \mathbf{x}\geqslant\mathbf{0}\}$ *има само краен брой върхове.*

Доказателство. Тъй като на всеки връх съответства едно базисно допустимо решение, ако е неизроден и евентуално повече от едно базисно допустимо решение, ако е изроден, то

$$\#\{\text{върхове}\} \leqslant \#\{\text{базисни допустими решения}\}.$$

На всяка базисна матрица се съпоставя точно едно базисно решение, но то е допустимо само ако е с неотрицателни координати, откъдето

$$\#\{\text{базисни допустими решения}\} \leqslant \#\{\text{базисни матрици}\}.$$

Всяка базисна матрица се състои от m линейно независими базисни стълба, избрани сред n-те стълба на $\mathbf{A}$. Има краен брой начини, по които могат да бъдат избрани m от n елемента и той е $\binom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$. Следователно,

$$\#\{\text{базисни матрици}\} \leqslant \binom{n}{m}$$

и върховете на M са най-много $\binom{n}{m}$ на брой. □

§4. Канонично многостенно множество. Посоки. Теорема за представяне

Нека $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$ е канонично многостенно множество. Върховете на M са важни негови елементи, тъй като (както ще покажем в Следствие 4.2 по-долу), ако M е ограничено множество (т.е. M е многостен) произволна точка от M се представя като изпъкнала комбинация на върховете на M. Това означава, че ограниченото канонично множество може да бъде построено на базата на краен брой свои елементи (върховете му), като се вземат всичките им изпъкнали комбинации.

Когато каноничното множество е неограничено обаче, върховете му не са достатъчни за получаване на всичките му точки. В този случай за целта освен върховете на множеството са необходими и посоките в него.

§4.1. Посоки в канонично множество M. Алгебрична характеризация на посоките в M

Най-напред ще въведем термина посока за произволно множество.

Дефиниция 4.1. *Посока* в произволно множество $S \subset \mathbb{R}^n$ е ненулев вектор $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$, такъв че за всяка точка $\mathbf{x}_0 \in S$ лъчът $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mu\mathbf{d},\ \mu \geqslant 0\}$ лежи изцяло в S.

От Дефиниция 4.1 е ясно, че ако $\mathbf{d}$ е посока в множество S, то $\nu\mathbf{d}$ за $\nu > 0$ също е посока в S.

Едно множество $K \subset \mathbb{R}^n$ се нарича *конус с връх в* $\mathbf{0}$, ако за всяко $\mathbf{d} \in K$ в K се съдържа и $\nu\mathbf{d}$ за произволно $\nu > 0$.

Следователно множеството от всички посоки в S е конус с връх в началото $\mathbf{0}$ и поради това се нарича *конус на посоките в* S. Ако S е изпъкнало множество, то лесно се доказва, че и конусът на посоките в S е изпъкнало множество, т.е. е *изпъкнал конус*. Тъй като M е изпъкнало множество (вж. Следствие 3.2), то посоките в M са изпъкнал конус с връх в $\mathbf{0}$. Това може да се докаже и директно като се използва характеризацията на посоките в M, дадена в Теорема 4.1 по-долу.

Посоки в многостенното множество P, изобразено на фиг. 2.1 например са направляващите вектори $\mathbf{d}_1(-2, 1)$ и $\mathbf{d}_2(-3, 4)$ на неограничените ръбове на многоъгълника. Изпъкналият конус на посоките на това множество е $K := \{\mu_1(-2, 1) + \mu_2(-3, 4)\ :\ \mu_1 \geqslant 0, \mu_2 \geqslant 0\}$.

Изглежда очевидно, а и в Следствие 4.1 по-долу ще го докажем, че едно канонично множество M е неограничено тогава и само тогава, когато в M има посока. Следователно за канонични задачи, в които допустимото множество е неограничено, ще ни бъде необходима алгебрична характеризация на посоките в M.

Теорема 4.1 (алгебрична характеризиция на посоките в M). *Вектор $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ е посока в M тогава и само тогава, когато*

$$\mathbf{Ad} = \mathbf{0} \qquad \text{и} \qquad \mathbf{d} \geqslant \mathbf{0}\,.$$

Доказателство. Нека $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ е посока в M. За фиксирана точка $\mathbf{x}_0 \in M$ имаме, че $\mathbf{x}_0 + \mu\mathbf{d} \in M$ за всяко положително μ. Това означава че за всяко $\mu > 0$ е изпълнено $\mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \mu\mathbf{d}) = \mathbf{b}$ и тъй като $\mathbf{Ax}_0 = \mathbf{b}$, то $\mu\mathbf{Ad} = \mathbf{0}$, откъдето $\mathbf{Ad} = \mathbf{0}$. Ако допуснем, че сред координатите на $\mathbf{d}$ има отрицателна, за големи μ съответната ѝ координата на вектора $\mathbf{x}_0 + \mu\mathbf{d}$ също ще бъде отрицателна, което противоречи на това, че $\mathbf{x}_0 + \mu\mathbf{d} \in M$ и следователно има само неотрицателни координати.

Обратно, ако $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ удовлетворява условията на твърдението, то за произволна точка $\mathbf{x}_0 \in M$ имаме, че $\mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \mu\mathbf{d}) = \mathbf{Ax}_0 + \mu\mathbf{Ad} = \mathbf{Ax}_0 = \mathbf{b}$ и $\mathbf{x}_0 + \mu\mathbf{d} \geqslant \mathbf{0}$ за всяко неотрицателно μ. Съгласно Дефиниция 4.1, $\mathbf{d}$ е посока в M. $\square$

Използваме алгебричната характеризация на върховете (Теорема 3.1) и на посоките (Теорема 4.1) в канонично множество M, за да докажем

§4.2. Теорема за представяне на канонично множество M

Да означим с $V := \{\overline{\mathbf{x}}_i : i \in I\}$ множеството от върховете на M. Да обърнем внимание на това, че индексното множество I е крайно множество, тъй като съгласно Следствие 3.3 M има краен брой върхове.

Теорема 4.2 (за представяне). *Всяка точка $\mathbf{x} \in M$ може да се представи във вида*

$$\mathbf{x} = \sum_{i \in I} \lambda_i \overline{\mathbf{x}}_i + \mathbf{d}\,, \tag{4.1}$$

където $\lambda_i \geqslant 0$ за всички $i \in I$, $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ и $\mathbf{d}$ е посока в M или $\mathbf{d}$ е нулевият вектор.

Доказателство. Твърдението ще докажем с индукция по броя на положителните координати на точките в M.

Нека p_0 е най-малкият възможен брой положителни координати на точка в M.

Ще покажем, че всяка точка в M с p_0 положителни координати е връх на M.

Наистина, ако $p_0 = 0$, то нулевият вектор $\mathbf{0} \in M$. В този случай $\mathbf{0}$ е връх на M (вж. доказателството на Теорема 3.1).

Нека сега $p_0 > 0$ и да допуснем, че в M има точка $\mathbf{x}$ с p_0 положителни координати, която не е връх. Съгласно Теорема 3.1 вектор-стълбовете на $\mathbf{A}$, съответстващи на положителните ѝ координати са линейно зависими. Тогава, съгласно Лема 3.1 съществува вектор $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, такъв че $z_i = 0$ ако $x_i = 0$ и числа $t^- < 0 < t^+$, такива че $\mathbf{x} + t\mathbf{z} \in M$ за всяко $t \in [t^-, t^+]$ като поне единият край на интервала е краен. Нека t^- е крайно. Точката $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + t^-\mathbf{z}$ е точка от M, която обаче има поне още една нулева координата повече от $\mathbf{x}$ (ако $t^- = -x_r/z_r$, то $x_r \neq 0$, докато $x'_r = x_r + t^- z_r = x_r + \dfrac{-x_r}{z_r} z_r = 0$) а това е невъзможно съгласно дефиницията на p_0.

Представянето (4.1) очевидно е в сила за точки, които са върхове на M, тъй като ако $\mathbf{x}$ е връх, то $\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}}_i$ за някое $i \in I$.

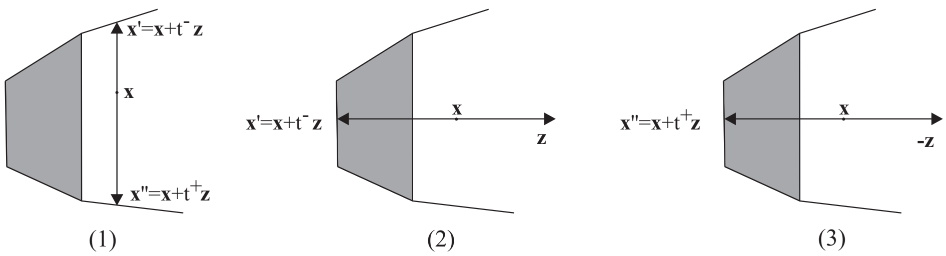
Следователно точките в M с минимален брой положителни координати имат представянето (4.1).

Да предположим, че точките в M с по-малко от p положителни координати имат представянето (4.1).

Да разгледаме точка $\mathbf{x} \in M$, която има точно p положителни координати.

Ако $\mathbf{x}$ е връх, казахме, че за него представянето е в сила. Ако $\mathbf{x}$ не е връх, то съгласно Теорема 3.1 вектор-стълбовете на $\mathbf{A}$, съответстващи на положителните му координати са линейно зависими. Тогава, съгласно Лема 3.1 съществува вектор $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, такъв че $z_i = 0$ ако $x_i = 0$, $\mathbf{Az} = \mathbf{0}$ и числа $t^- < 0 < t^+$, такива че $\mathbf{x} + t\mathbf{z} \in M$ за всяко $t \in [t^-, t^+]$.

Възможни три случая, илюстрирани на фиг. 4.4.



Фигура 4.4.

Случай 1. Векторът $\mathbf{z}$ има положителни и отрицателни координати. В този случай t^- и t^+ приемат крайни стойности. Точките $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + t^-\mathbf{z}$ и $\mathbf{x}'' = \mathbf{x} + t^+\mathbf{z}$ са точки от M, които лежат върху правата през $\mathbf{x}$, определена от $\mathbf{z}$, и имат поне още една нулева координата повече от $\mathbf{x}$. Следователно, $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$ са точки от M с по-малко от p положителни координати. Според индукционното предположение те имат желаното представяне

$$\mathbf{x}' = \sum_{i \in I} \lambda'_i \overline{\mathbf{x}}_i + \mathbf{d}', \text{ където } \lambda'_i \geqslant 0,\ i \in I,\ \sum_{i \in I} \lambda'_i = 1,\ \mathbf{d}' \geqslant \mathbf{0},\ \mathbf{Ad}' = \mathbf{0};$$

$$\mathbf{x}'' = \sum_{i \in I} \lambda''_i \overline{\mathbf{x}}_i + \mathbf{d}'', \text{ където } \lambda''_i \geqslant 0,\ i \in I,\ \sum_{i \in I} \lambda''_i = 1,\ \mathbf{d}'' \geqslant \mathbf{0},\ \mathbf{Ad}'' = \mathbf{0}.$$

Точката $\mathbf{x}$ лежи на отсечката с краища $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$ и следователно е тяхна изпъкнала комбинация, т.е. съществува $\lambda \in (0, 1)$, такова че

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}' + (1 - \lambda)\mathbf{x}''.$$

Стойността на λ намираме от

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}' + (1-\lambda)\mathbf{x}'' = \lambda(\mathbf{x} + t^-\mathbf{z}) + (1-\lambda)(\mathbf{x} + t^+\mathbf{z})$$
$$= \mathbf{x} + (\lambda t^- + (1-\lambda)t^+)\mathbf{z}.$$

Получаваме $(\lambda t^- + (1-\lambda)t^+)\mathbf{z} = \mathbf{0}$, но $\mathbf{z}$ е ненулев вектор и следователно $\lambda t^- + (1-\lambda)t^+ = 0$. Оттук намираме стойността на $\lambda = t^+/(t^+ - t^-)$.

Като отразим това, че точките $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$ имат желаното представяне,

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}' + (1-\lambda)\mathbf{x}'' = \lambda\left(\sum_{i\in I}\lambda_i'\overline{\mathbf{x}}_i + \mathbf{d}'\right) + (1-\lambda)\left(\sum_{i\in I}\lambda_i''\overline{\mathbf{x}}_i + \mathbf{d}''\right)$$
$$= \sum_{i\in I}\left(\lambda\lambda_i' + (1-\lambda)\lambda_i''\right)\overline{\mathbf{x}}_i + \lambda\mathbf{d}' + (1-\lambda)\mathbf{d}''$$

и като положим

$$\lambda_i := \lambda\lambda_i' + (1-\lambda)\lambda_i'' \quad \text{за всяко } i \in I \quad \text{и} \quad \mathbf{d} := \lambda\mathbf{d}' + (1-\lambda)\mathbf{d}''$$

получаваме, че

$$\mathbf{x} = \sum_{i\in I}\lambda_i\overline{\mathbf{x}}_i + \mathbf{d},$$

където

$$\lambda_i \geqslant 0 \text{ за } i \in I,$$
$$\sum_{i\in I}\lambda_i = \sum_{i\in I}(\lambda\lambda_i' + (1-\lambda)\lambda_i'') = \lambda\sum_{i\in I}\lambda_i' + (1-\lambda)\sum_{i\in I}\lambda_i'' = \lambda + (1-\lambda) = 1,$$
$$\mathbf{d} \geqslant \mathbf{0} \text{ и } \mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{d}' + (1-\lambda)\mathbf{d}'') = \lambda\mathbf{A}\mathbf{d}' + (1-\lambda)\mathbf{A}\mathbf{d}'' = \mathbf{0}.$$

От последното е ясно, че $\mathbf{d}$ е нулевият вектор или посока в M и следователно $\mathbf{x}$ има желаното представяне.

Случай 2. Векторът $\mathbf{z} \geqslant \mathbf{0}$. В този случай само t^- е крайно. Дефинираме $\mathbf{x}'$, както в случай 1. Точката $\mathbf{x}$ записваме като

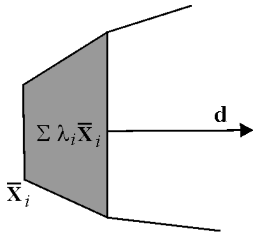
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + (-t^-)\mathbf{z}, \quad \text{където} \quad t^- < 0.$$

Тъй като според индукционното предположение $\mathbf{x}'$ има желаното представяне и тъй като $\mathbf{z}$ е посока в M (понеже $\mathbf{z} \geqslant \mathbf{0}$ и $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{0}$ от (3.1)), то очевидно $\mathbf{x}$ има представянето (4.1).

Случай 3. Векторът $\mathbf{z} \leqslant \mathbf{0}$. Доказателството е аналогично на това в случай 2, като заменим $\mathbf{x}'$, t^- и $\mathbf{z}$ съответно с $\mathbf{x}''$, t^+ и $-\mathbf{z}$. □

От Теоремата за представяне е ясно, че за представянето на произволен елемент от канонично множество M са необходими както изпъкналите комбинации на върховете на M, така и посоките в M, ако има такива (вж. фиг. 4.5).

Отговор на въпроса кога в M има посока дава



Фигура 4.5.

Следствие 4.1. *Непразно канонично множество M е неограничено тогава и само тогава, когато в M има посока.*

Доказателство. Нека в M има посока $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$. Тъй като $M \neq \emptyset$, в M има поне една точка $\mathbf{x}_0$. Съгласно дефиницията за посока, в M се съдържа и лъчът $\{\mathbf{x}_0 + \mu\mathbf{d},\ \mu \geqslant 0\}$, който е неограничено множество. Следователно M е неограничено множество.

Обратно, нека M е неограничено. Да допуснем, че в M няма посока. От Теоремата за представяне имаме, че произволен елемент $\mathbf{x} \in M$ се представя във вида

$$\mathbf{x} = \sum_{i \in I} \lambda_i \overline{\mathbf{x}}_i, \quad \text{където } \lambda_i \geqslant 0,\ i \in I \quad \text{и } \sum_{i \in I} \lambda_i = 1.$$

Да означим $k := \max_{i \in I} \|\overline{\mathbf{x}}_i\|$. Като максимум на краен брой числа константата k е добре дефинирана и от представянето на $\mathbf{x}$ имаме, че

$$\|\mathbf{x}\| = \left\| \sum_{i \in I} \lambda_i \overline{\mathbf{x}}_i \right\| \leqslant \sum_{i \in I} \lambda_i \|\overline{\mathbf{x}}_i\| \leqslant k \sum_{i \in I} \lambda_i = k,$$

което означава, че нормата на произволен вектор в M не надминава k, т.е. M се съдържа в кълбо с център $\mathbf{0}$ и радиус k, и следователно M е ограничено множество. Полученото противоречие доказва, че ако M е неограничено, в M има посока. □

Следствие 4.2. *Ако M е непразно и ограничено множество (т.е. M е многостен), то всяко $\mathbf{x} \in M$ се представя като изпъкнала комбинация на върховете на M.*

Доказателство. От Теоремата за представяне в представянето (4.1) на произволен елемент $\mathbf{x}$ на M ще имаме $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, тъй като M е ограничено и според Следствие 4.1 в M няма посока. □

§5. Основни теореми на линейното оптимиране

Разглеждаме каноничната задача на линейното оптимиране

$$
(K) \qquad \begin{array}{ll} \min & z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \\ & \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\,, \end{array}
$$

където $\mathbf{A}$ е $m \times n$ матрица, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m_+$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ е n-мерен вектор на променливите.

Ще докажем две теореми, които са в основата на разработването на алгоритми (и в частност на симплекс алгоритъма) за нейното решаване. Тези теореми разкриват значението, което върховете на допустимото множество на задачата $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$ имат за тези методи.

Теорема 5.1. *Ако M е непразно множество, то M има поне един връх.*

Доказателство. Тъй като $M \neq \emptyset$, то в M има поне една точка $\mathbf{x}$. Тя има представянето (4.1), доказано в Теорема 4.2. Ако допуснем, че множеството $V = \{\overline{\mathbf{x}}_i, i \in I\}$ от върховете на M е празно, то от Теоремата за представяне $\mathbf{x} = \mathbf{d}$, където $\mathbf{d} \geqslant \mathbf{0}$, $\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{0}$. Тъй като $\mathbf{x}$ е в M, то $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{0}$, т.е. $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$ и следователно нулевият вектор $\mathbf{0} \in M$. Но $\mathbf{0}$ е връх на M, откъдето получаваме противоречие с допускането, че множеството от върховете на M е празно. $\square$

Теорема 5.2. *Ако M е непразно множество, то или $z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ е неограничена отдолу върху M или минималната ѝ стойност за $\mathbf{x} \in M$ се достига във връх на M.*

Доказателство. Има два възможни случая:

Случай 1. В M има посока $\mathbf{d}$, която сключва тъп ъгъл с вектора на целевата функция $\mathbf{c}$, т.е. такава, че $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{d} < 0$.

В този случай M е неограничено множество и стойностите на $z \to -\infty$ по посоката $\mathbf{d}$. Наистина, ако вземем произволна точка $\mathbf{x}$ от непразното множество M, то по дефиницията за посока всички точки от лъча $\{\mathbf{x} + \mu\mathbf{d} \ : \ \mu \geqslant 0\}$ са в M. Стойностите на z върху този допустим лъч са $z(\mathbf{x} + \mu\mathbf{d}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x} + \mu\mathbf{d}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + \mu\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{d}$ и клонят към $-\infty$, когато $\mu \to +\infty$, поради това, че $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{d} < 0$.

Случай 2. За всички посоки $\mathbf{d}$ в M е изпълнено, че $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{d} \geqslant 0$.

Да вземем произволна точка $\mathbf{x} \in M$. Според Теоремата за представяне съществуват числа $\lambda_i \geqslant 0$ за $i \in I$, такива че $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i = 1$ и вектор $\mathbf{d}$, който е посока в M или $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, такива че

$$
\mathbf{x} = \sum_{i \in I} \lambda_i \overline{\mathbf{x}}_i + \mathbf{d}.
$$

За стойността на z в $\mathbf{x}$ имаме

$$\begin{aligned}
z(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\overline{\mathbf{x}}_i + \mathbf{d}\right) = \sum_{i\in I}\lambda_i\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{x}}_i + \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{d} \\
&\geqslant \sum_{i\in I}\lambda_i\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{x}}_i \geqslant \sum_{i\in I}\lambda_i \min_{i\in I}\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{x}}_i\} = \min_{i\in I}\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{x}}_i\}\sum_{i\in I}\lambda_i \\
&= \min_{i\in I}\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{x}}_i\} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{x}}_{i_0} = z(\overline{\mathbf{x}}_{i_0}),
\end{aligned}$$

което означава, че минимумът на z се достига във върха $\overline{\mathbf{x}}_{i_0}$ на M. □

Този резултат стои в основата на решаването на линейни задачи. Той показва, че ако в M има посока $\mathbf{d}$, която сключва тъп ъгъл с вектора на целевата функция $\mathbf{c}$, задачата (K) е неограничена, а в противен случай като кандидати за оптимално решение е достатъчно да бъдат разглеждани само върховете на M.

§6. Симплекс метод

От Теорема 5.2 е ясно, че като кандидати за оптимално решение на каноничната задача

$$(K) \qquad \begin{aligned} \min \quad & z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \\ & \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\,, \end{aligned}$$

е достатъчно да разгледаме само върховете на допустимото ѝ множество $M = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$. За големи стойности на m и n намирането на всички върхове на M е непрактично, тъй като M може да има $\binom{n}{m}$ на брой върхове, а $\binom{n}{m}$ расте много бързо при нарастването на n и m. Следователно за решаването на (K) е необходим по-систематичен подход. Такъв подход прилага симплекс методът, разработен от Джордж Данциг през 1947 г. На практика симплекс методът се оказва толкова успешен, че и до момента е един от най-известните и най-широко използваните методи за компютърно реализиране на числените пресмятания при решаване на линейни задачи.

За начало ще изложим идеята на симплекс метода, която има ясна геометрична мотивация.

§6.1. Описание на симплекс метода (СМ)

Симплекс методът има две фази.

Първата фаза (фаза I) или установява, че допустимото множество M е празно, или намира връх на M (Теорема 5.1 гарантира съществуването на поне един връх, ако M е непразно множество). Намереният връх служи за начало на втората фаза на метода и поради това се нарича още *начален връх*.

Втората фаза (фаза II) е същинската част на метода. Намирайки се в текущия връх $\overline{\mathbf{x}}$, методът търси ръб на M, излизащ от $\overline{\mathbf{x}}$, по който целевата функция z намалява.

Ако СМ установи, че по всички ръбове на M, излизащи от върха $\overline{\mathbf{x}}$, целевата функция z нараства, то $\overline{\mathbf{x}}$ е оптимално решение.

Ако СМ намери неограничен ръб на намаляване, то задачата (K) е неограничена.

Ако СМ намери ограничен ръб на намаляване, той отива в другия му край, който е връх $\overline{\mathbf{x}}'$ на M, в който обаче z приема по-малка стойност, т.е. $z(\overline{\mathbf{x}}') < z(\overline{\mathbf{x}})$.

По този начин, започвайки от началния връх, методът се движи от връх на връх по ръбовете на M, като движението се извършва само по ръбове, по които целевата функция z намалява. Следователно ако методът напусне даден връх, той никога не се връща в него и след краен брой итерации (тъй като според Следствие 3.3 M има краен брой върхове) или се достига до връх на M, който е оптимално решение на задачата (K), или се достига до неограничен ръб в допустимото множество M, по който целевата функция z намалява неограничено.

По-нататък целта ни е да намерим съответната алгебрична форма на горното просто геометрично описание на симплекс метода.

Най-напред ще разгледаме същинската фаза на СМ — фаза II, която намира оптимално решение, като предположим, че фаза I вече е намерила начален връх. Както ще се убедим в § 7.2, симплекс методът успешно може да бъде приложен и за решаването на задачата на фаза I – намирането на началния връх.

Предполагаме, че вектор-редовете на матрицата A са линейно независими, т.е. че $r(\mathbf{A}) = m$ и че $m < n$.

За да опишем една итерация на симплекс метода, да предположим, че $\overline{\mathbf{x}}$ е текущият връх. Нека базисната му матрица $\mathbf{B}$ се състои от първите m вектор-стълба на $\mathbf{A}$, т.е. базисът е $B = \{1, \ldots, m\}$, а множеството от небазисни индекси е $N = \{m+1, \ldots, n\}$. С направените означения, върхът $\overline{\mathbf{x}}$ на M е $\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}_B \\ \overline{\mathbf{x}}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \geqslant \mathbf{0}$.

§6.2. Базисно представяне на задачата (K) спрямо базиса B

Нека $\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}_B \\ \overline{\mathbf{x}}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \geqslant \mathbf{0}$ е връх на M с базис B. Задачата (K) се представя в *базисен вид спрямо базиса* B по следния начин:

1. Изразяваме базисните координати $\mathbf{x}_B$ на решение $\mathbf{x}$ на системата $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ чрез небазисните му координати $\mathbf{x}_N$ (както в § 3.3)

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{B}|\mathbf{N}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{B}^{-1}|\mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \quad \Leftrightarrow$$
$$\mathbf{x}_B = \overline{\mathbf{x}}_B - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N.$$

Така за произволно решение $\mathbf{x}$ на системата $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ получаваме представянето

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}_B - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N \\ \overline{\mathbf{x}}_N + \mathbf{I}\mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}_B \\ \overline{\mathbf{x}}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}_N =$$

$$\overline{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}_N,$$

като с $\mathbf{I}$ е означена единичната матрица от ред $n - m$.

Нека за всеки небазисен индекс $j \in N$ (т.е. за $j > m$) означим с $\mathbf{d}_j$ съответния стълб на матрицата $\begin{bmatrix} -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$, т.е.

$$\mathbf{d}_j := \begin{bmatrix} -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j \\ \mathbf{e}_j \end{bmatrix}, \tag{6.1}$$

където $\mathbf{A}_j$ е j-ият стълб на матрицата $\mathbf{A}$, а $\mathbf{e}_j$ е $(n-m)$-мерен вектор, чиято $(j-m)$-та координата е 1, а останалите му координати са нули. След въведеното означение $\begin{bmatrix} -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}_N = \sum_{j \in N} x_j \mathbf{d}_j$ и

$$\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}} + \sum_{j \in N} x_j \mathbf{d}_j. \tag{6.2}$$

2. Като използваме представянето (6.2) на решение $\mathbf{x}$ на системата, за стойността на целевата функция z в $\mathbf{x}$ получаваме

$$z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \left(\overline{\mathbf{x}} + \sum_{j \in N} x_j \mathbf{d}_j \right) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{x}} + \sum_{j \in N} x_j \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \mathbf{d}_j.$$

Нека за всеки небазисен индекс $j \in N$ означим с $\overline{c}_j$ скаларното произведение $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{d}_j$. Имаме

$$\overline{c}_j = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{d}_j = [\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}, \mathbf{c}_N^{\mathrm{T}}] \begin{bmatrix} -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j \\ \mathbf{e}_j \end{bmatrix} = c_j - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j.$$

Ако използваме същата формула, за да пресметнем $\overline{c}_i$ за базисен индекс $i \in B$, получаваме

$$\overline{c}_i = c_i - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_i = c_i - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{e}_i = c_i - c_i = 0.$$

За всеки индекс $j \in \{1, \dots, n\}$ така полученото число $\overline{c}_j$ се нарича *относителна оценка* или още *редуцирана цена* на променливата x_j спрямо базиса B. Векторът $\overline{\mathbf{c}}^{\mathrm{T}} = [\overline{\mathbf{c}}_B^{\mathrm{T}}, \overline{\mathbf{c}}_N^{\mathrm{T}}] = [\mathbf{0}^{\mathrm{T}}, \overline{\mathbf{c}}_N^{\mathrm{T}}]$, чиито координати са относителните оценки на променливите спрямо базиса B, се нарича *вектор на относителните оценки спрямо базиса* B. Да забележим, че относителните оценки на базисните променливи са нули.

След направеното полагане имаме

$$z(\mathbf{x}) = z(\overline{\mathbf{x}}) + \sum_{j \in N} \overline{c}_j x_j.$$

3. Като отразим направените в 1 и 2 преобразувания и полагания в задачата (K), получаваме еквивалентната на нея задача

$$(K_B) \qquad \begin{aligned} &\min z(\mathbf{x}) = z(\overline{\mathbf{x}}) + \sum_{j\in N} \overline{c}_j x_j \\ &\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}} + \sum_{j\in N} x_j \mathbf{d}_j \\ &\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \end{aligned}$$

в която решенията на системата и стойностите на целевата функция в тях са изразени само посредством небазисните променливи x_j, $j \in N$.

Представянето на задачата (K) във вида (K_B) наричаме *базисно представяне спрямо базиса* B.

§6.3. Какво представляват векторите $\mathbf{d}_j$ и числата $\overline{c}_j$ в базисния вид на (K)

Казахме че, намирайки се в текущия връх $\overline{\mathbf{x}}$, симплекс методът решава по кой от ръбовете на допустимото множество M, излизащи от $\overline{\mathbf{x}}$, да тръгне. При направените предположения $M \neq \emptyset$, $rank\mathbf{A} = m$, от всеки връх на M излизат точно $n-m$ ръба (размерността на M е $n-m$).

Знаем, че върхът $\overline{\mathbf{x}}$ на M се получава като сечение на m-те хиперравнини, определени с уравненията

$$\mathbf{a}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = b_1, \ldots, \mathbf{a}_m^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = b_m, \tag{6.3}$$

и $(n-m)$-те хиперравнини, определени с уравненията

$$\mathbf{e}_{m+1}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = 0, \ldots, \mathbf{e}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = 0, \tag{6.4}$$

които се удовлетворяват от $\overline{\mathbf{x}}$ поради това, че $(n-m)$-те му небазисни координати са равни на нула.

Да разгледаме матрицата

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{N} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

чиито вектор-редове са нормалните вектори на тези n хиперравнини. Тъй като $\mathbf{B}$ е неособена матрица, редовете на матрицата $\mathbf{M}$ са линейно независими и следователно $\mathbf{M}$ също е неособена.

Следователно, върхът $\overline{\mathbf{x}}$ е единствената точка в сечението на n-те линейно независими хиперравнини (6.3) и (6.4) и $\overline{\mathbf{x}} \in M$.

Всеки ръб на M, излизащ от $\overline{\mathbf{x}}$ се получава като сечение на M с m-те хиперравнини (6.3) и $n-m-1$ от хиперравнините (6.4) – (общо $n-1$ хиперравнини). Сечението на $(n-1)$-те линейно независими хиперравнини е права през $\overline{\mathbf{x}}$, а сечението на правата с изпъкналото множество

M може да е точката $\overline{\mathbf{x}}$, отсечка или лъч (не е възможно сечението да е цялата права, защото в този случай $\overline{\mathbf{x}}$ няма да бъде връх). Ако сечението е само точката $\overline{\mathbf{x}}$, имаме *фиктивен ръб*, в противен случай ръбът е *действителен* като ако е отсечка е *ограничен ръб*, а ако е лъч е *неограничен ръб*, излизащ от $\overline{\mathbf{x}}$.

Базисът B определя $n - m$ ръба, излизащи от $\overline{\mathbf{x}}$. Тези ръбове се представят във вида

$$\{\overline{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}_j, t \geqslant 0\} \subset M, \quad \mathbf{d}_j = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j \\ \mathbf{e}_j \end{bmatrix}, \ j \in N,$$

т.е. векторите $\mathbf{d}_j$, $j \in N$ от базисния вид на задачата (K_B) са направляващи вектори по ръбовете, излизащи от $\overline{\mathbf{x}}$. За да се убедим в това да пресметнем за $q \in N$

$$\text{(6.5)} \quad \mathbf{M}\mathbf{d}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{N} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_q \\ \mathbf{e}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_q + \mathbf{A}_q \\ \mathbf{e}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_q \end{bmatrix},$$

което означава, че векторът $\mathbf{d}_q$ е ортогонален на нормалните вектори на хиперравнините (6.3) и (6.4) с изключение на хиперравнината $\mathbf{e}_q^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = 0$, т.е. векторът $\mathbf{d}_q$ лежи на правата, която е сечение на тези $n-1$ линейно независими хиперравнини.

Остава да видим кои са допустимите точки от тази права, т.е. да фиксираме $q \in \mathbf{N}$ и да разгледаме точките от вида

$$\text{(6.6)} \qquad \mathbf{x}(t) = \overline{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}_q,$$

където t е реален параметър. Съгласно (6.5) $\mathbf{A}\mathbf{d}_q = \mathbf{0}$ и

$$\text{(6.7)} \qquad \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\overline{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}_q) = \mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} + t\mathbf{A}\mathbf{d}_q = \mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$$

т.е. за произволно реално число t векторът $\mathbf{x}(t)$ е решение на системата $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Следователно, допустимостта на $\mathbf{x}(t)$ е еквивалентна не неотрицателността на неговите координати. Да положим

$$\text{(6.8)} \qquad \mathbf{w}_q := \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_q$$

и да изразим координатите на

$$\text{(6.9)} \quad \mathbf{x}(t) = \overline{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}_q = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}_B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_q \\ \mathbf{e}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}_B - t\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_q \\ t\mathbf{e}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}_B - t\mathbf{w}_q \\ t\mathbf{e}_q \end{bmatrix}.$$

Векторът $\mathbf{x}(t) \geqslant \mathbf{0}$ ако $\overline{\mathbf{x}}_B - t\mathbf{w}_q \geqslant \mathbf{0}$ и ако $t\mathbf{e}_q \geqslant \mathbf{0}$. Второто векторно неравенство води до $t \geqslant 0$ поради $\mathbf{e}_q \geqslant \mathbf{0}$. Първото векторно неравенство е еквивалентно на системата от m числови неравенства $\overline{x}_i - tw_{iq} \geqslant 0$, $i \in B$, където с w_{iq} е означена i-та координата на вектора $\mathbf{w}_q$. Ако $w_{iq} \leqslant 0$ неравенството е очевидно е в сила, а ако $w_{iq} > 0$ трябва $t \leqslant \frac{\overline{x}_i}{w_{iq}}$.

Ако векторът $\mathbf{w}_q$ има положителни координати от *теста за минимално отношение* определяме

$$\bar{t} := \min\left\{ \frac{\overline{x}_i}{w_{iq}} : \ w_{iq} > 0, i \in B \right\},$$

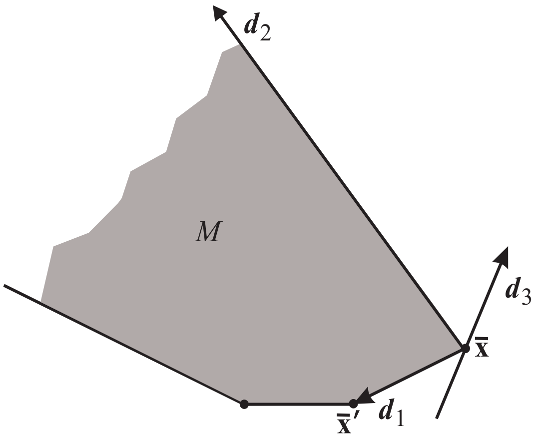
а ако векторът $\mathbf{w}_q$ няма положителни координати полагаме $\bar{t} = +\infty$. За всяко $t \in [0, \bar{t}]$ имаме, че $\mathbf{x}(t) \geqslant \mathbf{0}$, което е достатъчно за $\mathbf{x}(t) \in M$.

Ако $\mathbf{w}_q \leqslant \mathbf{0}$, то $\bar{t} = +\infty$ и ръбът с направление $\mathbf{d}_q$ е неограничен. В този случай $\mathbf{d}_q \geqslant \mathbf{0}$, $\mathbf{A}\mathbf{d}_q = \mathbf{0}$ и $\mathbf{d}_q$ е посока в M.

Ако $\mathbf{w}_q$ има положителна координата, има две възможности: или $\bar{t} > 0$ и ръбът с направление $\mathbf{d}_q$ е ограничен, като другият му край е $\mathbf{x}(\bar{t})$, или $\bar{t} = 0$, което означава че $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(0)$ е единствената допустима точка, т.е. ръбът с направление $\mathbf{d}_q$ е фиктивен.

Да отбележим, че ако $\overline{\mathbf{x}}$ е неизродено базисно допустимо решение (т.е. $\overline{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} > \mathbf{0}$), то всеки от ръбовете с направления $\mathbf{d}_j$, $j \in N$ е действителен. Наистина, в този случай по всяко направление $\mathbf{d}_q$ или $\bar{t} = +\infty$ и имаме неограничен ръб или $\bar{t} > 0$ като минимум на краен брой положителни числа (напомняме, че $\overline{x}_i > 0$ за всяко $i \in B$) и имаме ограничен ръб.

Ако $\overline{\mathbf{x}}$ е изроден връх обаче, възможно е някой от векторите $\mathbf{d}_q$ да определя фиктивен ръб: $\mathbf{d}_q$ определя фиктивен ръб, излизащ от $\overline{\mathbf{x}}$, ако за някой базисен индекс $i \in B$ базисната координата $\overline{x}_i = 0$ като същевременно $w_{iq} > 0$: в този случай $\bar{t} = 0$ и $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(0)$ е единствената допустима точка от вида $\overline{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}_q$.



Фигура 6.6.

На фигура 6.6 векторът $\mathbf{d}_1$ определя действителен ограничен ръб на M, излизащ от върха $\overline{\mathbf{x}}$, другият край на който е върхът $\overline{\mathbf{x}}'$, векторът $\mathbf{d}_2$ определя действителен неограничен ръб на M, излизащ от $\overline{\mathbf{x}}$, докато векторът $\mathbf{d}_3$ определя фиктивен ръб.

Както вече казахме, симплекс методът търси сред ръбовете, излизащи от $\overline{\mathbf{x}}$ такъв, по който целевата функция z намалява. От вида (6.9) на $\mathbf{x}(t)$ е ясно, че движението по ръба с направление $\mathbf{d}_q$ е еквивалентно на увеличаване на стойностите на небазисната променлива x_q, докато стойностите на всички останали небазисни променливи остават фиксирани на нула.

Как се изменя при това движение стойността на целевата функция z? От базисния вид (K_B) на задачата спрямо базиса B на $\overline{\mathbf{x}}$ следва, че за векторите от ръба с направление $\mathbf{d}_q$ ще имаме

$$z(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(\overline{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}_q) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{x}} + t\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{d}_q = z(\overline{\mathbf{x}}) + t\overline{c}_q\,,$$

откъдето е ясно как би се изменила целевата функция, ако симплекс методът тръгне по ръба $\mathbf{d}_q$ (т.е. започне да увеличава небазисната променлива x_q):

- ако $\overline{c}_q < 0$, градиентът $\mathbf{c}$ на целевата функция z сключва тъп ъгъл с направлението $\mathbf{d}_q$ на ръба и z ще намалява при движение по този ръб;
- ако $\overline{c}_q > 0$, $\mathbf{c}$ сключва остър ъгъл с $\mathbf{d}_q$ и z ще нараства при движение по този ръб;
- ако $\overline{c}_q = 0$, $\mathbf{c}$ е ортогонален на $\mathbf{d}_q$ и стойностите на z не се изменят при движение по този ръб.

Това изяснява ролята на относителните оценки: относителната оценка $\overline{c}_q$ оценява небазисната променлива x_q спрямо базиса B — дали, намирайки се в базисното допустимо решение $\overline{\mathbf{x}}$ с базис B, увеличаването на небазисната променлива x_q ще доведе до намаляване или до увеличаване на целевата функция.

§6.4. Критерий за оптималност на текущото базисно допустимо решение $\overline{\mathbf{x}}$

От казаното дотук и от базисния вид на задачата (K_B) получаваме

Теорема 6.1. (Критерий за оптималност). *Ако за всички $j \in N$ относителните оценки $\overline{c}_j \geqslant 0$, то базисното допустимо решение $\overline{\mathbf{x}}$ е оптимално решение на каноничната задача (K).*

Доказателство. За произволно допустимо $\mathbf{x} \in M$ от базисния вид на задачата (K_B) имаме, че $\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}} + \sum\limits_{j\in N} x_j\mathbf{d}_j$ и че $x_j \geqslant 0$ за $j \in N$. Стойността на целевата функция z в $\mathbf{x}$ е

$$z(\mathbf{x}) = z(\overline{\mathbf{x}}) + \sum_{j\in N} \overline{c}_j x_j. \tag{6.10}$$

Тъй като $x_j \geqslant 0$ за $j \in N$, ако всички относителни оценки $\overline{c}_j \geqslant 0$ за $j \in N$, то сумата в (6.10) ще има неотрицателна стойност и следователно $z(\mathbf{x}) \geqslant z(\overline{\mathbf{x}})$ за произволно $\mathbf{x} \in M$, което означава, че $\overline{\mathbf{x}}$ е оптимално решение на (K). □

Вярно ли е обратното твърдение? Ако $\overline{\mathbf{x}}$ е неизродено оптимално базисно допустимо решение, то $\overline{c}_j \geqslant 0$ за всеки индекс $j \in N$. Ако $\overline{\mathbf{x}}$

обаче е изродено оптимално базисно допустимо решение е възможно $\overline{c}_q < 0$ за някое $q \in N$ — ако ръбът с направление $\mathbf{d}_q$ е фиктивен ръб през $\overline{\mathbf{x}}$.

Непосредствени следствия от (6.10) са

Следствие 6.1. *Ако за всички $j \in N$ относителните оценки $\overline{c}_j > 0$, то базисното допустимо решение $\overline{\mathbf{x}}$ е единствено оптимално решение на каноничната задача (K).*

Следствие 6.2. *Ако $\overline{\mathbf{x}}$ е оптимално базисно допустимо решение на (K) с небазисни относителни оценки $\overline{c}_{j_1} = \overline{c}_{j_2} = \cdots = \overline{c}_{j_k} = 0$, то всяко допустимо решение $\mathbf{x} \in M$ от вида*

$$\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^{k} x_{j_i} \mathbf{d}_{j_i} \tag{6.11}$$

също е оптимално решение на (K).

Да обърнем внимание на това че ако някои небазисни променливи имат нулеви относителни оценки то това не означава, че $\overline{\mathbf{x}}$ не е единствено оптимално решение. Наистина, ако $\overline{\mathbf{x}}$ е изродено то може да бъде единствената допустима точка от вида (6.11) поради фиктивност на ръбовете с направления $\mathbf{d}_{j_i}$, участващи в (6.11).

§6.5. Критерий за неограниченост на целевата функция

Нека сега за текущото $\overline{\mathbf{x}}$ с базис B не е в сила критерият за оптималност, т.е. нека съществува небазисен индекс $q \in N$, за който $\overline{c}_q < 0$. Това означава, че при движение по ръба с направление $\mathbf{d}_q$ целевата функция намалява. Въпреки че симплекс методът може да тръгне по произволен такъв ръб на намаляване, обичайното правило[1] е да се избере ръбът, съответстващ на най-малката отрицателна относителна оценка $\overline{c}_q$.

След като симплекс методът е избрал ръб на намаляване с направление $\mathbf{d}_q$ (с относителна оценка $\overline{c}_q < 0$), той се придвижва от $\overline{\mathbf{x}}$ по този ръб, т.е. започва да увеличава t в (6.6).

Има две възможности:

- $\mathbf{w}_q \leqslant \mathbf{0}$. Тогава $\overline{t} = \infty$ и ръбът с направление $\mathbf{d}_q$ е неограничен ръб на намаляване на z;

Получаваме

Теорема 6.2. (критерий за неограниченост на целевата функция). *Ако за някой индекс $q \in N$, $\overline{c}_q < 0$ и $\mathbf{w}_q \leqslant \mathbf{0}$, то задачата (K) е неограничена.*

[1] Нарича се правило на Бил

Доказателство. От $\mathbf{w}_q \leqslant \mathbf{0}$ следва $\mathbf{d}_q \geqslant \mathbf{0}$, а от (6.5) имаме $\mathbf{A}\mathbf{d}_q = \mathbf{0}$. От Теорема 4.1, която характеризира посоките на M, следва че ненулевият (тъй като $\mathbf{e}_q \neq \mathbf{0}$) вектор $\mathbf{d}_q$ е посока в M. Тъй като $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{d}_q = \overline{c}_q < 0$, векторът $\mathbf{c}$ на целевата функция z сключва тъп ъгъл с тази посока. От Теорема 5.2 следва, че z намалява неограничено по ръба $\{\overline{\mathbf{x}}+t\mathbf{d}_q,\ t \geqslant 0\}$. □

- $\mathbf{w}_q \not\leqslant \mathbf{0}$. Тогава $\overline{t}$ е крайно като при $\overline{t} > 0$ ръбът с направление $\mathbf{d}_q$ е ограничен ръб на M, а при $\overline{t} = 0$ е фиктивен ръб. И в двата случая при движение по него правим

§6.6. Преход към съседно базисно допустимо решение $\overline{\mathbf{x}}'$

Тъй като $\mathbf{w}_q \not\leqslant \mathbf{0}$, най-голямата стъпка, която можем да направим по ръба $\mathbf{d}_q$ без да нарушим допустимостта намираме от *теста за минимално отношение*

$$\overline{t} := \min\left\{\frac{\overline{x}_i}{w_{iq}} :\ w_{iq} > 0, i \in B\right\}, \tag{6.12}$$

т.е. $\mathbf{x}(t) \in M$ за стойности на $t \in [0, \overline{t}]$ и $\mathbf{x}(t) \notin M$ за стойности на $t > \overline{t}$. Както ще докажем в Лема 6.1, точката $\overline{\mathbf{x}}' := \overline{\mathbf{x}}+\overline{t}\mathbf{d}_q$ е базисно допустимо решение, чийто базис се различава от базиса на $\overline{\mathbf{x}}$ само по един индекс. Две базисни допустими решения, чиито базиси се различават само по един индекс се наричат *съседни*. Да отбележим, че ако $\overline{t} > 0$, то $\overline{\mathbf{x}}'$ ще бъде връх на M, свързан с върха $\overline{\mathbf{x}}$ с ограничения ръб $\mathbf{d}_q$, а ако $\overline{t} = 0$, то $\overline{\mathbf{x}}'$ ще съвпадне с $\overline{\mathbf{x}}$, но ще има базис, който се различава от базиса на $\overline{\mathbf{x}}$. Върхове на M, които са краища на ограничен ръб на M се наричат *съседни* върхове.

Нека в теста за минимално отношение (6.12) имаме, че минимумът се достига за базисен индекс p, т.е.

$$\overline{t} := \min\left\{\frac{\overline{x}_i}{w_{iq}},\quad w_{iq} > 0, i \in B\right\} = \frac{\overline{x}_p}{w_{pq}}.$$

Координатата w_{pq} на вектора $\mathbf{w}_q$, която е в знаменател на минималното отношение, винаги е положително число. Числото w_{pq} се нарича още *ключово число*.

Координатите на точката $\overline{\mathbf{x}}'$, която се получава в края на стъпката с дължина $\overline{t}$ по ръба $\mathbf{d}_q$, съгласно (6.9) и дефиницията на $\overline{t}$, са

$$\begin{aligned} &\overline{x}'_j = 0, \quad j \in N, j \neq q\,,\\ &\overline{x}'_q = \overline{t} = \overline{x}_p / w_{pq}\,,\\ &\overline{x}'_i = \overline{x}_i - \overline{t}w_{iq} = \overline{x}_i - \overline{x}_p w_{iq}/w_{pq}\,,\quad i \in B\,. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Да забележим, че $\overline{x}'_p = 0$, докато ако текущото $\overline{\mathbf{x}}$ е неизродено ($\overline{x}_i > 0,\ i \in B$), то $\overline{x}'_q = \overline{t} > 0$.

Това идва да подскаже, че така полученото $\overline{\mathbf{x}}'$ е базисно допустимо решение съседно на $\overline{\mathbf{x}}$: неговият базис B' се отличава от базиса B на $\overline{\mathbf{x}}$ по това, че в него не участва променливата x_p, но участва променливата x_q. Това ще докажем в следващата

Лема 6.1. *Точката $\overline{\mathbf{x}}'$ с координати (6.13) е друго базисно допустимо решение с базис B', който се различава от базиса B на $\overline{\mathbf{x}}$ по това че съдържа индекса q, а не съдържа индекса p, т.е. $B' = B \setminus \{p\} \cup \{q\}$, а базисната му матрица $\mathbf{B}'$ се различава от базисната матрица $\mathbf{B}$ на $\overline{\mathbf{x}}$, по това, че един от нейните стълбове $\mathbf{A}_p$ е заменен със стълба $\mathbf{A}_q$, т.е.*

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} + (\mathbf{A}_q - \mathbf{A}_p)\mathbf{e}_p^{\mathrm{T}}\,.$$

Доказателство. Точката $\overline{\mathbf{x}}'$ принадлежи на M поради дефиницията на $\overline{t}$. Да забележим, че стълбовете на матрицата $\mathbf{A}$, съответстващи на положителните координати на $\overline{\mathbf{x}}'$, са стълбове на матрицата $\mathbf{B}'$. Като вземем предвид Теорема 3.1 и Теорема 3.2, достатъчно е да покажем, че стълбовете на матрицата $\mathbf{B}'$ са линейно независими.

Да допуснем противното, т.е. че стълбовете $\mathbf{A}_i$, $i \in B'$ са линейно зависими. Това означава, че съществуват числа β_i, $i \in B'$ не всичките равни на нула и такива, че $\sum\limits_{i\in B'} \beta_i \mathbf{A}_i = \mathbf{0}$ или като вземем предвид, че $B' = B \setminus \{p\} \cup \{q\}$,

$$\sum_{i\in B, i\neq p} \beta_i \mathbf{A}_i + \beta_q \mathbf{A}_q = \mathbf{0}. \tag{6.14}$$

От $\mathbf{A}_q = \mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_q = \mathbf{B}\mathbf{w}_q$ имаме, че $\mathbf{A}_q$ се представя като линейна комбинация на стълбовете на $\mathbf{B}$ като коефициентите на линейната комбинация са координатите на вектора $\mathbf{w}_q$ или $\mathbf{A}_q = \sum\limits_{i\in B} w_{iq}\mathbf{A}_i$. Като използваме това представяне на вектора $\mathbf{A}_q$ в (6.14), получаваме

$$\sum_{i\in B, i\neq p} \beta_i \mathbf{A}_i + \beta_q \sum_{i\in B} w_{iq}\mathbf{A}_i = \mathbf{0} \iff \sum_{i\in B, i\neq p} (\beta_i + \beta_q w_{iq})\mathbf{A}_i + \beta_q w_{pq}\mathbf{A}_p = \mathbf{0}.$$

Последното е линейна комбинация на векторите $\mathbf{A}_i$, $i \in B$, но те са линейно независими. Следователно всички коефициенти на тази линейна комбинация са равни на нула. От $\beta_q w_{pq} = 0$ и $w_{pq} > 0$ (понеже w_{pq} е ключово число!) следва, че $\beta_q = 0$, което, заместено в останалите коефициенти води до $\beta_i = 0$ за всяко $i \in B, i \neq p$. Получаваме, че всички коефициенти β_i, $i \in B'$, са нули, а с това и търсеното противоречие. $\square$

При така настъпилата смяна на базиса B с базиса B', казваме, че променливата x_q *влиза* в базиса на мястото на променливата x_p, която *излиза* от базиса.

Като обобщим горните разсъждения, получаваме

Теорема 6.3. *Ако* $\bar{c}_q < 0$ *и* $\mathbf{w}_q$ *има положителна координата, то* $\overline{\mathbf{x}}'$ *с координати* (6.13) *е различно от* $\overline{\mathbf{x}}$ *базисно допустимо решение, в което стойността на целевата функция* $z(\overline{\mathbf{x}}') = z(\overline{\mathbf{x}}) + \bar{t}\bar{c}_q$ *е по-малка от стойността* $z(\overline{\mathbf{x}})$*, когато* $\bar{t}$*, определено с* (6.12)*, е положително число (в частност, когато* $\overline{\mathbf{x}}$ *е неизродено).*

За да завършим итерацията на симплекс метода, остава само да заменим базисното допустимо решение $\overline{\mathbf{x}}$ с базисното допустимо решение $\overline{\mathbf{x}}'$, да заменим базиса B с B' и да заменим базисната матрица $\mathbf{B}$ с базисната матрица $\mathbf{B}'$.

§6.7. Крайност на симплекс метода. Изроденост и зацикляне. Правило на Бленд за избягване на зациклянето

От Теорема 6.3 следва, че ако всички върхове на M са неизродени, то стойността на целевата функция ще намалява на всяка итерация и че напускайки даден връх, симплекс методът няма да се върне пак в него. Тъй като M има краен брой върхове, това означава, че симплекс алгоритъмът е краен. Зацикляне на алгоритъма може да се получи само в изроден връх.

От Теорема 6.3 следва, че ако всички върхове на допустимото множество M са неизродени, то стойността на целевата функция ще намалява на всяка итерация и че напускайки даден връх, симплекс методът няма да се върне пак в него. Тъй като M има краен брой върхове, това означава, че симплекс алгоритъмът е краен. Зацикляне на алгоритъма може да се получи само в изроден връх.

Нека текущият връх $\overline{\mathbf{x}}$ с базис B е изроден и за влизане в базиса е определена променлива x_q, чиято $\bar{c}_q < 0$. Ако $\overline{\mathbf{x}}$ има базисна нула $\bar{x}_p = 0$ и същевременно $w_{pq} > 0$, то тогава $\bar{t} = 0$ и избраният ръб на намаляване с направление $\mathbf{d}_q$ е фиктивен. Като резултат предприетата стъпка ще бъде с нулева дължина и в края на итерацията върхът $\overline{\mathbf{x}}'$ ще съвпадне с върха $\overline{\mathbf{x}}$, но ще има **различен базис** $B' = B \setminus \{p\} \cup \{q\}$.

Тъй като текущият връх $\overline{\mathbf{x}}$ и стойността на целевата функция в него $z(\overline{\mathbf{x}})$ не се променят, теоретично е възможно симплекс методът да зацикли — да преминава безкрайно през редица от базиси на един и същи изроден връх, и да не го напуска. На практика това не представлява проблем, тъй като съществуват правила за избор на влизащата в базиса променлива и на излизащата от базиса променлива, които предотвратяват зациклянето.

Пример за такова правило е **правилото на Бленд**, което гласи: **на всяка итерация сред променливите, които са кандидати за влизане и излизане от базиса, винаги се избират тези с най-малък индекс**. Като кандидат за влизане в базиса се разглежда всяка небазисна променлива x_q, такава че $\bar{c}_q < 0$, а като кандидат за излизане от базиса се разглежда всяка базисна променлива x_p, при която се достига минимумът $\bar{t}$ в теста за минимално отношение.

Да забележим, че ако минимумът се достига за повече от един базисен индекс, то следващото базисно допустимо решение $\overline{\mathbf{x}}'$ ще бъде изродено и изборът на излизаща от базиса променлива ще бъде нееднозначен.

Ще докажем, че при спазване на правилото на Бленд симплекс методът приключва след краен брой итерации.

Теорема 6.4. *Симплекс методът приключва след краен брой итерации, ако на всяка итерация от кандидатите за влизане и излизане от базиса се избират променливите с най-малкия индекс.*

Доказателство. Достатъчно е да покажем, че при спазване на горното правило алгоритъмът не зацикля, което ще направим като допуснем, че се образува цикъл и ще докажем, че това води до противоречие.

И така, да допуснем, че въпреки спазването на правилото на Бленд се получава цикъл и че зациклянето е в изродения връх $\overline{\mathbf{x}}$.

Нека $\{B_1, \dots, B_k\}$ е редицата от базиси на $\overline{\mathbf{x}}$, през които зацикля методът, т.е. симплекс методът генерира следната безкрайна редица от базиси на $\overline{\mathbf{x}}$

$$B_1, \dots, B_k, B_1, \dots \tag{6.15}$$

Както обикновено с B означаваме множеството от базисни индекси, а с N – множеството от съответните небазисни индекси, т.е. $N := \{1, 2, \dots, n\} \setminus B$.

Ще казваме, че дадена променлива е *непостоянна*, ако тя участва в един и не участва в друг от тези базиси.

Нека x_p е непостоянната променлива с най-голям индекс, нека B е базиса, от който тя излиза и нека x_q е променливата, влизаща в базиса B на мястото на x_p. Тъй като променливата x_q влиза в базиса B, а от него излиза променливата x_p, то $q \in N$, а $p \in B$ и следователно променливата x_q е непостоянна променлива (не участва в базиса B, но участва в следващия го базис). Оттук $q < p$.

От базисния вид (K_B) на задачата спрямо базиса B за решение $\mathbf{x}$ на системата $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ имаме

$$\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}} + \sum_{j \in N} x_j \mathbf{d}_j \quad \text{и} \quad z(\mathbf{x}) = z(\overline{\mathbf{x}}) + \sum_{j \in N} \overline{c}_j x_j. \tag{6.16}$$

Нека сега означим с B^* този базис сред базисите в (6.15), в който променливата x_p влиза. Очевидно B^* е различен от B. Да означим с N^* множеството от небазисните спрямо базиса B^* индекси, т.е. $N^* := \{1, \dots, n\} \setminus B^*$.

От базисния вид (K_{B*}) на задачата спрямо базиса B^* за решение $\mathbf{x}$ на системата $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ имаме

$$\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}} + \sum_{j \in N^*} x_j \mathbf{d}_j^* \quad \text{и} \quad z(\mathbf{x}) = z(\overline{\mathbf{x}}) + \sum_{j \in N^*} \overline{c}_j^* x_j = z(\overline{\mathbf{x}}) + \sum_{j=1}^{n} \overline{c}_j^* x_j, \tag{6.17}$$

като последното равенство в представянето на $z(\mathbf{x})$ следва от това, че относителните оценки на базисните спрямо базиса B^* променливи са нули, т.е. $\overline{c}_j^* = 0$ за $j \in B^*$ и включването им в сумата не я променя.

От (6.16) е ясно, че за произволно зададен набор от стойности на променливите x_j, $j \in N$ могат да се пресметнат стойностите на променливите x_i, $i \in B$ и да така да се получи частно решение $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix}$ на системата $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Нека $\mathbf{x}$ е частното решение на системата, което се получава като зададем $x_q := \alpha$ за произволно число $\alpha \in \mathbb{R}$ и $x_j := 0$ за $j \in N$, $j \neq q$. От (6.16), като вземем предвид, че $\mathbf{d}_q = \begin{bmatrix} -\mathbf{w}_q \\ \mathbf{e}_q \end{bmatrix}$, получаваме $x_i = \overline{x}_i - \alpha w_{iq}$ за $i \in B$.

Стойността на целевата функция z в така полученото частно решение $\mathbf{x}$ според (6.16) е $z(\mathbf{x}) = z(\overline{\mathbf{x}}) + \overline{c}_q \alpha$, а според (6.17) е $z(\mathbf{x}) = z(\overline{\mathbf{x}}) + \overline{c}_q^* \alpha + \sum_{i \in \mathbf{B}} \overline{c}_i^* (\overline{x}_i - \alpha w_{iq})$. Като приравним тези два израза получаваме

$$\left(\overline{c}_q - \overline{c}_q^* + \sum_{i \in B} \overline{c}_i^* w_{iq} \right) \alpha = \sum_{i \in B} \overline{c}_i^* \overline{x}_i.$$

Тъй като това равенство е в сила за всяко $\alpha \in \mathbb{R}$, то коефициентът пред α (а също така и дясната страна на равенството) е нула:

$$\overline{c}_q - \overline{c}_q^* + \sum_{i \in B} \overline{c}_i^* w_{iq} = 0.$$

Тъй като променливата x_q влиза в базиса B, това означава, че относителната ѝ оценка спрямо този базис е $\overline{c}_q < 0$. Тъй като променливата x_q **не** влиза в базиса B^* (в този базис влиза променливата x_p) и тъй като $q < p$, то по правилото на Бленд за избор на променлива за влизане в базиса B^* имаме, че $\overline{c}_q^* \geqslant 0$. Следователно

$$\sum_{i \in B} \overline{c}_i^* w_{iq} > 0,$$

което означава, че съществува индекс $r \in B$, такъв че

$$\overline{c}_r^* w_{rq} > 0. \tag{6.18}$$

В частност $\overline{c}_r^* \neq 0$. Тъй като относителните оценки на базисните променливи са нули, то r е небазисен индекс, т.е. $r \in N^*$. Получаваме, че променливата x_r е непостоянна, понеже участва в базиса B и не участва в базиса B^*. Следователно $r \leqslant p$. В действителност $r < p$, тъй като $\overline{c}_p^* w_{pq} < 0$ (относителната оценка $\overline{c}_p^* < 0$, понеже x_p влиза в базиса B^*, а $w_{pq} > 0$, понеже x_p излиза от базиса B, за да влезе на нейно място x_q, откъдето w_{pq} е ключовото число, а то винаги е положително).

Това, че $r < p$ води до $\overline{c}_r^* \geqslant 0$, защото в противен случай съгласно критерия за избор на променлива с най-малък индекс за влизане в базиса B^* влизаща в базиса B^* щеше да бъде променливата x_r, а не x_p и от (6.18) следва

$$w_{rq} > 0. \tag{6.19}$$

Тъй като всеки от базисите в редицата (6.15) е базис на един и същи връх $\overline{\mathbf{x}}$, то всяка непостоянна променлива е с нулева стойност в $\overline{\mathbf{x}}$, т.е. имаме базисна нула $\overline{x}_i = 0$, ако i е непостоянна променлива. В частност

$$\overline{x}_r = 0. \tag{6.20}$$

От (6.19) и (6.20) следва, че променливата x_r е била кандидат за излизане от базиса B и понеже $r < p$, то по правилото на Бленд тя е трябвало да бъде избрана за излизане от базиса B, а не променливата x_p. Получихме търсеното противоречие и с това доказахме теоремата. $\square$

Задачи, допустимото множество на което има изродени върхове, са често срещани. За това, че симплекс методът няколко итерации е бил в изроден връх може да се съди по това, че целевата функция приема една и съща стойност неколкократно (преди да бъде намерен действителен ръб на намаляване), а след това стойностите ѝ отново започват да намаляват.

§7. Алгоритъм и приложни реализации на симплекс метода

В § 6 подробно описахме итерацията на симплекс метода за решаване на канонична задача

$$
(K) \qquad \begin{aligned} \min \quad & z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \\ & \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\,, \end{aligned}
$$

където $\mathbf{A}$ е $m \times n$ матрица, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m_+$, $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Сега ще дадем

§7.1. Алгоритъм на симплекс метода

Фаза I:

(0) Или се установява, че допустимото множество е празното и тогава КРАЙ – задачата (K) е несъвместима; или се намира начално базисно допустимо решение $\overline{\mathbf{x}}$ с базисна матрица $\mathbf{B} = [\mathbf{A}_{j_1}, \dots, \mathbf{A}_{j_m}]$. Множеството от индексите на базисните променливи се означава с $B = \{j_1, \dots, j_m\}$ (т.е. x_{j_i} е i-та базисна променлива, $i = 1, \dots, m$), а множеството от индексите на небазисните променливи се означава с N.

Фаза II:

(1) Пресмятат се относителните оценки на небазисните променливи

$$\overline{c}_j = c_j - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j \quad \text{за всяко } j \in N.$$

(2) Проверка на критерия за оптималност: Ако $\overline{c}_j \geqslant 0$, за всяко $j \in N$, то КРАЙ – текущото решение $\overline{\mathbf{x}}$ е оптимално, като оптималната стойност на функцията е $z(\overline{\mathbf{x}}) = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$. В противен случай се преминава към стъпка (3).

(3) Избор на небазисна променлива x_q за влизане в базиса. Тук е възможно да има нееднозначност — избира се ръб на намаляване на z, като се избере индекс

$$q \in \{j \in N \ : \ \overline{c}_j < 0\}\,.$$

(4) Проверка на критерия за неограниченост на целевата функция: Намират се координатите на вектора

$$\mathbf{w}_q = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_q.$$

Ако $\mathbf{w}_q \leqslant \mathbf{0}$, то КРАЙ – в допустимото множество M има неограничен ръб с направление $\mathbf{d}_q = \begin{bmatrix} -\mathbf{w}_q \\ \mathbf{e}_q \end{bmatrix}$, по който $z \to -\infty$. В противен случай се преминава към стъпка (5).

(5) Избор на базисна променлива x_{j_p} за излизане от базиса: Пресмята се

$$\bar{t} = \frac{\overline{x}_{j_p}}{w_{pq}} = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \left\{ \frac{\overline{x}_{j_i}}{w_{iq}} \;:\; w_{iq} > 0 \right\} .$$

Ако минимумът се достига за повече от един индекс, изборът на излизаща от базиса променлива е нееднозначен.

(6) Обновява се текущото решение, базиса B и базисната матрица $\mathbf{B}$: Присвоява се

$$\begin{aligned}
&\overline{x}_q \Leftarrow \bar{t} = \overline{x}_{j_p}/w_{pq} \,, \\
&\overline{x}_{j_i} \Leftarrow \overline{x}_{j_i} - \bar{t} w_{iq}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m \,, \\
&B \Leftarrow B \setminus \{j_p\} \cup \{q\} \,, \\
&\mathbf{B} \Leftarrow \mathbf{B} + (\mathbf{A}_q - \mathbf{A}_{j_p})\mathbf{e}_p^{\mathrm{T}} \,, \\
&j_p \Leftarrow q
\end{aligned}$$

и се преминава към стъпка (1).

При изложението на фаза II на симплекс метода в § 6, предположихме, че във фаза I вече е намерено начално базисно допустимо решение (това е стъпка (0) на алгоритъма). Да видим как симплекс методът, който намира оптимално решение във фаза II, може успешно да се приложи и за решаването на проблема на фаза I — намирането на начален връх.

§7.2. Методи за намиране на начален връх

За реализиране на фаза I на симплекс метода ще се спрем на два метода.

При *двуетапния метод* на първия етап се решава спомагателна канонична задача, от чието оптимално решение се получава базисно допустимо решение на (K), което на втория етап симплекс методът използва като начален връх за решаване на (K).

Спомагателната канонична задача (I) се формулира по следния начин:

- всяко от ограниченията на задачата (K) се преобразува като към лявата му страна се добавя *изкуствена неотрицателна променлива* $y_i \geqslant 0$, при което то добива вида $\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + y_i = b_i$;

- върху новото множество от ограничения се минимизира сумата на изкуствените променливи.

Така се получава следната канонична задача

$$(I)\qquad \begin{aligned} \min\quad & \xi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} y_i \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{I}\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad (\mathbf{b} \geqslant \mathbf{0}), \\ & \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}, \end{aligned}$$

където $\mathbf{y}(y_1,\ldots,y_m) \in \mathbb{R}^m$ е векторът на изкуствените променливи, а с $\mathbf{I}$ е означена единичната матрица от ред m.

Задачата (I) има очевидно базисно допустимо решение $(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}}) = (\mathbf{0},\mathbf{b})$. Неговият базис се състои само от изкуствените променливи $\mathbf{y}$, а базисната му матрица е $\mathbf{I}$. В частност допустимото множество на (I) не е празно. Целевата функция ξ приема неотрицателни стойности върху него. Следователно, задачата (I) е разрешима.

И така, за каноничната задача (I) прилагаме симплекс метода като използваме $(\mathbf{0},\mathbf{b})$ за начален връх, за да намерим нейно оптимално базисно допустимо решение $(\overline{\mathbf{x}}^*,\overline{\mathbf{y}}^*)$. Да означим с ξ^* оптималната стойност на ξ, т.е. $\xi^* := \xi(\overline{\mathbf{x}}^*,\overline{\mathbf{y}}^*)$.

Възможни са три случая:

1. $\xi^* > 0$, което означава, че в оптималния базис има изкуствена променлива y_i с положителна стойност $\overline{y}_i^* > 0$. В този случай допустимото множество на задачата (K) е празно. Наистина, ако допустимото множество M на задачата (K) не е празно, то $\xi^* = 0$: като вземем $\mathbf{x} \in M$ и положим $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, съответният вектор $(\mathbf{x},\mathbf{0})$ е допустим за задачата (I) и за него $\xi(\mathbf{x},\mathbf{0}) = 0$.

2. $\xi^* = 0$ и всички изкуствени променливи y_i са небазисни за $(\overline{\mathbf{x}}^*,\overline{\mathbf{y}}^*)$. В този случай $\overline{\mathbf{x}}^*$ е базисно допустимо решение на задачата (K), което фаза II на СМ ще използва за начално базисно допустимо решение при нейното решаване.

3. $\xi^* = 0$, но някои от изкуствените променливи y_i са останали в базиса с нулева стойност (базисни нули) и оптималното решение $(\overline{\mathbf{x}}^*,\overline{\mathbf{y}}^*)$ е изродено. В този случай всяка изкуствена променлива, която е останала в базиса, може или да се елиминира заедно с излишното уравнение, с което е асоциирана, или да се замени в базиса с някоя небазисна $\mathbf{x}$-променлива.

   По точно казано, нека $\overline{y}_i^* = 0$ и y_i е k-та базисна променлива. Ако

   - $\mathbf{e}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j = 0$ за всички небазисни стълбове $\mathbf{A}_j$, то това означава, че след елементарни преобразувания k-ият ред на матрицата $\mathbf{A}$ се е трансформирал в нулевия вектор, а k-то уравнение на системата се е трансформирало в тъждеството $\mathbf{0}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = 0$. Следователно в системата линейни уравнения $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ k-то е излишно и k-ият ред може да се отстрани от матрицата $\mathbf{A}$, а k-ият ред и k-ият стълб да се отстранят от базисната матрица на $(\overline{\mathbf{x}}^*, \overline{\mathbf{y}}^*)$ заедно с k-та базисна променлива y_i.

- $\mathbf{e}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j \neq 0$ за някой небазисен стълб $\mathbf{A}_j$, то y_i може да се замени в базиса от небазисната променлива x_j. Тъй като при тази замяна $\bar{t}$=0 (поради $\overline{y}_i^* = 0$), променя се само базисът на решението.

След като изкуствените променливи се заменят последователно в базиса с $\mathbf{x}$-променливи, получава се базисно допустимо решение на задачата (I) с базис, състоящ се само от $\mathbf{x}$-променливи, от което се получава базисно допустимо решение за задачата (K), както в случай 2.

По-често се използва т.нар. *M-метод.* Той използва същите идеи, както двуетапния метод, но обединява в едно намирането на начално базисно допустимо решение и решаването на каноничната задача. Разглежда се т.нар. *M-задача*

$$(M) \qquad \begin{aligned} \min \quad & z_M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + M\sum_{i=1}^{m} y_i \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b} \quad (\mathbf{b} \geqslant \mathbf{0}), \\ & \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}, \end{aligned}$$

където $M > 0$ е достатъчно голямо число.

Следващите две теореми показват как каноничната задача (K) се решава посредством решаване на съответната ѝ (M)-задача.

Теорема 7.1. *Ако задачата (K) е разрешима, то съществува число $M_0 > 0$, такова че за всяко $M \geqslant M_0$ съответната (M)-задача е разрешима и $\mathbf{y}$-координатите на всички нейни оптимални базисни допустими решения са нули.*

Доказателство. Тъй като в доказателството се използват основни резултати от двойнствеността в линейното оптимиране, на които е посветен § 8, то ще бъде направено в § 8. □

Теорема 7.2. *Ако $(\mathbf{x}^*, \mathbf{0})$ е оптимално решение на задачата (M), то $\mathbf{x}^*$ е оптимално решение на задачата (K).*

Доказателство. Тъй като $(\mathbf{x}^*, \mathbf{0})$ е допустима точка за задачата (M), то $\mathbf{x}^*$ е допустима точка за задачата (K). Да разгледаме произволна допустима точка $\mathbf{x}$ за задачата (K). Тогава $(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ е допустима точка за (M) и $z_M(\mathbf{x}^*, \mathbf{0}) \leqslant z_M(\mathbf{x}, \mathbf{0})$. Но $z_M(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = z(\mathbf{x})$ за всяко $\mathbf{x}$, откъдето $z(\mathbf{x}^*) \leqslant z(\mathbf{x})$ и $\mathbf{x}^*$ е оптимално решение на (K). □

И така, (M)-задачата има очевидно начално базисно допустимо решение $(\mathbf{0}, \mathbf{b})$. Симплекс методът, приложен за решаване на (M)-задачата приключва по един от следните два начина:

1. Установява, че (M)-задачата е неограничена. Тогава от Теорема 7.1 следва, че каноничната задача (K) няма решение. За изясняване на това дали неразрешимостта на (K) се дължи на празно допустимо множество или на неограниченост на целевата функция са необходими допълнителни изследвания;

2. Намира оптимално базисно допустимо решение $(\overline{\mathbf{x}}^*, \overline{\mathbf{y}}^*)$ на (M)-задачата. Ако $\overline{\mathbf{y}}^* \neq \mathbf{0}$, то от доказателството на Теорема 7.1 (вж. § 8) става ясно, че в този случай задачата (K) е с празно допустимо множество. Ако $\overline{\mathbf{y}}^* = \mathbf{0}$, то съгласно Теорема 7.2 $\overline{\mathbf{x}}^*$ е оптимално решение на задачата (K).

Сега ще се спрем на това как на практика се извършват пресмятанията, необходими на симплекс метода.

§7.3. Таблична форма на симплекс метода

Един от начините да се извършат пресмятанията, необходими на итерацията на симплекс метода е да се вложат данните за текущото базисно решение в една голяма матрица, наречена *симплексна таблица*, която може да бъде генерирана директно от данните на задачата.

При зададени матрица на ограниченията $\mathbf{A}$, дясна страна $\mathbf{b}$ и вектор на целевата функция $\mathbf{c}$, изходната таблица е просто следната по-голяма матрица:

$$T'' = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \hdashline \mathbf{c}^{\mathrm{T}} & 0 \end{array}\right].$$

Таблицата T'' е с $m+1$ реда и $n+1$ стълба.

Нека $\overline{\mathbf{x}}$ е базисно решение с базисна матрица $\mathbf{B}$. Ако е необходимо, преномерираме променливите така, че $x_1, \ldots, x_m$ да бъдат базисните променливи. Тогава базисната матрица $\mathbf{B}$ на $\overline{\mathbf{x}}$ се състои от първите m стълба на $\mathbf{A}$, а последните ѝ $n-m$ стълба образуват подматрицата $\mathbf{N}$ с размерност $m \times (n-m)$.

След евентуалното преномериране на променливите в таблицата имаме, че първите стълбове са базисните, т.е.

$$T''(\overline{\mathbf{x}}) = \left[\begin{array}{c:c:c} \mathbf{B} & \mathbf{N} & \mathbf{b} \\ \hdashline \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} & \mathbf{c}_N^{\mathrm{T}} & 0 \end{array}\right].$$

Изразяването на базисните координати $\mathbf{x}_B$ на решение $\mathbf{x}$ на системата $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ чрез небазисните му координати $\mathbf{x}_N$ се постига чрез елементарни Гаусови преобразувания на горната част на таблицата до

$$T'(\overline{\mathbf{x}}) = \left[\begin{array}{c:c:c} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hdashline \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} & \mathbf{c}_N^{\mathrm{T}} & 0 \end{array}\right].$$

Матрицата, която преобразува $\mathbf{B}$ в $\mathbf{I}$, е матрицата $\mathbf{B}^{-1}$ и направените елементарни преобразувания са еквивалентни на умножение отляво с матрицата $\mathbf{B}^{-1}$ на горната част на таблицата $T''(\overline{\mathbf{x}})$.

За да завършим, остава да заместим така изразените базисни променливи в целевата функция z, при което тя става функция само на небазисните променливи. За целта умножаваме с $\mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}$ горната част на таблицата $T'(\overline{\mathbf{x}})$ и я вадим от долната, при което получаваме

$$T(\overline{\mathbf{x}}) = \left[\begin{array}{c:c:c} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{c}_N^{\mathrm{T}} - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & -\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c:c} \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hdashline \mathbf{0} & \overline{\mathbf{c}}_N^{\mathrm{T}} & -z(\overline{\mathbf{x}}) \end{array}\right].$$

Това е окончателният вид на симплексната таблица за базисното решение $\overline{\mathbf{x}}$.

Направените преобразувания са еквивалентни на привеждането на задачата (K) в базисен вид спрямо базиса B на $\overline{\mathbf{x}}$.

Векторът от базисните координати на $\overline{\mathbf{x}}$, който е $\overline{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ се намира горе вдясно на $T(\overline{\mathbf{x}})$, а небазисните му координати, разбира се, са $\overline{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}$. Стойността на целевата функция z в $\overline{\mathbf{x}}$ е $z(\overline{\mathbf{x}}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ и се намира долу вдясно на таблицата с обратен знак.

Симплексната таблица $T(\overline{\mathbf{x}})$ съдържа цялата информация, необходима на симплексната итерация.

От нея може да се прецени дали базисното допустимо решение $\overline{\mathbf{x}}$ е оптимално или не — координатите на вектора на относителните оценки на небазисните променливи $\overline{\mathbf{c}}_N^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}_N^{\mathrm{T}} - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$, се намират долу в средата на таблицата.

Ако $\overline{\mathbf{c}}_N \geqslant \mathbf{0}$, то $\overline{\mathbf{x}}$ удовлетворява критерия за оптималност и следователно е оптимално решение на задачата (K), а оптималната стойност на целевата функция е $z(\overline{\mathbf{x}}) = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$.

Ако сред координатите на вектора $\overline{\mathbf{c}}_N$ има отрицателни, то $\overline{\mathbf{x}}$ не удовлетворява критерия за оптималност и стойността на целевата функция още може да се намали. Всяка отрицателна координата $\overline{c}_j < 0$ на вектора $\overline{\mathbf{c}}_N$ съответства на ръб $\mathbf{d}_j$, по който целевата функция намалява.

Избира се отрицателна координата $\overline{c}_q$ на $\overline{\mathbf{c}}_N$ (като се спазва правилото на Бил или правилото на Бленд). Това означава, че в базиса ще влезе небазисната променлива x_q.

За да се определи коя от базисните променливи ще излезе от базиса, е необходимо да се намери $\overline{t}$ от теста за минимално отношение:

$$\overline{t} = \min_{1\leqslant i\leqslant m}\left\{\frac{\overline{x}_i}{w_{iq}} = \frac{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i}{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_q)_i} : w_{iq} > 0\right\} = \frac{\overline{x}_p}{w_{pq}} = \frac{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_p}{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_q)_p}. \tag{7.1}$$

В него участват координатите на вектора $\mathbf{w}_q := \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_q$ (той се намира в q-ия стълб на таблицата $T(\overline{\mathbf{x}})$ — стълбът в горната част на таблицата, който стои над координатата $\overline{c}_q$ на вектора $\overline{\mathbf{c}}_N$) и на вектора $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ (той, както вече отбелязахме, са намира горе вдясно на таблицата).

Минимумът в (7.1) се взима само по положителните координати на вектора $\mathbf{w}_q$. Ако в стълба $\mathbf{w}_q$ няма положителни координати, то от текущия връх $\overline{\mathbf{x}}$ излиза неограничен ръб $\mathbf{d}_q = \begin{bmatrix} -\mathbf{w}_q \\ \mathbf{e}_q \end{bmatrix}$, по който целевата функция z намалява неограничено.

В противен случай се преминава към съседно базисно допустимо решение $\overline{\mathbf{x}}'$, чиято базисна матрица $\mathbf{B}'$ се получава, като p-ия стълб на матрицата $\mathbf{B}$ се замени със стълба $\mathbf{A}_q$.

За да се получи симплексната таблица $T(\overline{\mathbf{x}}')$ на новото базисно допустимо решение $\overline{\mathbf{x}}'$ е по-удобно да се използва таблицата $T(\overline{\mathbf{x}})$ на предходното $\overline{\mathbf{x}}$, а не началната таблица T''. Преобразуванието, което трансформира $T(\overline{\mathbf{x}})$ в $T(\overline{\mathbf{x}}')$, се нарича *pivot* или *завъртане*. То осъществява стъпка (6) на симплекс алгоритъма и е еквивалентно на привеждането на задачата (K) в базисен вид спрямо новия базис B'.

Да означим с t_{ij} елемента, който се намира в i-ия ред и j-ия стълб на $T(\overline{\mathbf{x}})$ за $i = 1, \dots m+1$, $j = 1, \dots, n+1$.

Да означим с t'_{ij} елемента, който ще се намира в i-ия ред и j-ия стълб на $T(\overline{\mathbf{x}}')$ за $i = 1, \dots m+1$, $j = 1, \dots, n+1$.

При завъртането (pivot) t'_{ij} се получават от t_{ij} по следния начин:

1. $t'_{pj} = \dfrac{t_{pj}}{t_{pq}}, \quad j = 1, \dots, n+1,$

2. $t'_{ij} = t_{ij} - t_{iq}\dfrac{t_{pj}}{t_{pq}}, \quad j = 1, \dots, n+1, \quad i = 1, \dots, m+1, i \neq p.$

Така 1. и 2. за $1 \leqslant i \leqslant m$ и $1 \leqslant j \leqslant n$ изразяват новите базисни променливи $\mathbf{x}_{B'}$ чрез новите небазисни променливи $\mathbf{x}_{N'}$;

1. и 2. за $1 \leqslant i \leqslant m$ и $j = n+1$ пресмятат новите базисни координати $\overline{\mathbf{x}}_{B'}$ от старите $\overline{\mathbf{x}}_B$;

2. за $i = m+1$ и $1 \leqslant j \leqslant n$ изразява z като функция само на новите небазисни променливи $\mathbf{x}_{N'}$, т.е. новите относителни оценки $\overline{\mathbf{c}}'$ се получават от старите $\overline{\mathbf{c}}$.

По този начин на всяка итерация се създава симплексна таблица на текущото базисно допустимо решение, която съдържа цялата необходима на симплексната итерация информация — за оптималност, за неограниченост, за край на алгоритъма.

Именно табличната форма на симплекс метода е формата в която той е бил описан при своето създаване. Въпреки че тази форма е илюстративна и приемлива за учебни примери с малко променливи, тя не е подходяща за решаване на задачи с голяма размерност, както и на задачи, в които матрицата $\mathbf{A}$ има някаква структура (например има много нулеви коефициенти), а такива често възникват в практиката. Това е така, понеже завъртането на таблицата обикновено разрушава структурата на матрицата $\mathbf{A}$. Друг недостатък на завъртането е, че при него на всяка итерация се генерират всичките $n - m$ стълба на матрицата $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$, докато само един от тях — стълбът $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_q$ – е необходим за пресмятанията в теста за минимално отношение (7.1).

§7.4. Модифициран симплекс метод

За отстраняване на недостатъците на табличната форма на симплекс метода на по-късен етап е разработен т.нар. *модифициран симплекс метод.*

Когато симплекс методът се намира в текущия връх $\overline{\mathbf{x}}$ с базисна матрица $\mathbf{B}$, необходимо е да бъдат направени пресмятанията на стъпки (1), (4) и (5) от алгоритъма. Пресмятането на относителните оценки на стъпка (1) се извършва на два етапа: първо се намират координатите на вектора

$$\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{-1}$$

и след това той се използва за пресмятане на относителните оценки $\overline{c}_j = c_j - \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}_j$, $j \in N$. Векторът $\boldsymbol{\pi}$ се нарича *вектор на симплексните множители.*

Следователно, в хода на симплекс метода е необходимо да бъдат намерени координатите на векторите $\boldsymbol{\pi}$, $\mathbf{w}_q$ и $\overline{\mathbf{x}}_B$. Те се пресмятат съответно така:

$$\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{-1}, \quad \mathbf{w}_q = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_q \quad \text{и} \quad \overline{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}. \tag{7.2}$$

Очевидно за намирането им е достатъчно да се знае обратната на базисната матрица $\mathbf{B}$ — матрицата $\mathbf{B}^{-1}$.

При първоначалните реализации на модифицирания симплекс метод матрицата $\mathbf{B}^{-1}$ се е съхранявала и поддържала в явен вид, като се е обновявала при всяка смяна на базиса.

В последствие се взима предвид, че решаването на система линейни уравнения става бързо и лесно, ако матрицата на системата е *елементарна матрица.* Една матрица се нарича *елементарна*, ако се различава от единичната само по елементите на един от своите стълбове. Реализира се идеята на всяка итерация матрицата $\mathbf{B}^{-1}$ да бъде представяна и поддържана във вид на произведение от елементарни матрици.

Ако $\mathbf{B}$ е базисната матрица на текущото решение, следващата базисна матрица $\mathbf{B}'$ (която се получава като p-ият стълб на $\mathbf{B}$ се замени със стълба $\mathbf{A}_q$) може да се получи след умножение отдясно на $\mathbf{B}$ с елементарна матрица, която ще означим с $\mathbf{E}$, т.е.

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}\mathbf{E},$$

където

$$\mathbf{E} := \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & & w_{1q} & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & w_{pq} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & w_{mq} & & 1 \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ \text{стълб } p \end{array}. \tag{7.3}$$

Лесно се проверява, че умножаването на $\mathbf{B}$ отдясно с $\mathbf{E}$ оставя всички стълбове на $\mathbf{B}$ непроменени с изключение на p-ия, който се трансформира в $\mathbf{B}\mathbf{w}_q = \mathbf{A}_q$, както е необходимо. С други думи казано, това умножение заменя p-ия стълб на $\mathbf{B}$ с вектора $\mathbf{A}_q$.

За да обновим матрицата $\mathbf{B}^{-1}$, да забележим, че

$$(\mathbf{B}')^{-1} = (\mathbf{B}\mathbf{E})^{-1} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}^{-1},$$

където обратната на матрицата $\mathbf{E}$ от (7.3) е елементарната матрица

$$\text{(7.4)} \qquad \mathbf{E}^{-1} = \mathbf{I} - \frac{\mathbf{e}_p^{\mathrm{T}}(\mathbf{w}_q - \mathbf{e}_p)}{w_{pq}} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & & -w_{1q}/w_{pq} & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 1/w_{pq} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & -w_{mq}/w_{pq} & & 1 \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ \text{стълб } p \end{array}.$$

В § 7.2 видяхме, че след въвеждане на изкуствени променливи базисната матрица на началното базисно допустимо решение е единичната матрица $\mathbf{I}$. Тогава на k-та итерация обратната на матрицата $\mathbf{B}_k$ се представя като произведение на k елементарни матрици

$$\text{(7.5)} \qquad \mathbf{B}_k^{-1} = \mathbf{E}_k^{-1}\mathbf{E}_{k-1}^{-1}\cdots\mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{I},$$

където всяка от матриците $\mathbf{E}_i^{-1}$ е от вида (7.4). Обновяването на обратната на базисната матрица става просто чрез добавяне на нова елементарна матрица в произведението. Ясно е, че вместо да се помни цялата елементарна матрица $\mathbf{E}_i^{-1}$, достатъчно е да се помни само стълба на $\mathbf{E}_i^{-1}$, който се различава от съответния стълб на единичната матрица, както и неговото място в $\mathbf{E}_i^{-1}$, което пести памет.

След натрупването на $2m$ на брой елементарни матрици в произведението е препоръчително текущата матрица $\mathbf{B}^{-1}$ да се преизчислява, а използваните до момента елементарни матрици да се изтриват. Тъй като е известно кои са стълбовете на $\mathbf{A}$, включени в $\mathbf{B}$, то преизчисляването на $\mathbf{B}^{-1}$ се състои в последователна замяна на стълбовете на $\mathbf{I}$ като всяка замяна съответства на умножение с елементарна матрица от вида $\mathbf{E}^{-1}$. Така след преизчисляването си $\mathbf{B}^{-1}$ вече е представена като произведение на не повече от m елементарни матрици.

По описания начин се поддържа представянето на $\mathbf{B}^{-1}$ като произведение на не повече от $2m$ елементарни матрици, което спестява изчислително време, пести памет и намалява грешките от закръгляване.

Още по-съвременен подход е да се гледа на (7.2) като на три системи линейни уравнения с една и съща матрица на коефициентите $\mathbf{B}$:

$$\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{B}\mathbf{w}_q = \mathbf{A}_q, \quad \mathbf{B}\overline{\mathbf{x}}_B = \mathbf{b}$$

и за тяхното решаване да се използуват числените методи на линейната алгебра, като се направи стандартното директно разлагане на матрицата $\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ на произведение на долна триъгълна матрица $\mathbf{L}$ и горна триъгълна матрица $\mathbf{U}$. Това позволява лесното и бързо решаване на трите системи. Възможно е елементите на разлагането $\mathbf{L}'$ и $\mathbf{U}'$ на следващата базисна матрица $\mathbf{B}' = \mathbf{L}'\mathbf{U}'$ да не се пресмятат чрез директното ѝ разлагане, а да се получат от предходните $\mathbf{L}$ и $\mathbf{U}$ чрез подходящо умножение с елементарни матрици.

§8. Двойнственост в линейното оптимиране

Двойнствеността в линейното оптимиране е способ за изследване на линейни задачи с помощта на спомагателни, тясно свързани с тях линейни задачи.

Ще покажем как с всяка линейна задача може да се асоциира друга линейна задача, наречена нейна двойнствена и как поведението на едната от тях (разрешима, неограничена) влияе на поведението на другата.

§8.1. Права задача

Нека е дадена линейна задача в общ вид (L) (вж. § 2). Произволна такава задача може да бъде преобразувана в задача за минимум (като се вземе предвид, че $\max\limits_{x \in X} f(x) = -\min\limits_{x \in X}[-f(x)]$ за произволна функция f и произволно множество $X \subset \mathbb{R}^n$), а всички неравенствата в множеството от ограничения могат да бъдат обърнати в посоката $\geqslant$ (ако неравенството е от вида $\leqslant$ то двете му страни се умножават с -1 без да се държи сметка за знака на дясната страна!).

Така получената задача се нарича *права задача*:

$$(P) \qquad \begin{aligned} \min z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} & \\ \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \geqslant b_i, & \quad i \in I, \\ \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = b_i, & \quad i \in \overline{I}, \\ x_j \geqslant 0, & \quad j \in J, \\ x_j \lesseqgtr 0, & \quad j \in \overline{J}. \end{aligned}$$

Тук I е индексно множество, подмножество на множеството $\{1, \dots, m\}$ от индекси на ограниченията, като $\overline{I} := \{1, \dots, m\} \setminus I$, а J е индексно множество, подмножество на множеството $\{1, \dots, n\}$ от индекси на променливите, като $\overline{J} := \{1, \dots, n\} \setminus J$.

Знакът $\lesseqgtr$ използваме, за да означим това, че върху съответната променлива не е наложено условие за неотрицателност и тя е свободна по знак.

Ако означим с $\mathbf{A}$ матрицата, чиито вектор-редове са векторите $\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}$, $i = 1, \dots, m$, получаваме $m \times n$ матрицата на ограниченията на задачата, чиито вектор-стълбове, както и преди, ще означаваме с $\mathbf{A}_j$, $j = 1, \dots, n$. Векторът на целевата функция $\mathbf{c}(c_1, \dots, c_n)$ и векторът на променливите $\mathbf{x}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, а векторът на дясната страна е $\mathbf{b}(b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$.

§8.2. Правила за писане на двойнствената задача

От казаното по-горе е очевидно, че произволна задача на линейното оптимиране лесно се преобразува в права задача. На всяка права линейна задача (P) се съпоставя друга линейна задача (DP), която се нарича *двойнствена задача* на задачата (P). Правилото на това съпоставяне се нарича *спрягане*. Първо ще напишем съответната на (P) двойнствена задача (DP), а след това ще обясним по-подробно връзката между тях.

$$
(P)\quad \begin{aligned} \min z(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \geqslant b_i, &\quad i \in I, \\ \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = b_i, &\quad i \in \overline{I}, \\ x_j \geqslant 0, &\quad j \in J, \\ x_j \lesseqgtr 0, &\quad j \in \overline{J}, \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad (DP)\quad \begin{aligned} \max v(\boldsymbol{\pi}) &= \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} \\ \pi_i \geqslant 0, &\quad i \in I, \\ \pi_i \lesseqgtr 0, &\quad i \in \overline{I}, \\ \mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} \leqslant c_j, &\quad j \in J, \\ \mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} = c_j, &\quad j \in \overline{J}. \end{aligned}
$$

На всяко от ограниченията $i \in \{1, \dots, m\}$ се съпоставя двойнствена променлива π_i, като ако i-то ограничение е неравенство в (P), то в (DP) на променливата π_i е наложено условие за неотрицателност, а ако е равенство, то π_i е свободна по знак.

Останалите ограничения на (DP) се получават като за всяко $j \in \{1, \dots, n\}$ векторът на двойнствените променливи $\boldsymbol{\pi}(\pi_1, \dots, \pi_m)$ се умножи със съответния вектор стълб $\mathbf{A}_j$ на матрицата на ограниченията $\mathbf{A}$ на (P) (стълбът пред променливата x_j) като полученото скаларно произведение трябва да не надминава c_j (коефициента в целевата функция пред x_j), ако върху x_j в (P) е наложено условие за неотрицателност и трябва да е равно на c_j, ако променливата x_j в (P) е свободна по знак.

Накрая, (DP) е задача за максимум, а целевата ѝ функция е скаларното произведение на вектора на двойнствените променливи $\boldsymbol{\pi}$ и вектора $\mathbf{b}$ в дясната страна на ограниченията на (P).

§8.3. Двойка спрегнати задачи

Видяхме как на всяка права задача (P) чрез спрягане се съпоставя двойнствена задача (DP). Разбира се, така получената двойнствената задача (DP) можем да преобразуваме в права задача, като я превърнем в задача за минимум и обърнем неравенствата ѝ в посоката $\geqslant$. Ако я спрегнем по горното правило, получената двойнствена задача ще съвпадне с изходната права задача (P), което ще докажем в

Лема 8.1. *Двойнствената задача на задачата (DP) е правата задача (P).*

Доказателство. Трябва да покажем, че $(DDP) \equiv (P)$. За целта първо преработваме двойнствената задача (DP) така, че да я направим права задача

$$
(DP)\quad \begin{aligned} \max v(\boldsymbol{\pi}) &= \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} \\ \pi_i \geqslant 0, &\quad i \in I, \\ \pi_i \lesseqgtr 0, &\quad i \in \overline{I}, \\ \mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} \leqslant c_j, &\quad j \in J, \\ \mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} = c_j, &\quad j \in \overline{J}, \end{aligned} \qquad \sim \qquad (DP)\quad \begin{aligned} -\min[-\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}]& \\ \pi_i \geqslant 0, &\quad i \in I, \\ \pi_i \lesseqgtr 0, &\quad i \in \overline{I}, \\ -\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} \geqslant -c_j, &\quad j \in J, \\ -\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} = -c_j, &\quad j \in \overline{J}. \end{aligned}
$$

На така получената права задача по правилото за спрягане пишем съответната двойнствена и опростяваме

$$
(DDP)\quad \begin{array}{rl} -\max[-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}] & \\ -\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\leqslant -b_i, & i\in I,\\ -\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x}=-b_i, & i\in \overline{I},\\ x_j\geqslant 0, & j\in J,\\ x_j\lesseqgtr 0, & j\in \overline{J}, \end{array} \quad \sim \quad (P)\quad \begin{array}{rl} \min \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} & \\ \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\geqslant b_i, & i\in I,\\ \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x}= b_i, & i\in \overline{I},\\ x_j\geqslant 0, & j\in J,\\ x_j\lesseqgtr 0, & j\in \overline{J}, \end{array}
$$

за да получим правата задача. □

От лемата е ясно, че всяка от задачите (P) и (DP) се получава от другата чрез спрягане. Затова те още се наричат *двойка спрегнати задачи.*

Нека е дадена задача на линейното оптимиране в общ вид (L). Двойнствената на задачата (L) е двойнствената задача на съответната ѝ права задача (P). На задачата (L) съпоставяме и съответната ѝ канонична задача (K). Очевидно (K) също е права задача (задача за минимум, чиито ограничения са равенства и върху всичките променливи на която е наложено условие за неотрицателност). Двойнствената задача (DK) на задачата (K) се различава от (DP) евентуално само по знаците на някои от променливите. Наистина, да означим с $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m$ векторът на променливите за задачата (DK). Ако задачата (P) е такава, че векторът в дясната ѝ страна $\mathbf{b}$ е с неотрицателни координати (за което очевидно е достатъчно $b_i\geqslant 0$, за всяко $i\in I$), то съответната ѝ канонична задача (K) също има за двойнствена (DP), т.е. $(DK)\equiv(DP)$ (Проверете!) и тогава $y_i=\pi_i$ за всяко $i=1,\dots,m$. Ако обаче в задачата (P) има $b_i<0$ за някое $i\in I$, то при канонизиране i-то ограничение се умножава с -1, което води до това че $y_i=-\pi_i$, т.е. съответните на i-то ограничение двойнствени променливи се различават по знак.

От току що казаното е ясно, че задачите (DP) и (DK) са еквивалентни с точност до знаците на някои от променливите им. Това позволява в изложението по-нататък да разглеждаме двойката спрегнати задачи, състояща се от канонична задача

$$
(K)\qquad \begin{array}{rl} \min & z(\mathbf{x})=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\\ & \mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}\,,\\ & \mathbf{x}\geqslant \mathbf{0} \end{array}
$$

и съответната ѝ двойнствена

$$
(DK)\qquad \begin{array}{rl} \max & v(\boldsymbol{\pi})=\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}\\ & \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}\leqslant \mathbf{c},\\ & \boldsymbol{\pi}\lesseqgtr 0. \end{array}
$$

§8.4. Теореми за двойнственост

За връзката между двойката спрегнати задачи (K) и (DK) ще докажем няколко основни резултата.

Теорема 8.1 (слаба теорема за двойнственост). *Ако $\mathbf{x}$ е допустимо решение за правата задача (K) и $\boldsymbol{\pi}$ е допустимо решение за двойнствената задача (DK), то $\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} \leqslant \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$.*

Доказателство. От това, че $\mathbf{x}$ е допустимо за (K), имаме $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$. За произволно $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m$ получаваме $\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}$. Ако $\boldsymbol{\pi}$ е допустимо за двойнствената задача (DK), то $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} \leqslant \mathbf{c}$ и от $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ следва, че $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} \leqslant \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{c} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$, т.е. $\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} \leqslant \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$. □

Слабата теорема за двойнственост всъщност твърди, че:

I. стойността на целевата функция z в произволно допустимо решение $\mathbf{x}$ за правата задача представлява горна граница за стойността на целевата функция v на двойнствената задача в произволно нейно допустимо решение $\boldsymbol{\pi}$ (включително и оптималното);

II. стойността на целевата функция v в произволно допустимо решение $\boldsymbol{\pi}$ за двойнствената задача представлява долна граница за стойността на целевата функция z на правата задача в произволно нейно допустимо решение $\mathbf{x}$ (включително и оптималното).

Като следствие от Теорема 8.1 получаваме

Следствие 8.1. *Нека $\mathbf{x}^*$ е допустимо решение за правата задача (K), а $\boldsymbol{\pi}^*$ е допустимо решение за двойнствената задача (DK). Ако $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}^*$, то $\mathbf{x}^*$ и $\boldsymbol{\pi}^*$ са оптимални решения на съответните задачи.*

Доказателство. Според слабата теорема за двойнственост за всяко допустимо решение $\mathbf{x}$ на (K) и за допустимото $\boldsymbol{\pi}^*$ за (DK) имаме, че $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \geqslant \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}^* = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^*$ и следователно $\mathbf{x}^*$ е оптимално за (K).

Използвайки същата теорема, за всяко допустимо решение $\boldsymbol{\pi}$ на (DK) и за допустимото $\mathbf{x}^*$ за (K) имаме, че $\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} \leqslant \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}^*$ и следователно $\boldsymbol{\pi}^*$ е оптимално за (DK). □

Съществуват ли обаче допустими решения $\mathbf{x}^*$ за (K) и $\boldsymbol{\pi}^*$ за (DK), които да удовлетворяват условието на това следствие?

Отговор на този въпрос дава:

Теорема 8.2 (силна теорема за двойнственост). (а) *Ако едната от двойката спрегнати задачи (K) и (DK) е разрешима, то разрешима е и другата задача, като $\min \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \max \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}$.*

(б) *Ако едната от двойката спрегнати задачи (K) и (DK) е неограничена, то другата задача е несъвместима.*

Доказателство. (а) Ще допуснем, че е разрешима задачата (K) и ще покажем, че е разрешима задачата (DK). Обратното се доказва аналогично.

И така, нека $\overline{\mathbf{x}}$ е текущото базисно допустимо решение с базисна матрица $\mathbf{B}$ за каноничната задача (K), решавана със симплекс метода, т.е.

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}_B \\ \overline{\mathbf{x}}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \geqslant \mathbf{0}.$$

Да разгледаме съответния на $\overline{\mathbf{x}}$ вектор на симплексните множители $\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}$ (вж. § 7.4). Имаме, че

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{x}} = [\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}, \mathbf{c}_N^{\mathrm{T}}] \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}_B \\ \overline{\mathbf{x}}_N \end{bmatrix} = [\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}, \mathbf{c}_N^{\mathrm{T}}] \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}\,.$$

Това означава, че на всяка симплексна итерация за текущия връх $\overline{\mathbf{x}}$ и съответния му вектор на симплексните множители $\boldsymbol{\pi}$ е в сила равенството

$$z(\overline{\mathbf{x}}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} = v(\boldsymbol{\pi}). \tag{8.1}$$

Нека сега $\overline{\mathbf{x}}^*$ с базисна матрица $\mathbf{B}$ е полученото със симплекс метода оптимално базисно допустимо решение за (K). Съответният му вектор на симплексните множители е $\boldsymbol{\pi}^* = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}$. Тъй като $\overline{\mathbf{x}}^*$ е оптимално, то за него е в сила критерият за оптималност

$$\overline{\mathbf{c}}_N^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}_N^{\mathrm{T}} - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \geqslant \mathbf{0}$$

който е еквивалентен на

$$\mathbf{c}_N^{\mathrm{T}} \geqslant \boldsymbol{\pi}^{*\mathrm{T}}\mathbf{N}.$$

Тъй като очевидно $\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \boldsymbol{\pi}^{*\mathrm{T}}\mathbf{B}$, получаваме

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = [\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}, \mathbf{c}_N^{\mathrm{T}}] \geqslant [\boldsymbol{\pi}^{*\mathrm{T}}\mathbf{B}, \boldsymbol{\pi}^{*\mathrm{T}}\mathbf{N}] = \boldsymbol{\pi}^{*\mathrm{T}}[\mathbf{B}|\mathbf{N}] = \boldsymbol{\pi}^{*\mathrm{T}}\mathbf{A},$$

или $\mathbf{c} \geqslant \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}^*$, т.е. получаваме че $\boldsymbol{\pi}^*$, съответстващ на оптималното $\overline{\mathbf{x}}^*$, е допустим за задачата (DK). Показахме, че ако $\overline{\mathbf{x}}^*$ е оптимално базисно допустимо решение на (K) с базис B, то $\boldsymbol{\pi}^{*\mathrm{T}} := \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}$ е допустимо решение за двойнствената задача (DK), което от ((8.1)) удовлетворява $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{x}}^* = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}^*$. От Следствие 8.1 имаме, че $\boldsymbol{\pi}^*$ е оптимално решение за (DK), с което доказателството на (а) приключва.

(б) следва непосредствено от Теорема 8.1 с допускане на противното. □

Да отбележим, че обратното на Теорема 8.2(б) твърдение в общия случай не е вярно, т.е. ако едната от двойката спрегнати задачи е несъвместима, то от това **не следва** че другата задача е неограничена. Възможно е и двете задачи да бъдат несъвместими, както се вижда от следния

Пример. В двойката спрегнати задачи

$$(K)\quad \begin{array}{ll} \min & z(\mathbf{x}) = -x_1 - x_2 \\ & x_1 - x_2 = 1, \\ & x_1 - x_2 = 0, \\ & x_1 \geqslant 0\,,\ x_2 \geqslant 0, \end{array} \qquad (DK)\quad \begin{array}{ll} \max & v(\boldsymbol{\pi}) = \pi_1 \\ & \pi_1 + \pi_2 \leqslant -1, \\ & -\pi_1 - \pi_2 \leqslant -1, \\ & \pi_1 \lesseqgtr 0,\ \pi_2 \lesseqgtr 0 \end{array}$$

и двете са несъвместими.

Остава да приведем доказателството на Теорема 7.1 от § 7.

Теорема 7.1. *Ако задачата (K) е разрешима, то съществува число $M_0 > 0$, такова че за всяко $M \geqslant M_0$ съответната (M)-задача е разрешима и $\mathbf{y}$-координатите на всички нейни оптимални базисни допустими решения са нули.*

Доказателство. Нека $\mathbf{x}$ е допустима точка за (K). Тогава $(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ е допустима точка за всяка (M)-задача

$$(M) \qquad \begin{array}{ll} \min & z_M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + M \sum_{i=1}^{m} y_i \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b} \quad (\mathbf{b} \geqslant \mathbf{0}), \\ & \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}, \end{array}$$

(допустимото множество на (M)-задачите не зависи от числото M) и следователно M-задачата е с непразно допустимо множество.

Тъй като (K) е разрешима, от Силната теорема за двойнственост следва, че задачата (DK) е разрешима. Нека $\boldsymbol{\pi}(\pi_1, \ldots, \pi_m)$ е произволна допустима точка за задачата $\quad (DK) \begin{array}{l} \max \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} \\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} \leqslant \mathbf{c}. \end{array}$ Да положим $\overline{M} := \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \pi_i$. Тогава за $M \geqslant \overline{M}$, $\boldsymbol{\pi}$ ще бъде допустима точка и за задачата

$$(DM) \quad \begin{array}{l} \max \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} \\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} \leqslant \mathbf{c} \\ \pi_i \leqslant M, \ i = 1, \ldots, m. \end{array}$$

Следователно за $M \geqslant \overline{M}$ задачата (DM) ще бъде с непразно допустимо множество. Съгласно Слабата теорема за двойнственост, съответната ѝ (M)-задача не е неограничена.

Следователно, за $M \geqslant \overline{M}$, (M)-задачата е разрешима.

За доказателството на втората част на теоремата е достатъчно да предположим, че (K) има непразно допустимо множество.

Нека $\mathbf{x}$ е произволна допустима точка за (K).

Нека $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})$ е базисно допустимо решение за (M), такова че $\overline{\mathbf{y}} \neq \mathbf{0}$. Тогава съществува $M_1 \geqslant \overline{M}$ такова че $z_{M_1}(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{x}} + M_1(\sum_{i=1}^{m} \overline{y}_i) > \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = z_{M_1}(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ и следователно $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})$ няма да бъде оптимално за (M)-задача с $M \geqslant M_1$.

Тъй като базсните допустими решения $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})$ (и в частност тези, за които $\overline{\mathbf{y}} \neq \mathbf{0}$) са краен брой, то ще съществува $\widetilde{M}$ такова че за всяко $M \geqslant \widetilde{M}$ оптималните базисни допустими решения за (M)-задачата (ако съществуват) ще бъдат от вида $(\overline{\mathbf{x}}, \mathbf{0})$.

Полагаме $M_0 := \max\{\overline{M}, \widetilde{M}\}$ и с това доказателството приключва. $\square$

§9. Класическа транспортна задача

§9.1. Икономическа постановка

Даден продукт се произвежда в пунктове $A_1, \ldots, A_m$ в количества съответно $a_1, \ldots, a_m$, а се потребява в пунктове $B_1, \ldots, B_n$ съответно в количества $b_1, \ldots, b_n$, като сумарното производство е равно на сумарното потребление, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{9.1}$$

Транспортните разходи за превоза на единица продукт от пункта A_i до пункта B_j са съответно c_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Очевидно $c_{ij} \geqslant 0$.

Задачата е пунктовете на потребление $B_1, \ldots, B_n$ да се снабдят, така че техните потребности да бъдат задоволени и общите транспортни разходи да бъдат минимални.

Условието (9.1) се нарича още *условие за баланс*. Без ограничение на общността считаме, че $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$ и $b_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$.

§9.2. Математически модел

Да означим с x_{ij} количеството продукт, с което пунктът A_i, $i = 1, \ldots, m$, ще снабди пункта B_j, $j = 1, \ldots, n$. Като означим вектора на променливите с $\mathbf{x}(x_{11}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots x_{2n}, \ldots, x_{mn})$, задачата е

$$(TP) \qquad \begin{aligned} &\min z(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \ldots, m, \\ &\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \ldots, n, \\ &x_{ij} \geqslant 0, \qquad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Следователно *транспортната задача* (TP) е задача на линейното оптимиране в каноничен вид. Броят на променливите е mn, а броят на ограниченията от тип равенство е $m + n$.

Ако в (TP) означим със $\mathbf{c}$ вектора на целевата функция, с $\widetilde{\mathbf{b}}(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)$ — вектора на дясната страна, а с $\mathbf{A}$ — съответната $(m + n) \times mn$ матрица на ограниченията, можем да запишем задачата в следния матричен вид:

$$(TP) \qquad \begin{aligned} &\min z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \mathbf{x} \\ &\mathbf{A}\mathbf{x} = \widetilde{\mathbf{b}}, \\ &\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}. \end{aligned}$$

§9.3. $(\boldsymbol{TP})$ като частен случай на линейна задача

Като се разпишат $(m+n)$-те ограничения равенства на транспортната задача

$$
\begin{array}{llllllllll}
x_{11}+\cdots+x_{1n} & & & & & & & & & = a_1, \\
& & x_{21}+\cdots+ & x_{2n} & & & & & & = a_2, \\
\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \\
& & & & & & x_{m1}+\cdots+ & & x_{mn} & = a_m, \\
x_{11} & & +x_{21} & & & & +x_{m1} & & & = b_1, \\
\quad x_{12} & & & +x_{22} & & & & +x_{m2} & & = b_2, \\
\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \\
& x_{1n} & & & +x_{2n} & & & & +x_{mn} & = b_n
\end{array}
$$

лесно се вижда, че коефициентите пред променливите са нули или единици. Всяка променлива x_{ij} участва с коефициент 1 само в две уравнения: i-то и $(m+j)$-то. Това означава, че матрицата на ограниченията $\mathbf{A}$ на (TP) съдържа само 0 и 1, а вектор-стълбовете ѝ $\mathbf{A}_{ij}$ имат точно по две координати различни от нула и това са i-та и $(m+j)$-та.

§9.4. Свойства на транспортната задача

Теорема 9.1. *Условието за баланс (9.1) е необходимо и достатъчно условие (TP) да бъде разрешима.*

Доказателство. Необходимостта е очевидна: ако $\mathbf{x}^*$ е оптимално решение на (TP), то тъй като $\mathbf{x}^*$ е допустимо, $\mathbf{x}^*$ удовлетворява всички ограничения. Като сумираме първите m ограничения за $\mathbf{x}^*$ получаваме

$$
\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^* = \sum_{i=1}^{m} a_i, \tag{9.2}
$$

а като сумираме последните n ограничения за $\mathbf{x}^*$ получаваме

$$
\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^* = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{9.3}
$$

От това, че левите страни на равенствата (9.2) и (9.3) са равни следва, че и десните им страни са равни, което е (9.1).

Обратно, ако е изпълнено (9.1) и означим $s := \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то векторът $\mathbf{x}$ с координати $x_{ij} := \dfrac{a_i b_j}{s}$ е допустим за (TP) и тя следователно е съвместима. Понеже целевата ѝ функция z е ограничена отдолу върху допустимото ѝ множество $(z \geqslant 0)$, то транспортната задача е разрешима. □

Тъй като за стойности на m и n, които не са единици (и това е естественият случай), е изпълнено $m+n \leqslant mn$, то очевидно $r(\mathbf{A}) \leqslant m+n$.

Ако умножим първите m вектор-редове на $\mathbf{A}$ с 1, а останалите ѝ n вектор-редове с -1 и ги съберем, ще получим нулевия вектор, което означава, че вектор-редовете на $\mathbf{A}$ са линейно зависими. Следователно $r(\mathbf{A}) \leqslant m+n-1$. Ще докажем

Теорема 9.2. $r(\mathbf{A}) = m+n-1$.

Доказателство. Тъй като детерминантата

$$\det \left\| \frac{\mathbf{A}_{1n}\mathbf{A}_{2n}\dots\mathbf{A}_{mn}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12}\dots\mathbf{A}_{1\,n-1}}{\text{без последната координата}} \right\| =$$

$$= \det \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0\dots0 & 1 & 1\dots1 \\ 0 & 1 & 0\dots0 & 0 & 0\dots0 \\ 0 & 0 & 1\dots0 & 0 & 0\dots0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0\dots1 & 0 & 0\dots0 \\ 0 & 0 & 0\dots0 & 1 & 0\dots0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0\dots0 & 0 & 0\dots1 \end{array} \right\| = 1$$

(развийте детерминантата по първия стълб), рангът на $\mathbf{A}$ е точно $m+n-1$. □

Следователно всяко базисно допустимо решение $\overline{\mathbf{x}}$ на (TP) ще има базис от $m+n-1$ променливи.

§9.5. Транспортна таблица. Основни понятия

Транспортната таблица (ТТ) се състои от редове, стълбове и клетки. Всяка клетка се определя с една наредена двойка числа (i,j) — номерата на реда и стълба в ТТ, в които тя се намира. С клетката (i,j) се асоциират променливата x_{ij}, транспортните разходи c_{ij} и съответният вектор-стълб $\mathbf{A}_{ij}$ на матрицата на ограниченията $\mathbf{A}$.

Базисни клетки наричамеония клетки, за които съответните променливи x_{ij} образуват базис на транспортната задача, разглеждана като задача на линейното оптимиране. Съгласно Теорема 9.2 техният брой е $m+n-1$.

Затворена начупена линия наричаме линия, образувана от отсечки по такъв начин, че всеки край на дадена отсечка от линията е край на точно още една отсечка от нея. Краищата на отсечките се наричат *върхове* на начупената линия.

Цикъл наричаме всяка затворена начупена линия с върхове в клетки на ТТ, която удовлетворява следните две условия:

а) всяка отсечка лежи изцяло в ред или в стълб на ТТ;

б) двете отсечки, които излизат от всеки връх на цикъла, лежат едната в ред, а другата в стълб на ТТ.

Съвкупност от клетки на ТТ, която съдържа поне един цикъл се нарича *циклична.* В противен случай се нарича *ациклична.* Най-общо един произволен цикъл γ може да се опише по следния начин

$$\gamma : (i_1, j_1)(i_2, j_1)(i_2, j_2) \dots (i_s, j_s)(i_1, j_s).$$

§9.6. Свойства на базисните допустими решения на класическата транспортна задача

Теорема 9.3. *Съвкупност от вектор-стълбове $\mathbf{A}_{ij}$ на матрицата $\mathbf{A}$ е линейно независима тогава и само тогава, когато съответната ѝ съвкупност от клетки в ТТ е ациклична.*

Доказателство. Нека съвкупността от вектор-стълбове $\mathbf{A}_{ij}$ на матрицата $\mathbf{A}$ е линейно независима.

Да допуснем, че съответният им набор от клетки в ТТ е цикличен, т.е. съдържа цикъл

$$\gamma : (i_1, j_1)(i_2, j_1)(i_2, j_2) \dots (i_s, j_s)(i_1, j_s).$$

Тогава

$$\mathbf{A}_{i_1j_1} - \mathbf{A}_{i_2j_1} + \mathbf{A}_{i_2j_2} + \dots + \mathbf{A}_{i_sj_s} - \mathbf{A}_{i_1j_s} = \mathbf{0}.$$

Защо това е така? Освен нулеви координати, векторът $\mathbf{A}_{i_1j_1}$ има 1 на i_1 и $m + j_1$ място. С изваждане от него на вектора $\mathbf{A}_{i_2j_1}$ се елиминира 1 на $m + j_1$ място. Координатата $m + j_1$ става равна на 0, а координатата i_2 става -1. С добавянето на вектора $\mathbf{A}_{i_2j_2}$ се елиминира 1 на i_2 място, т.е. i_2 координата става нула, но се появява 1 на $m + j_2$ място, и т. н. Накрая, с изваждането на вектора $\mathbf{A}_{i_1j_s}$ се елиминират 1 на $m+j_s$ място, появила се от добавянето на предходния вектор $\mathbf{A}_{i_sj_s}$ и 1 на i_1 място, появила се от първия вектор $\mathbf{A}_{i_1j_1}$. Получаваме, че всички координати са нули.

Следователно имаме линейна зависимост на част (а оттам и на цялата съвкупност) от вектор-стълбовете $\mathbf{A}_{ij}$, а това води до противоречие.

Обратно, нека векторите $\mathbf{A}_{ij}$ са линейно зависими. Да означим с β_{ij} съответните коефициенти в линейната комбинация, която изразява нулевия вектор чрез тях. Нека $\beta_{i_1j_1} > 0$. Това означава, че ще съществува $\beta_{i_2j_1} < 0$ (за да се компенсира положителната координата $m + j_1$ координата $\beta_{i_1j_1}$ на вектора $\beta_{i_1j_1}\mathbf{A}_{i_1j_1}$ в сумата). Аналогично трябва да съществува $\beta_{i_2j_2} > 0$ (за да се компенсира отрицателната i_2 координата $\beta_{i_2j_1}$ на вектора $\beta_{i_2j_1}\mathbf{A}_{i_2j_1}$ в сумата) и т. н. Като проследим зависимостта на индексите, виждаме че можем да построим цикъл

$$\gamma : (i_1, j_1)(i_2, j_1)(i_2, j_2) \dots (i_s, j_s)(i_1, j_s)$$

в ТТ. □

Следствие 9.1. *Ако* $\overline{\mathbf{x}}$ *е базисно допустимо решение за* (TP)*, то съвкупността от клетки в* ТТ*, съответстваща на базисните му координати, е ациклична.*

Доказателство. Знаем, че ако $\overline{\mathbf{x}}$ е базисно допустимо решение, то стълбовете на $\mathbf{A}$, съответстващи на базисните му координати, са линейно независими (Теорема 3.1) и остава да приложим Теорема 9.3. □

Следователно, ако $\overline{\mathbf{x}}$ е базисно допустимо решение (връх) за (TP) и клетките на ТТ, съответстващи на базисните му координати, запълним с тяхната стойност, а клетките, съответстващи на небазисните му координати (които, разбира се, са нули), оставим празни, то пълните клетки ще бъдат $m+n-1$ на брой и ще образуват ациклична съвкупност. Получаваме ТТ на базисното допустимо решение $\overline{\mathbf{x}}$, която означаваме с $T(\overline{\mathbf{x}})$.

Теорема 9.4. *Нека* $\overline{\mathbf{x}}$ *е базисно допустимо решение. За произволна небазисна (празна) клетка на неговата транспортна таблица* $T(\overline{\mathbf{x}})$ *съществува точно един цикъл, който я свързва с базисните (пълните) клетки на* $T(\overline{\mathbf{x}})$*.*

Доказателство. В $T(\overline{\mathbf{x}})$ базисните (пълните) клетки са $m+n-1$ на брой и образуват ациклчна съвкупност H. Нека (k,l) е празна клетка. Да я присъединим към H. Получаваме нова съвкупност $H' = H \cup (k,l)$, която е циклична, тъй като се състои от $m+n$ клетки (всеки $m+n$ стълба на $\mathbf{A}$ са линейно зависими съгласно Теорема 9.2, а на линейно зависима съвкупност от вектори съответства циклична съвкупност от клетки, съгласно Теорема 9.2). При това всеки цикъл в H' съдържа (k,l), тъй като в противен случай H би била циклична съвкупност.

За да установим единствеността, да допуснем, че съществуват два различни цикъла, свързващи (k,l) с H:

$$(k,l)(k,j_1)(i_1,j_1)\dots(i_p,j_p)(i_p,l)$$

и

$$(k,l)(k,s_1)(r_1,s_1)\dots(r_q,s_q)(r_q,l).$$

Всички клетки в тях без (k,l) са базисни за $\overline{\mathbf{x}}$. Махаме (k,l) и построяваме цикъл от базисни клетки

$$(i_p,l)(i_p,j_p)\dots(i_1,j_1)(k,j_1)(k,s_1)(r_1,s_1)\dots(r_q,s_q)(r_q,l),$$

което е в противоречие с това, че $\overline{\mathbf{x}}$ е базисно допустимо решение и базисните му клетки образуват ациклична съвкупност. □

§9.7. Разпределителен метод за решаване на (TP)

Преминаване от едно базисно допустимо решение $\overline{\mathbf{x}}$ към съседно на него базисно допустимо решение $\overline{\mathbf{x}}'$.

Нека $\overline{\mathbf{x}}$ е базисно допустимо решение за (TP) с транспортна таблица $T(\overline{\mathbf{x}})$. Нека (k,l) е празна (небазисна) клетка в $T(\overline{\mathbf{x}})$. Според Теорема 9.4 съществува единствен цикъл, който я свързва с пълните (базисните) клетки на $T(\overline{\mathbf{x}})$. Нека това е цикълът

$$\begin{array}{ll}\gamma_{kl}: & (k,l)(k,j_1)(i_1,j_1)\ldots(i_s,j_s)(i_s,l).\\ & \;\;+\quad\;\; -\quad\;\; +\;\;\ldots\;\; +\quad\;\; -\end{array}$$

Да отбележим, че в него всички клетки освен (k,l) са базисни за $\overline{\mathbf{x}}$.

На клетките на цикъла γ_{kl} присвояваме алтернативно знаците $+$ и $-$, като започнем с $+$ от клетката (k,l). Тогава клетките на цикъла γ_{kl} се разделят на две равномощни съвкупности γ_{kl}^+ и γ_{kl}^-. Пресмятаме числото

$$\overline{c}_{kl} := \sum_{(i,j)\in\gamma_{kl}^+} c_{ij} - \sum_{(i,j)\in\gamma_{kl}^-} c_{ij}.$$

и намираме

$$\overline{t} := \min_{(i,j)\in\gamma_{kl}^-} \overline{x}_{ij}.$$

Напомняме, че $\overline{x}_{ij}$ са координатите на $\overline{\mathbf{x}}$ и тъй като в съвкупността γ_{kl}^- участват само базисни клетки, то координатите $\overline{x}_{ij}$, участващи в намирането на $\overline{t}$ са базисни за $\overline{\mathbf{x}}$.

Координатите $\overline{x}'_{ij}$ на съседното базисно допустимо решение $\overline{\mathbf{x}}'$ намираме по следния начин

$$\begin{array}{ll}\overline{x}'_{ij} = \overline{x}_{ij} + \overline{t}, & (i,j) \in \gamma_{kl}^+,\\ \overline{x}'_{ij} = \overline{x}_{ij} - \overline{t}, & (i,j) \in \gamma_{kl}^-,\\ \overline{x}'_{ij} = \overline{x}_{ij}, & (i,j) \notin \gamma_{kl}.\end{array}$$

В ТТ, съответстваща на новото $\overline{\mathbf{x}}'$, се изпразва **точно една** от старите базисни клетки (клетка, принадлежаща на γ_{kl}^-, за чийто индекс се достига $\overline{t}$), а клетката (k,l) се запълва с количество $\overline{t}$, понеже $(k,l) \in \gamma_{kl}^+$ и следователно

$$\overline{x}'_{kl} = \overline{x}_{kl} + \overline{t} = 0 + \overline{t} = \overline{t}.$$

Ако минимумът при определянето на $\overline{t}$ се достигне в повече от една клетка $(i,j) \in \gamma_{kl}^-$, то само една от тези клетки – клетка (i_p,j_p) – се оставя празна (излиза от базиса), а останалите се запълват с нули (базисни нули!) в таблицата на новото $\overline{\mathbf{x}}'$.

Новополученият вектор $\overline{\mathbf{x}}'$ остава допустим за транспортната задача, тъй като разпределянето на количеството $\overline{t}$ (откъдето идва и името на метода — разпределителен метод) се извършва последователно в рамките на един ред или стълб и така се осигурява изпълнението на ограниченията равенства (т.е. $\overline{\mathbf{x}}'$ удовлетворява $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}}' = \tilde{\mathbf{b}}$), а от дефиницията на $\overline{t}$ следва, че $\overline{\mathbf{x}}' \geqslant \mathbf{0}$.

Нещо повече, $\overline{\mathbf{x}}'$ е базисно допустимо решение, тъй като съвкупността от пълните клетки H' на $\overline{\mathbf{x}}'$ се различава от съвкупността от пълните клетки H на $\overline{\mathbf{x}}$ само по това, че съдържа клетката (k,l), а не съдържа една от клетките на γ_{kl}^- — клетката (i_p, j_p). Следователно в H' с изключение на (k,l) всички останали клетки принадлежат на ациклична съвкупност. Тогава, ако в H' има цикъл, той непременно ще съдържа (k,l). Така ще получим поне два различни цикъла — този в H' (който не съдържа клетката (i_p, j_p)) и γ_{kl} (който съдържа клетката (i_p, j_p)), които свързват (k,l) с базисните клетки H на $\overline{\mathbf{x}}$, което е противоречие с Теорема 9.4.

Сравняване на $z(\overline{\mathbf{x}})$ и $z(\overline{\mathbf{x}}')$.

Ако означим

$$S := \sum_{(i,j)\notin\gamma_{kl}} c_{ij}\overline{x}_{ij}, \quad S^+ := \sum_{(i,j)\in\gamma_{kl}^+} c_{ij}\overline{x}_{ij}, \quad S^- := \sum_{(i,j)\in\gamma_{kl}^-} c_{ij}\overline{x}_{ij},$$

то

$$z(\overline{\mathbf{x}}') = \sum_{(i,j)} c_{ij}\overline{x}'_{ij} = \sum_{(i,j)\notin\gamma_{kl}} c_{ij}\overline{x}_{ij} + \sum_{(i,j)\in\gamma_{kl}^+} c_{ij}(\overline{x}_{ij}+\overline{t}) + \sum_{(i,j)\in\gamma_{kl}^-} c_{ij}(\overline{x}_{ij}-\overline{t}) =$$

$$= S + S^+ + S^- + \overline{t}\left(\sum_{(i,j)\in\gamma_{k,l}^+} c_{ij} - \sum_{(i,j)\in\gamma_{kl}^-} c_{ij}\right) = z(\overline{\mathbf{x}}) + \overline{t}\overline{c}_{kl}.$$

Критерий за оптималност на $\overline{\mathbf{x}}$.

Ако за всички празни (небазисни) за $T(\overline{\mathbf{x}})$ клетки (k,l) е изпълнено, че $\overline{c}_{kl} \geqslant 0$, то базисното допустимо решение $\overline{\mathbf{x}}$ е оптимално. В противен случай може да се премине към „не по-лошо“ съседно базисно допустимо решение $\overline{\mathbf{x}}'$. Числата $\overline{c}_{kl}$, които се пресмятат за празните (небазисните) клетки (k,l), са относителните оценки на небазисните променливи x_{kl}.

§9.8. Алгоритъм на разпределителния метод за решаване на $(\boldsymbol{TP})$

(0) Намира се начално базисно допустимо решение $\overline{\mathbf{x}}$.

(1) За всяка празна (небазисна) клетка (i,j) в таблицата $T(\overline{\mathbf{x}})$ се пресмятат относителните оценки $\overline{c}_{ij}$. Ако всички празни клетки имат $\overline{c}_{ij} \geqslant 0$, то КРАЙ, $\overline{\mathbf{x}}$ е оптимално. В противен случай се преминава към стъпка (2).

(2) Избира се празна клетка (k,l), такава че $\overline{c}_{kl} < 0$ и се преминава към съседно на $\overline{\mathbf{x}}$ базисно допустимо решение $\overline{\mathbf{x}}'$ (или към нов базис на $\overline{\mathbf{x}}$, ако $\overline{\mathbf{x}}$ е изродено). Сменя се $\overline{\mathbf{x}}$ с $\overline{\mathbf{x}}'$ и се отива на стъпка (1).

§9.9. Крайност на алгоритъма. Зацикляне. Избягване на зацикляането

Алгоритъмът на разпределителния метод е краен поради това, че имаме само краен брой базисни допустими решения. Зацикляне може да се получи само в изроден връх. Необходимо и достатъчно условие задачата да бъде изродена, е да съществува частичен баланс, т. е. баланс между производството и потреблението на непълни групи производители и потребители. Зацикляне в малки учебни примери на практика не се получава, а в големи задачи зацикляането може да се избегне, като предварително задачата се преобразува в неизродена чрез разрушаване на частичните баланси и преминаване към т.нар. ε-задача

$$
(TP_\varepsilon) \qquad \begin{aligned}
&\min z(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\\
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a'_i, \quad i = 1,\dots,m,\\
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b'_j, \quad j = 1,\dots,n,\\
&x_{ij} \geqslant 0, \qquad i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n,
\end{aligned}
$$

където $a'_i = a_i + \varepsilon$, $i = 1,\dots m$, $b'_j = b_j$, $j = 1,\dots,n-1$, $b'_n = b_n + m\varepsilon$.

§9.10. Методи за намиране на начално базисно допустимо решение за ($\boldsymbol{TP}$)

Метод на северозападния ъгъл.

Започва се от северозападната клетка на ТТ — клетката $(1,1)$. На базисната променлива x_{11} се присвоява стойност $\overline{x}_{11} := \min\{a_1, b_1\}$.

1) Ако $a_1 < b_1$, то $b_1 \Leftarrow b_1 - a_1$ и се зачертава 1-ия ред (реда на a_1) от ТТ.

2) Ако $b_1 < a_1$, то $a_1 \Leftarrow a_1 - b_1$ и се зачертава 1-ия стълб (стълба на b_1) от ТТ.

3) Ако $a_1 = b_1$, то или $b_1 \Leftarrow 0$ и се зачертава 1-ия ред от ТТ, или $a_1 \Leftarrow 0$ и се зачертава 1-ия стълб от ТТ.

Така размерността на ТТ се намалява с единица. За новата таблица процедурата се повтаря и така до пълно изчерпване.

В третия случай на следващата итерация ще се получи нулева стойност на съответната базисна променлива, т. е. началното базисно допустимо решение ще бъде изродено.

Запълването на клетките става от крайната горе вляво (северозападната клетка) до крайната долу вдясно, като се върви алтернативно в редове или стълбове, при което очевидно се получава ациклична съвкупност от $m + n - 1$ клетки. Следователно, стига се до базисно допустимо решение.

Метод на минималния елемент.

Започва се от клетка (i_0, j_0) на ТТ с минимални транспортни разходи, т. е. от клетка, за която $c_{i_0 j_0} = \min c_{ij}$. На базисната променлива $x_{i_0 j_0}$ се присвоява стойност $\overline{x}_{i_0 j_0} := \min\{a_{i_0}, b_{j_0}\}$.

1) Ако $a_{i_0} < b_{j_0}$, то $b_{j_0} \Leftarrow b_{j_0} - a_{i_0}$ и се зачертава ред i_0 (реда на a_{i_0}) от ТТ.

2) Ако $b_{j_0} < a_{i_0}$, то $a_{i_0} \Leftarrow a_{i_0} - b_{j_0}$ и се зачертава стълб j_0 (стълба на b_{j_0}) от ТТ.

3) Ако $a_{i_0} = b_{j_0}$, то или $b_{j_0} \Leftarrow 0$ и се зачертава ред i_0 от ТТ, или $a_{i_0} \Leftarrow 0$ и се зачертава стълб j_0 от ТТ.

Така размерността на ТТ се намалява с единица. За новата таблица процедурата се повтаря и така до изчерпване.

В третия случай в някоя от следващите итерации ще получим нулева стойност на базисна променлива и началното базисното допустимо решение ще бъде изродено.

Запълването на клетките става така, че на всяка итерация се елиминира ред или стълб и не е възможно да се получи цикъл. Следователно получава се базисно допустимо решение.

Поради факта, че методът на минималния елемент отчита транспортните разходи, а методът на северозападния ъгъл не, вероятността първият да намери начално базисно допустимо решение, което е по-близо до оптималното, е по-голяма.

§9.11. Целочисленост на решението на $(\boldsymbol{TP})$

Матрицата на ограниченията $\mathbf{A}$ на транспортната задача (TP) е от специален вид. Всички нейни минори са детерминанти, чиято стойност е 0, 1 или -1. Правоъгълна матрица с това свойство се нарича напълно (или абсолютно) унимодулярна. Т.е. матрицата на ограниченията $\mathbf{A}$ на транспортната задача (TP) е напълно унимодулярна. Напълно унимодулярните матрици играят важна роля в теорията на целочисленото линейно оптимиране. Базисните решения на линейни системи $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, матрицата $\mathbf{A}$ на които е напълно унимодулярна се получават само чрез събирания и изваждания на десните страни на уравненията. Следователно, линейни задачи, чиито ограничения са от вида $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, където матрицата $\mathbf{A}$ е напълно унимодулярна, а векторът $\mathbf{b}$ е с координати, които са цели числа имат целочислени базисни допустими решения и в частност при решаването им със стандартни средства на линейното оптимиране както например симплекс метода полученото оптимално базисно допустимо решение е целочислено. Следователно, ако векторът дясна част $\widetilde{\mathbf{b}}(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)$ на транспортната задача (TP) е с целочислени координати, то всичките оптимални базисни допустими решения на задачата ще бъдат целочислени.

Матрицата на ограниченията на транспортната задача всъщност е матрица на инцидентност на двудолен неориентиран граф. Двудолен или биграф е такъв граф, върховете на който могат да бъдат разделени на две множества така че всяко ребро на графа да съединява връх от едното множество с връх от другото множество, т.е. няма ребра, съединяващи върхове от едно и също множество. В случая на транспортната задача едното множество върхове са пунктовете на производство, а другото – пунктовете на потребление. Всяка матрица на инцидентност на двудолен неориентиран граф е напълно унимодулярна. Напълно унимодулярна е и всяка матрица на инцидентност на произволен ориентиран граф.

§10. Дискретно оптимиране

Ако се разгледат внимателно оптимизационните задачи, ясно се забелязва, че когато обектът на изследване е природно явление (т.е. има естествен произход), то задачите са непрекъснати. Когато се оптимизират структури, създадени от човека, почти винаги възниква дискретност. Това е резултат от много фактори – стандиртизация и унификация, серийност в производството и управлението, създаване на големи структури, в които процесите са прекъснати и квантувани и като такива си взаимодействат – транспорт, комуникации, различни мрежови образувания и т.н. и т.н.

В тези случаи възникват т.нар. дискретни (в частност целочислени) оптимизационни задачи, чийто най-общ математически модел е:

$$\max / \min \,\{f(x):\ x \in \Omega\},$$

където Ω е крайно или изброимо множество.

Най-често дискретността е върху отделните променливи:

$$\max\,\{f(x_1,\dots,x_n):\ g_i(x_1,\dots,x_n)\leqslant b_i,\ i=1,\dots,m,\ x_j\in\Omega_j,\ j=1,\dots,n\}$$

и ако f, g_i, $i = 1,\dots,m$, са линейни функции на n променливи, а Ω_j, $j = 1,\dots,n$, са множества от цели числа получаваме т.нар. линейна целочислена оптимизационна задача

$$\max\left\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}:\ \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leqslant b_i,\ i=1,\dots,m,\ 0 \leqslant x_j \leqslant d_j\ \text{ и цели},\ j=1,\dots,n\right\}.$$

Естествено (и най-често) част от променливите приемат непрекъснати стойности – тогава говорим за смесено-целочислена задача. Тя възниква най-често при оптимизация на икономически и производствени процеси.

§10.1. Оптимизационни модели на дискретни задачи

Ще разгледаме някои класически модели, които са важни и от теоретична гледна точка.

Задача за назначение. Във фирма има n свободни работни места, за които кандидатстват n кандидати. Знаем c_{ij} – колко кандидатът i е годен за място j.

Въвеждаме променливите

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако кандидатът } i \text{ заема място } j,\\ 0, & \text{ако кандидатът } i \text{ не заема място } j.\end{cases}$$

Търсим $\max\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ (максималната полза) при ограничения

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \text{ кандидатът } i \text{ заема точно едно място },$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \text{ длъжността } j \text{ се заема от точно един кандидат },$$
$$x_{ij} \in \{0, 1\}.$$

Задача за раницата. Тя носи името си от желанието на крадеца да максимизира печалбата си като реши кои предмети с цени c_j и обем a_j да открадне като разполага с раница с обем b.

Търсим $\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ (максималната печалба)

при ограничения

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b,$$
$$0 \leqslant x_j \text{ и цели}, \ j = 1, \dots, n.$$

При горната формулировка говорим за целочислена задача за раницата. Ако $x_j \in \{0, 1\}$ говорим за двоична задача. Ако се въведе и ограничение за тежест

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leqslant p,$$

и вече имаме две ограничения – за обем и за тежест, тя се нарича двумерна задача за раницата, а при повече ограничения – за многомерна задача за раницата.

Задача за покритие на граф. Нека $G(V, E)$ е граф с върхове $v_i \in V$, $i = 1, \dots m$ и ребра $e_j \in E$, $j = 1, \dots, n$ и матрица на инцидентност с елементи

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако реброто } e_j \text{ е инцидентно с върха } v_i, \\ 0, & \text{ако реброто } e_j \text{ не е инцидентно с върха } v_i. \end{cases}$$

Намирането на най-малкия брой ребра (минималното покритие), такива че всеки връх да е инцидентен с поне едно от тях, се формулира така:

търсим $\min \sum_{j=1}^{n} x_j$

при ограничения

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant 1, \quad i = 1, \dots, m$$
$$x_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n.$$

Тогава тези ребра e_j, за които в решението x_j имат стойност 1 образуват търсеното покритие.

Задача от подобен тип е и следната: трима кандидати k_1, k_2, k_3 кандидатстват за работа в преводаческа фирма, която търси да назначи преводачи по английски, немски, френски, руски и английски език и всеки от кандидатите би получил заплата c_1, c_2, c_3 в зависимост от квалификацията си, то целта на фирмата е да осигури преводи по всеки един от езиците и то на минимална цена. Ако владеенето от кандидатите на съответните езици е дадено с таблицата

език	k_1	k_2	k_3
английски	1		1
немски		1	1
френски	1	1	
руски		1	1
китайски	1		1

то моделът е следният

$$\begin{array}{lcl} \min c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 & \text{или} & \min c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ & & \\ x_1 + x_3 \geqslant 1 & & x_1 + x_3 \geqslant 1 \\ x_2 + x_3 \geqslant 1 & & x_2 + x_3 \geqslant 1 \\ x_1 + x_2 \geqslant 1 & & x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ x_2 + x_3 \geqslant 1 & & x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,2,3. \\ x_1 + x_3 \geqslant 1 & & \\ x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,2,3. & & \end{array}$$

Задача за четирите цвята. След откритието на Гутенберг започват да се печатат и политически карти – всяка държава се оцветява с отделен цвят. Веднага забелязали, че каквато и да е картата четири цвята са достатъчни, за да няма съседни държави, оцветени с еднакви цветове. Този факт бе доказан едва в наше време, като доказателството му и досега не е напълно прието като чисто математическо, защото при него се използва компютърна проверка на варианти.

Нека политическата карта представим като граф G с върхове $x_i \in V$, $i = 1,\dots n$ като върховете на графа са държавите, а $A = \{a_{ij}\}$ е матрицата на съседство на графа, т.е. $a_{ij} = 1$, ако x_i и x_j са свързани с ребро (т.е. държавите x_i и x_j имат обща граница) за $i, j = 1,\dots n$ и $a_{ij} = 0$ в противен случай. Въвеждаме променливите

$$z_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{ако върхът } x_i \text{ е оцветен с цвета } k, \\ 0, & \text{ако върхът } x_i \text{ не е оцветен с цвета } k. \end{cases}$$

Тогава ограниченията са

$$\sum_{k=1}^{t} z_{ik} = 1,\ i = 1,\dots,n \qquad (\text{единствен цвят за връх})$$

и

$$L(1 - z_{ik}) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_{jk} \geqslant 0, \quad i = 1,\dots,n,\ k = 1\dots,t,$$

където числото $t \geqslant 4$, а L е число по-голямо от броя на съседните върхове на връх с най-голям брой такива, т.е. $L > \max\limits_i \sum\limits_j a_{ij}$.

При тези ограничения търсим

$$\min \sum_{k=1}^{t} n^k \sum_{i=1}^{n} z_{ik}.$$

Трябва да отбележим, че политическата карта поражда планарен граф (или още плосък граф), т.е. граф, който може да бъде изобразен в равнината така, че ребрата му да не се пресичат. За графи, които не са планарни твърдението за четирите цвята не е вярно.

Задача за търговския пътник. Имаме пълен граф с n върха и c_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$ е разстоянието между връх i и връх j. Търси се хамилтонов цикъл в графа (цикъл, който минава през всички върхове на графа точно по веднъж), който има минимална сума от разстоянията по ребрата си. С други думи, търговският пътник тръгва от връх 1 и преминавайки през всеки връх по веднъж трябва да се върне в 1 като при това измине най-кратък път. Въвеждаме

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако от връх } i \text{ отива във връх } j, \\ 0, & \text{ако от връх } i \text{ не отива във връх } j. \end{cases}$$

Търсим

$$\min \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, n \text{ (във всеки връх се влиза веднъж)},$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, n \text{ (от всеки връх се излиза веднъж)}, x_{ij} \in \{0, 1\}.$$

Дотук ограниченията не са достатъчни, за да гарантират, че полученият път ще представлява хамилтонов цикъл – той може да се състои от няколко несвързани цикли. За да бъде избегната тази ситуация се въвеждат още n цели променливи $u_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$ и ограничения

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leqslant n - 1, \quad i, j = 2, \ldots, n.$$

Ако има подцикъл, несъдържащ върха 1, то като съберем поредните ограничения по неговите ребра, u_i и u_j ще се унищожат и ще стигнем до противоречивото неравенство $n \leqslant n-1$, така че не може в решението да има цикъл неминаващ през върха 1. За цикъл през връх 1 избираме последователно стойности за u_i и u_j по него така че $u_i - u_j = -1$ и след като отчетем факта, че върхът 1 не влиза в тези ограничения получаваме верни равенства за хамилтоновия цикъл.

Задача за оптимален разкрой. Нека разполагаме с метални пръти с дължини $l_1, \ldots, l_k$ и от тях трябва да се отрежат елементи с дължини $a_1, \ldots, a_p$ съответно $n_1, \ldots, n_p$ броя. Въвеждаме променливите x_{ij} – брой елементи от вид $i = 1, \ldots, p$, които ще отрежем от прът $j = 1, \ldots, k$ и променливите $y_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, \ldots, k$.

Търсим

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{j=1}^{k} y_j \\
&\sum_{i=1}^{p} a_i x_{ij} \leqslant y_j l_j, \quad j = 1, \ldots, k, \\
&\sum_{j=1}^{k} x_{ij} = n_i, \quad i = 1, \ldots, p,\ 0 \leqslant x_{ij} \text{ и цели}, \\
&y_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \ldots, k.
\end{aligned}
$$

Първата група ограничения осигурява това, че ще режем от минимален брой пръти и няма да режем повече от дължината на пръта. Втората група гарантира броя на елементите.

Този модел за първи път е формулиран от руския математик Леонид Канторович през 1937-38 г. Той предлага и метод за решаване – вариант на симплекс метода.

Оптимизация на маршрути. До един събирателен център S (завод, град) трябва да се превозват пътници от няколко места, като всички те са свързани с достатъчно гъста мрежа от пътища. Нека a_i, $i = 1, \ldots, n$ е броят пътници от пункт i до S, а b е броят места в автобуса. Един от възможните начини за построяване на оптимизационен модел се заключава в определяне на множество от възможни (допустими) маршрути, което има на няколко порядъка по-голям брой маршрути от действително необходимите и да се оптимизира в това множество. Отделен въпрос е какво значи „допустим“. Например, психологическо изследване е установило, че когато човек пътува до работното си място повече от 45 мин. той рязко се демотивира и т.н.

Нека x_{ij} е броят на пътниците от пункт $i = 1, \ldots, n$ по маршрут $j = 1, \ldots, m$. Нека M_i е индексното множество на всички маршрути, минаващи през пункт i, а P_j е индексното множество на всички пунктове по маршрут j и нека $y_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, \ldots, m$.

Ограниченията $\displaystyle\sum_{j \in M_i} x_{ij} = a_i, i = 1, \ldots, n$ гарантират, че маршрутите праз пункт i ще поемат a_i пътници, а $\displaystyle\sum_{i \in P_j} x_{ij} \leqslant y_j b$, $j = 1, \ldots, m$ гарантират, че ако маршрутът се реализира (т.е. ако $y_j = 1$), то автобусът няма да се препълни. Търсим $\displaystyle\min_j \sum y_j$, което сочи, че ще използваме минимален брой автобуси.

В случай, че на разположение са няколко вида автобуси (да речем два) $b_1 < b$ и искаме при непълен голям автобус да използваме помалкия, правим следното: въвеждаме $\overline{y}_j \in \{0,1\}$, $j = 1, \dots m$ и в ограниченията неравенства променяме десните страни на $\leqslant y_j b + \overline{y}_j b_1$ и добавяме ограничения $y_j + \overline{y}_j \leqslant 1$, $j = 1, \dots m$ като търсим $\min \sum_j (y_j + c\overline{y}_j)$, където $0 < c < 1$.

Матрицата на ограниченията на тази задача е напълно унимодулярна (всичките ѝ минори са детерминанти, които имат стойност 0, 1 или -1). Известно е, че задачи на линейното оптимиране с ограничения $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, в които матрицата на ограниченията е абсолютно унимодулярна, а векторът $\mathbf{b}$ е с целочислени координати имат целочислени базисни допустими решения и по тази причина могат да бъдат решени със стандартни средства като симплекс метода. В такива задачи изискването за целочисленост на x_{ij} може да отпадне. Забележете, че същото свойство притежава и класическата транспортна задача.

§10.2. Някои полезни похвати

При решаването на някои дискретни задачи се налага преодоляването на различни трудности. Тук ще се спрем на някои от тях.

Задачи с фиксирани добавки се срещат в случаите, когато към целевата функция се добавя фиксирана стойност, в случай че дадена променлива е различна от нула, независимо от това каква точно е стойността на променливата (най-честият пример е таксуването в такситата). В целевата функция това може да се отрази така:

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n} d_j z_j \right\},$$

а в ограниченията $0 \leqslant x_j \leqslant U z_j$, $j = 1, \dots, n$, $z_j \in \{0,1\}$, където U е достатъчно голямо число.

Това гарантира, че когато $x_j > 0$, то $z_j = 1$ и фиксираната добавка d_j влиза в целевата функция, а ако $x_j = 0$, то задължително $z_j = 0$ тъй като търсим минимум, а добавката $d_j > 0$.

Различни логически ограничения водят до ***ограничения от тип или-или***. Такова например е условието, ако едната от две променливи е положителна, то другата задължително да бъде 0. Тогава избираме достатъчно голямо число U и двоична променлива $z \in \{0,1\}$ и въвеждаме ограничения

$$0 \leqslant x_1 \leqslant Uz,$$

$$0 \leqslant x_2 \leqslant U(1-z).$$

Ако ***целевата функция е от специален вид***, например

$$\max \sum_j c_j x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k},$$

и променливите $x_j \in \{0,1\}$, то можем да заменим тази нелинейна функция с линейна като за всяко събираемо от нея прибавим ограничения

$$\frac{x_{j_1} + x_{j_2} + \cdots + x_{j_k}}{k} = z_j + y_j, \quad z_j \in \{0,1\}, \quad 0 \leqslant y_j \leqslant 1 - \frac{1}{k}$$

и новата целева функция е $\max \sum_{j}^{n} c_j z_j$.

Да отбележим, че $z_j = 1$ само ако всички $x_{j_1} = x_{j_2} = \cdots = x_{j_k} = 1$. В противен случай $z_j = 0$ и $y_j = \dfrac{x_{j_1} + x_{j_2} + \cdots + x_{j_k}}{k} \leqslant \dfrac{k-1}{k} = 1 - \dfrac{1}{k}$.

Подобни трудности постоянно възникват в практически задачи – нелинейни или прекъснати целеви функции, несвързани и неизпъкнали допустими множества и др.

§11. Метод на отсичащите хиперравнини

Целочисленото оптимиране е дял от математическото оптимиране, който се занимава с оптимизационни задачи, на които всички или някои от променливите трябва да приемат само цели стойности. Една задача наричаме ***целочислена*** ако всички нейни променливи трябва да приемат цели стойности. Ако това условие се отнася само до някои от променливите на задачата, тя се нарича ***смесено целочислена задача***.

Методите за решаване на целочислени линейни оптимизационни задачи могат да се разделят на два вида – методи на отсичането и комбинаторни методи. При ***методите на отсичането*** като изходна се взима така наречената задача с отслабени ограничения (без тези за целочисленост). Чрез добавянето на специални допълнителни ограничения, които отчитат изискването за целочисленост допустимото множество на отслабената задача се деформира дотогава, докато координатите на оптималното решение станат целочислени. С всяко допълнително ограничение се отсича някаква част от допустимото множество, в която обаче няма точки с цели координати.

В основата на ***комбинаторните методи*** лежи идеята за претърсването на всички допустими точки на целочислената задача. Разбира се, най-напред се разглежда проблема за разработка на такива тестови процедури, които позволяват непосредствено да се разглеждат само част от тези допустими точки, а останалите да се отчитат косвено, за да не се стига до пълно изчерпване. В случай че целочислените променливи са булеви (приемат само стойности 0 или 1) се прилагат комбинаторни методи. Булевите свойства на променливите съществено опростяват намирането на решение.

§11.1. Метод на Гомори

От историческа гледна точка това е първият алгоритъм за решаване на дискретни линейни оптимизационни задачи. Той е метод на отсичането. Разработен е от Гомори през 1957-58 год. като метод за решаване на линейни целочислени задачи.

Най-общо идеята е следната: нека търсим

$$\begin{aligned}&\min z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\\ &\quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,,\\ &\quad 0 \leqslant x_j \text{ и цели },\ j = 1, \ldots, n,\end{aligned}$$

където $\mathbf{A}$ е $(m \times n)$ матрица, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m_+$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ е n-мерен вектор на променливите. Това е канонична задача с допълнително условие за целочисленост върху всички променливи.

Знаем, че ограниченията $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $0 \leqslant x_j$, $j = 1, \ldots, n$ (без целочисленост) представляват изпъкнало многостенно множество $M := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$. Да означим множеството от точки с цели координати в M с Ω. Очевидно Ω е допустимото множество на дадената целочислена задача. Ако означим с M' изпъкналата обвивка на Ω, тя също ще бъде изпъкнало многостенно множество. Задачата

$$\min\left\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} :\ \mathbf{x} \in M'\right\}$$

очевидно е еквивалентна на изходната и е линейна оптимизационна задача, която можем да решим със симплекс метода. Очевидно полученото решение ще бъде целочислено. Оказва се обаче, че намирането на изпъкналата обвивка M' е изключително сложна задача – по-сложна от изходната. Идеята на Гомори се състои в това, че не е необходимо да търсим цялата изпъкнала обвивка M', а само тази част от нея, която се намира „около“ непрекъснатото решение на линейната задача. Това се постига чрез последователни „отсичания“ от изходното многостенно множество M чрез т.нар. правилни отсичащи хиперравнини. Всяка нова хиперравнине е ново линейно ограничение, което не се удовлетворява от непрекъснатото решение (т.е. тя го отсича от M), но не отсича нито една точка от M с цели координати. Всеки път се решава получената нова линейна задача и се предполага, че в края на процеса поредното решение ще се окаже целочислено, с което ще сме решили изходната задача.

Необходимо условие за прилагането на метода на Гомори е всички коефициенти на матрицата на ограниченията и десните части на ограниченията да бъдат цели числа.

Ще опишем (без доказателство) построяването на правилно отсичане.

Нека е решена отслабената задача, съответна на изходната (с премахнато условие за целочисленост на променливите):

$$\begin{aligned} &\min z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ &\quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\,, \\ &\quad 0 \leqslant x_j,\ j = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

и нека полученото оптимално базисно допустимо решение е $\overline{\mathbf{x}}$ с базисна матрица $\mathbf{B} = [\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m]$. От базисния вид на задачата спрямо оптималния базис имаме, че базисните променливи на решение на системата се изразяват чрез небазисните като

$$x_i = \overline{x}_i - \sum_{j \in N} w_{ij} x_j, \quad i = 1, \ldots, m,$$

където $\mathbf{w}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$ за $\mathbf{A}_j$, който е j-ият стълб на матрицата $\mathbf{A}$, а w_{ij} е i-та координатата на вектора $\mathbf{w}_j$ за $i = 1, \ldots, m$.

Ако $\overline{\mathbf{x}}$ е с целочислени координати то очевидно ще бъде решение и на изходната задача. Нека сега случаят не е такъв и например координатата му $\overline{x}_i$ не е цяло число. Очевидно става дума за базисна координата тъй като небазисните са нули. Нека представим $\overline{x}_i = [\overline{x}_i] + \{\overline{x}_i\}$, където $[\overline{x}_i]$ е цяло число, а $0 < \{\overline{x}_i\} < 1$ и да представим $w_{ij} = [w_{ij}] + \{w_{ij}\}$, където $[w_{ij}]$ е цяло число, а $0 \leqslant \{w_{ij}\} < 1$ (да обърнем внимание, че ако $w_{ij} = \frac{7}{4}$, то $[w_{ij}] = 1$, а $\{w_{ij}\} = \frac{3}{4}$, докато ако $w_{ij} = -\frac{7}{4}$, то $[w_{ij}] = -2$, а $\{w_{ij}\} = \frac{1}{4}$). Заместваме в горното изразяване на x_i и получаваме

$$x_i = [\overline{x}_i] - \sum_{j \in N} [w_{ij}] x_j + \{\overline{x}_i\} - \sum_{j \in N} \{w_{ij}\} x_j$$

или

$$x_i - [\overline{x}_i] + \sum_{j \in N} [w_{ij}] x_j = \{\overline{x}_i\} - \sum_{j \in N} \{w_{ij}\} x_j.$$

Тъй като искаме координатите на $\mathbf{x}$ да имат цели стойности, то лявата част на равенството трябва да бъде цяло число. Следователно и дясната част на равенството трябва да бъде цяло число. Освен това $\sum\limits_{j \in N} \{w_{ij}\} x_j \geqslant 0$ понеже $x_j \geqslant 0$ и $w_{ij} \geqslant 0$ за всяко j. Оттук

$$\{\overline{x}_i\} - \sum_{j \in N} \{w_{ij}\} x_j \leqslant \{\overline{x}_i\} < 1$$

или

$$\{\overline{x}_i\} - \sum_{j \in N} \{w_{ij}\} x_j \leqslant 0$$

тъй като трябва да бъде цяло число.

Отсичането на Гомори е

$$s_i = \sum_{j \in N} \{w_{ij}\} x_j - \{\overline{x}_i\}$$

като $s_i \geqslant 0$ е неотрицателна променлива, която трябва да приема цели стойности.

Понеже за оптималното решение $\overline{\mathbf{x}}$ имаме че небазисните му координати $\overline{x}_j = 0$ за $j \in N$, то като заместим в отсичането получаваме $s_i = -\{\overline{x}_i\} < 0$, т.е. отрицателна стойност на променливата s_i. Тъй като трябва $s_i \geqslant 0$ имаме че $\overline{\mathbf{x}}$ не удовлетворява новото ограничение или с други думи казано то отсича $\overline{\mathbf{x}}$ от допустимото множество на отслабената задача. Налага се да се направи реоптимизация върху новото допустимо множество. За целта се използва вариант на симплекс метода наречен двойнствен симплекс метод.

И така, всеки път се решава получената нова линейна задача и се предполага, че в края на процеса поредното получено решение ще се окаже целочислено, с което ще бъде решена изходната целочислена задача.

Пример.

$$\max \{21x_1 + 11x_2 : \; 7x_1 + 4x_2 + x_3 = 13, \; 0 \leqslant x_j\text{-цели}, \; j = 1,2,3\}.$$

Свеждаме дадената зада до канонична задача като я направим задача за минимум и отслабим условието за целочисленост и получаваме

$$\min -21x_1 - 11x_2$$
$$7x_1 + 4x_2 + x_3 = 13,$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0.$$

Оптималният базис е $\{x_1\}$, в което може да се убедим след като решим системата относно x_1, заместим го в целевата функция и получим неотрицателни коефициенти пред небазисните x_2 и x_3:

$$\min x_2 + 3x_3 - 39$$
$$x_1 + \tfrac{4}{7}x_2 + \tfrac{1}{7}x_3 = \frac{13}{7},$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0.$$

Следователно оптималното решение е $\overline{\mathbf{x}} = \left(\frac{13}{7}, 0, 0\right)$ и $z^* = -39$. Очевидно $\overline{x}_1$ не е цяло. От неговото уравнение изразяваме $x_1 = -\dfrac{4}{7}x_2 - \dfrac{1}{7}x_3 + 1 + \dfrac{6}{7}$, за да получим отсичането

$$s_1 = \frac{4}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3 - \frac{6}{7}.$$

Трябва да решим задачата с добавеното отсичане

$$\begin{aligned}
&\min x_2 + 3x_3 - 39\\
&x_1 + \frac{4}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3 \qquad = \frac{13}{7}\\
&\quad \frac{4}{7}x_2 \ + \frac{1}{7}x_3 - s_1 = \frac{6}{7},\\
&x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0, s_1 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Оптималният базис е $\{x_1, x_2\}$, в което може да се убедим след като решим системата относно x_1 и x_2, заместим ги в целевата функция и получим неотрицателни коефициенти пред небазисните x_3 и s_1:

$$\begin{aligned}
&\min \frac{11}{4}x_3 + \frac{7}{4}s_1 - 37\frac{1}{2}\\
&x_1 \qquad\qquad + \ s_1 = 1,\\
&\quad x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{7}{4}s_1 = \frac{3}{2},\\
&x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0, s_1 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Следователно оптималното решение е $\overline{\mathbf{x}} = \left(1, \dfrac{3}{2}, 0, 0\right)$ и $z^* = -37\frac{1}{2}$. Очевидно $\overline{x}_2$ не е цяло. От неговото уравнение изразяваме $x_2 = -\dfrac{1}{4}x_3 +$

$\frac{7}{4}s_1 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}x_3 + \left(2 - \frac{1}{4}\right)s_1 + 1 + \frac{1}{2}$, за да получим отсичането

$$s_2 = \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{2}.$$

Трябва да решим задачата с добавеното отсичане

$$\begin{aligned}
&\min \frac{11}{4}x_3 + \frac{7}{4}s_1 - 37\frac{1}{2}\\
&x_1 \qquad\qquad + \; s_1 \qquad = 1,\\
&\quad x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{7}{4}s_1 \qquad = \frac{3}{2}\\
&\qquad\qquad \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}s_1 - s_2 = \frac{1}{2},\\
&x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ s_1 \geqslant 0,\ s_2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Оптималният базис е $\{s_1, x_2, x_3\}$, в което може да се убедим след като решим системата относно s_1, x_2 и x_3, заместим ги в целевата функция и получим неотрицателни коефициенти пред небазисните x_1 и s_2:

$$\begin{aligned}
&\min x_1 + 11s_2 - 33\\
&\quad x_1 \qquad\quad + s_1 \qquad = 1,\\
&\quad 2x_1 + x_2 \qquad\quad + \; s_2 = 3\\
&- \; x_1 \qquad + x_3 \quad - 4s_2 = 1,\\
&x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ s_1 \geqslant 0,\ s_2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Оптималното решение е $\overline{\mathbf{x}} = (0, 3, 1, 1, 0)$ и $z^* = -33$, откъдето получаваме оптималното целочислено решение $\mathbf{x}^*(0, 3, 1)$ на изходната целочислена задача и оптималната ѝ стойност на целевата функция 33, с което изчислителният процес приключва.

Методът на отсичащите равнини не получава широко разпространение поради причини, които прозират и от нашето кратко описание – много дълъг изчислителен процес, при който неминуемо се губи точност, няма гаранция за сходимост на процеса в общия случай и т.н.

§12. Метод на разклоняване и граници

Методът на разклоняване и граници (Branch & Bound) е комбинаторен метод, който предлага един универсален подход за решаване на почти всички видове дискретни оптимизационни задачи. Идеята за създаването му възниква през 1963 год. след една забавна история, при която фирма публикува с рекламна цел задачата за търговския пътник без да знае нито какво е решението, нито как се решават подобни задачи. След нарастващ скандал от страна на клиентите да получат наградата за това, че са изпратили верен отговор, фирмата се обръща към професионални математици, които решават въпросния пример и предлагат новия метод.

Нека търсим

$$\max\{f(\mathbf{x}):\ \mathbf{x}\in\Omega\},$$

където Ω е крайно дискретно множество, а върху функцията $f(\mathbf{x})$ не се налагат никакви ограничения. Нека Ω може да се разбие на краен брой непресичащи се подмножества

$$\Omega=\bigcup_i \Omega_i,\quad \Omega_k\bigcap\Omega_j=\emptyset \text{ за } k\neq j.$$

Нека $\Omega_i\subset\overline{\Omega}_i$. Наричаме $\overline{\Omega}_i$, разширение на Ω_i и въвеждаме означенията

$$\max\{f(\mathbf{x}):\ \mathbf{x}\in\Omega_i\}\ \text{ – задача } A_i;$$

$$\max\left\{f(\mathbf{x}):\ \mathbf{x}\in\overline{\Omega}_i\right\}\ \text{ – задача } \overline{A}_i \text{ (оценъчна задача) }.$$

Същественото тук е, че $\max\left\{f(\mathbf{x}):\ \mathbf{x}\in\overline{\Omega}_i\right\}\geqslant\max\{f(\mathbf{x}):\ \mathbf{x}\in\Omega_i\}$, т.е. оптималната стойност на оценъчната задача $\overline{A}_i$ е по-голяма от тази на A_i. Това е естествено следствие от $\overline{\Omega}_i\supset\Omega_i$.

Начинът за конструиране на оценъчната задача е специфичен за всеки отделен вид дискретна задача, но общото е, че тя се решава по-лесно от изходната задача.

§12.1. Описание на алгоритъма Branch & Bound

Същността на алгоритъма е описана чрез дадената на фигура 12.1 блок-схема.

Въведени са и следните означения:

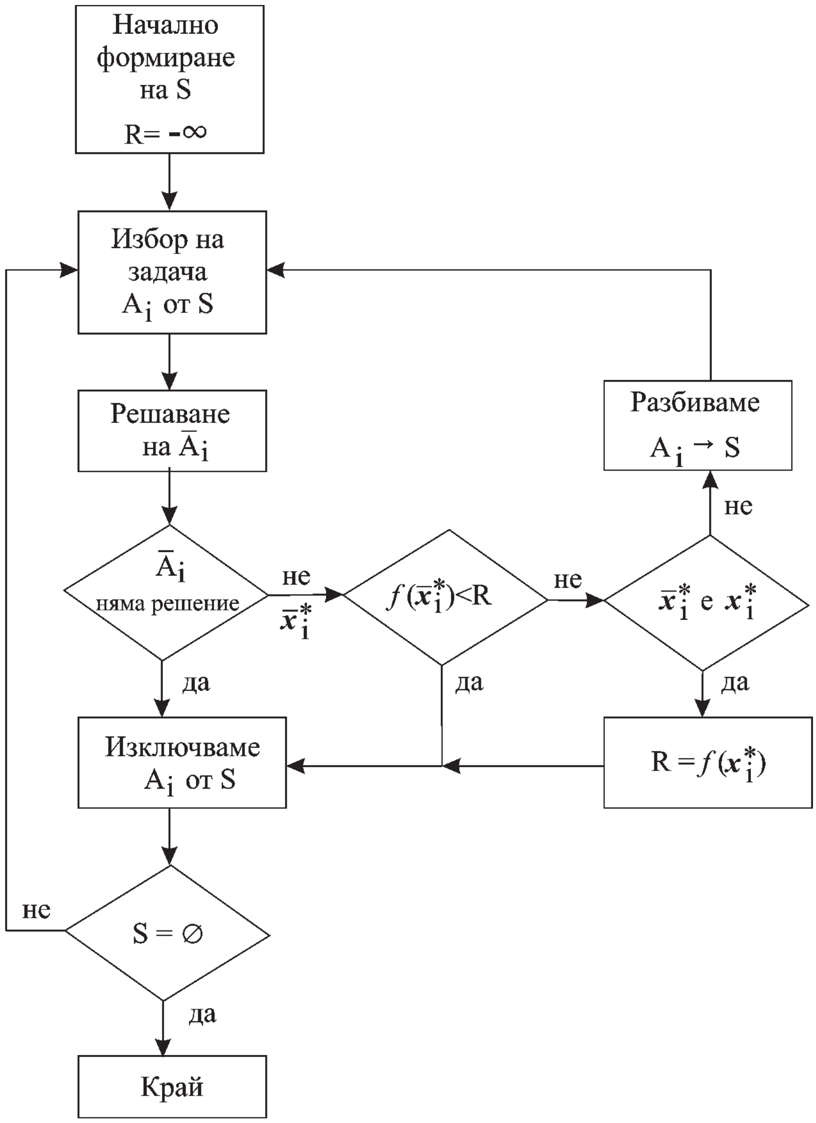
R – рекорд; $R=\max\{f(\mathbf{x}^*),-\infty\}$, където $\mathbf{x}^*$ е допустима точка за изходната задача A;

S – списък от задачи, получени при разбиването на A на $A_1,A_2,\dots,A_k$, евентуално разбиването на A_j на $A_{j_1},A_{j_2},\dots,A_{j_p}$ и т.н.

Някои обяснения, които при внимателно разглеждане на блок-схемата са очевидни:

- ако задачата $\overline{A}_i$ няма решение, то и задачата A_i няма решение;
- ако $f(\overline{\mathbf{x}}_i^*) < R$, то без да проверяваме дали $\overline{\mathbf{x}}_i^*$ е решение и на A_i (т.е. дали $\overline{\mathbf{x}}_i^* = \mathbf{x}_i^*$ сме сигурни, че и нейната оптимална стойност е под рекорда;
- при „край“, ако $R = -\infty$, то задачата A няма решение, иначе решение е това, при което е получен последният рекорд.

Тук възникват редица въпроси, свързани с ефективността на алгоритъма. Колко „лесно“ се решават задачите $\overline{A}_i$, каква е разликата между техните оптимални стойности и тези на A_i, т.е. колко точни са оценките, няма ли S да стане много голям списък и т.н.



Фигура 12.7.

Принципните отговори са: колкото по-грубо е разширението $\overline{\Omega}_i$ на Ω_i, толкова по-лоша ще бъде оценката, но за сметка на това $\overline{A}_i$ ще се решава по-лесно. Компромисът тук се прави по различен начин за всеки отделен вид задачи в зависимост от тяхната специфика. По-грубо разширение – по-лоша оценка – по-голям списък S. В екстремния случай ако решим $\overline{\Omega}_i = \Omega$, то $|S| = 1$, но оценъчната ни задача всъщност е изходната! Ако задача A няма решение, алгоритъмът се превръща в почти пълно изчерпване на вариантите. Ако се решава целочислена линейна задача най-естествено е оценъчната задача да се получава чрез отпадане на изискването за целочисленост.

§12.2. Използване на алгоритъма Branch & Bound за решаване на двоична задача за раницата

Алгоритъмът разклоняване и граници се използва успешно за решаване на двоичната задача за раницата

$$\max\left\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} :\ \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leqslant b,\ x_j \in \{0,1\},\ j = 1,\dots,n\right\} \text{ – задача } A.$$

Предполагаме, че $\dfrac{c_1}{a_1} \geqslant \dfrac{c_2}{a_2} \geqslant \ldots \geqslant \dfrac{c_n}{a_n}$, което не ограничава общността, защото винаги можем да преномерираме променливите – променливата x_1 да означаваа предмета, за който отношението $\dfrac{c}{a}$ е максимално, променливата x_2 да означава предмета, за който отношението $ds\frac{c}{a}$ е максималното от тези за останалите предмети и т.н.

Съответната

$$\max\left\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} :\ \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leqslant b,\ 0 \leqslant x_j \leqslant 1,\ j = 1,\dots,n\right\} \text{ – оценъчна задача } \overline{A},$$

получаваме като отслабим условието за това променливите да приемат само стойности 0 и 1.

Оптимално решение на оценъчната задача, за която $\dfrac{c_1}{a_1} \geqslant \dfrac{c_2}{a_2} \geqslant \ldots \geqslant \dfrac{c_n}{a_n}$ се намира много лесно. Ако означим с k най-голямото цяло положително число, за което $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} a_j \leqslant b$, то $\overline{\mathbf{x}}^* = (1, 1, \ldots, \underbrace{\alpha}_{k+1}, 0, \ldots, 0)$, където $\alpha = \dfrac{b - \sum_{j=1}^{k} a_j}{a_{k+1}}$ е оптималното решение на оценъчната задача $\overline{A}$.

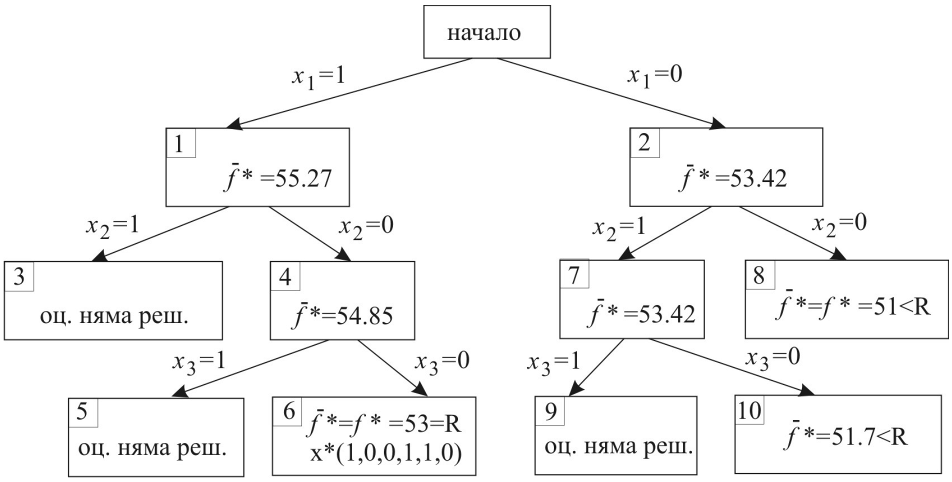
Пример. Да се намери

$$\max 32x_1 + 32x_2 + 30x_3 + 8x_4 + 13x_5 + 11x_6$$

$$21x_1 + 22x_2 + 21x_3 + 6x_4 + 10x_5 + 9x_6 \leqslant 37,$$

$$\mathbf{x}_j \in \{0,1\},\ j = 1,\ldots,6.$$

Проверяваме, че предметите са наредени в намаляващ ред по отношението ценност/тегло, т.е. дали е изпълнено условието $\frac{c_1}{a_1} \geqslant \frac{c_2}{a_2} \geqslant \ldots \geqslant \frac{c_6}{a_6}$. Проверяваме дали са верни неравенствата $\frac{32}{21} \geqslant \frac{32}{22} \geqslant \frac{30}{21} \geqslant \frac{8}{6} \geqslant \frac{13}{10} \geqslant \frac{11}{9}$. В случая това е така, което означава че предметите са правилно подредени по намаляване на отношението ценност/тегло.



Фигура 12.8.

В началото полагаме рекорда $R = -\infty$. Първоначалният списък формираме като разбием изходната задача на две задачи – задача 1, която получаваме като положим $x_1 = 1$ и задача 2, която получаваме като положим $x_1 = 0$. Решаваме съответните им оценъчни задачи (без условието за двоичност) и получаваме, че те имат нецелочислени оптимални решения и съответно оптимални стойности $\overline{f}_1^* = 55.27$ и $\overline{f}_2^* = 53.42$. Заемаме се със задачата с по-голяма оценъчна оптимална стойност (в случая задачата 1) и я разбиваме на задачи 3 и 4 като положим следващата по ред променлива x_2 на 1 и на 0 съответно. Решаваме съответните им оценъчни задачи. Получаме, че оценъчната задача 3 няма решение (и тя отпада от понататъшни разглеждания), а задача 4 има нецелочислено оптимално решение и оптимална стойност на оценъчната задача $\overline{f}_4^* = 54.85$. В списъка сега са задачи 2 (с оценъчна стойност $\overline{f}_2^* = 53.42$) и задача 4 (с оценъчна стойност $\overline{f}_4^* = 54.85$). Заемаме се с тази с по-голяма оценъчна стойност – в случая задача 4 и я разбиваме на две задачи спрямо следващата по ред променлива – в случая x_3. Получаваме задачи 5 и 6. Оценъчната задача 5 няма решение и отпада от списъка. Оценъчната задача 6 има оптимално решение $\overline{\mathbf{x}}^*(1, 0, 0, 1, 1, 0)$, което е целочислено, т.е. съвпада с оптималното решение на съответната целочислена задача $\mathbf{x}^*$. Тогава оптималната стойност на оценъчната задача $\overline{f}^*$ съвпада с оптималната стойност на целочислената f^* и е 53. При това положение рекордът се сменя на $R = f(\mathbf{x}^*) = 53$. Задача 6 също отпада от списъка. В списъка е само задача 2, при която оценъчната има оптимална стойност $\overline{f}^* = 53.42$, която е по-голяма от рекорда. Следователно, трябва да продължим да я разбиваме. Получаваме задачи 7 и 8. При задача 7 оптималното решение на оценъчната и оптималната ѝ стойност са същите както при задача 2. При задача 8 получаваме оптимално решение на оценъчната $\overline{\mathbf{x}}^*(0, 0, 1, 1, 1, 0)$, което е целочислено. Оптималната стойност на оценъчната $\overline{f}^*$ съвпада с опималната стойност f^* на целочислената и е $\overline{f}^* = f^* = 51$, която е под рекорда $R = 53$. Задачата 8 отпада от списъка. В списъка е само задача 7, при която оценъчната е с оптимална стойност $\overline{f}^* = 53.42 > R$. Разбиваме я на задачи 9 и 10. Оценъчната задача 9 няма решение и отпада от списъка. Оценъчната задача 10 има нецелочислено решение и оптимална стойност $\overline{f}^* = 51.7$, която е под рекорда $R = 53$. Задача 10 отпада от списъка. Списъкът е празен. Задачата е решена. Оптималното решение е $\mathbf{x}^*(1, 0, 0, 1, 1, 0)$, т.е. в раницата се слагат 1-ият, 4-ият и 5-ият предмет и максималната ѝ цена е 53.

При реализиране на метода на разклоняване и граници изчислителният процес се състои в последователно намиране на все по-добри допустими целочислени решения, последното от които е оптималното, но този факт се установява едва след изчерпване на S. Очевидното предимство на този метод пред метода на отсичащите равнини е, че тук получаваме добри допустими решения, докато при другия – или оптималното решение (което е свързано с неясно колко пресмятания), или нищо.

§13. Динамично оптимиране

Този метод е предложен от американския математик Ричард Белман през 1950-53 год. и успешно се прилага при много широки класове задачи (дори и не само дискретни), но с общото свойство, че процесът на оптимизация може да се разбие на последователни стъпки с обща рекурентна връзка между тях.

Нека търсим

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) : \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b, 0 \leqslant x_j \text{ – цели}, j = 1, \dots, n\right\},$$

където b е цяло положително число.

Целевата функция на тази задача е такава, че всяко събираемо зависи само от една променлива. Функция от този вид се нарича адитивна, като на f_j не са наложени никакви ограничения.

Нека като първа стъпка отделим x_n и търсим за $b_n = b$

$$\begin{aligned}
F_n(b_n) &:= \max_{x_1,\dots,x_n}\left\{\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \ : \ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b\right\}\\
&= \max_{x_n}\left\{f_n(x_n) + \max_{x_1,\dots,x_{n-1}}\left\{\sum_{j=1}^{n-1} f_j(x_j) \ : \ \sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j \leqslant b - a_n x_n\right\}\right\}\\
&= \max_{x_n}\left\{f_n(x_n) + F_{n-1}(b_{n-1})\right\}
\end{aligned}$$

като $b_{n-1} = b - a_n x_n = b_{n-1}(x_n)$ и b_{n-1} зависи от x_n.

Продължаваме с рекурентната връзка

$$\begin{aligned}
F_{n-1}(b_{n-1}) &:= \max_{x_1,\dots,x_{n-1}}\left\{\sum_{j=1}^{n-1} f_j(x_j) \ : \ \sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j \leqslant b_{n-1}\right\}\\
&= \max_{x_{n-1}}\left\{f_{n-1}(x_{n-1}) + \max_{x_1,\dots,x_{n-2}}\left\{\sum_{j=1}^{n-2} f_j(x_j) \ : \ \sum_{j=1}^{n-2} a_j x_j \leqslant b_{n-2}\right\}\right\}\\
&= \max_{x_{n-1}}\left\{f_{n-1}(x_{n-1}) + F_{n-2}(b_{n-2})\right\}
\end{aligned}$$

като $b_{n-2} = b - a_n x_n - a_{n-1} x_{n-1} = b_{n-2}(x_n, x_{n-1})$ и b_{n-2} зависи от x_n и x_{n-1}.

Последователно стигаме до

$$F_2(b_2) := \max_{x_2}\left\{f_2(x_2) + F_1(b_1)\right\}$$

и

$$F_1(b_1) := \max_{x_1}\left\{f_1(x_1) \ : \ a_1 x_1 \leqslant b_1\right\},$$

което можем да пресметнем директно.

На практика за всички възможни стойности на b_1 ($b_1 = 0, 1, 2, \dots, b$) пресмятаме $x_1(b_1) = \max\{x_1 : a_1 x_1 \leqslant b_1\}$ и след това $F_1(b_1) = f_1(x_1(b_1))$ като запомняме резултатите в таблица. След това за всички възможни стойности на b_2 ($b_2 = 0, 1, 2, \dots, b$) пресмятаме $x_2(b_2) = \max\{x_2 : a_2 x_2 \leqslant b_2\}$ и $F_2(b_2) = f_2(x_2(b_2)) + F_1(b_1)$, където $b_1 = b_2 - a_2 x_2(b_2)$ като за стойността на $F_1(b_1)$ ползваме предходната таблица. Продължаваме да пресмятаме по рекурентната зависимост $F_3(b_3)$ и т.н. до $F_n(b_n)$. От последната таблица взимаме b_n^* за което $\max\{F_n(b_n)\} = F_n(b_n^*)$ и от него намираме оптималната стойност $x_n^* = x_n(b_n^*)$.

Последователните таблици имат следния вид

b_1	$F_1(b_1)$	$x_1(b_1)$
0	$F_1(0)$	$x_1(0)$
1	$F_1(1)$	$x_1(1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
b		

b_2	$F_2(b_2)$	$x_2(b_2)$
0	$F_2(0)$	$x_2(0)$
1	$F_2(1)$	$x_2(1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
b		

$\dots$

b_n	$F_n(b_n)$	$x_n(b_n)$
0	$F_n(0)$	$x_n(0)$
1	$F_n(1)$	$x_n(1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
b		

След като вече знаем x_n^* последователно намираме $x_{n-1}^* = x_{n-1}(b - a_n x_n^*)$, $x_{n-2}^* = x_{n-2}(b - a_n x_n^* - a_{n-1} x_{n-1}^*)$ и т.н.

Веднага изниква въпросът колко големи са тези таблици. Например, при $b = 20$ и $n = 5$ броят на всички възможни варианти е

$$\frac{(n+b-1)!}{b!(n-1)!} = C_{24}^4 = 10\,626$$

и нашите таблици ще съдържат

$$\frac{(b+1)[(n-1)(b+2)+2]}{2} = 945$$

числа, т.е. докато броят на вариантите расте експоненциално с n и b, то размерът на пресмятанията в нашия случай расте с квадрата на b и линейно по n.

Нека решим по описания метод задачата за раницата

$$\max\{3x_1 + 7x_2 + 15x_3 \ : \ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leqslant 4, \ 0 \leqslant x_j - \text{цели}\}$$

като попълним трите таблици

b_1	$F_1(b_1)$	$x_1(b_1)$
0	0	0
1	3	1
2	6	2
3	9	3
4	12	4

b_2	$F_2(b_2)$	$x_2(b_2)$
0	0	0
1	3	0
2	7	1
3	10	1
4	14	2

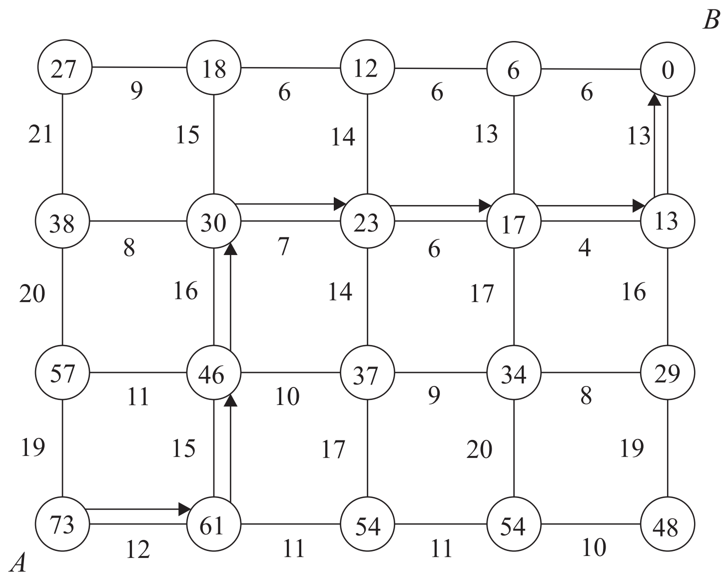
b_3	$F_3(b_3)$	$x_3(b_3)$
0	0	0
1	3	0
2	7	0
3	15	1
4	18	1

От последната таблица получаваме, че максимумът е 18 и се получава за $x_3^* = 1$. След това имаме, че $x_2^* = x_2(4 - 3.1) = x_2(1) = 0$ и накрая

$x_1^* = x_1(4-3.1-2.0) = x_1(1) = 1$. Така оптималното решение се получава като сложим в раницата 1 предмет от първия вид и 1 предмет от третия вид, за да получим максималната ѝ цена от 18.

Основната идея в динамичното оптимиране се базира на т.нар. принцип на Белман, който гласи, че оптималната треактория на дадена система от състояние A до състояние B не зависи от това как тя е попаднала в състояние A. Системи с такова свойство се наричат Марковски системи. При по-внимателно вглеждане ще откриете, че точно на това се основават и горните рекурентни отношения.

Все пак идеята на динамичното оптимиране ще стане ясна от следния пример: летателен апарат (самолет, ракета) трябва да достигне от т. A до т. B, отдалечени по разстояние и височина с минимален разход на гориво.



Фигура 13.9.

Хоризонталното и вертикалното разстояние са разделени на части като разходът на гориво за всяка отсечка е даден. В крайната точка B поставяме оценка 0. В точка B може да се достигне по хоризонталната отсечка или по вертикалната. В първия случай разходът е 6, а във втория 13, така че в съответните възли поставяме 6 и 13. В съседния на вече оценените възли поставяме $\min\{6 + 13, 13 + 4\} = 17$ – това е минималното количество гориво за всички възможни начини да се стигне от този възел до B (а те са два).

По този начин оценяваме последователно всички възли и за A получаваме оценка 73, което е и стойността в оптималното решение. Самото оптимално решение възстановяваме по обратен път.

§14. Мрежово планиране

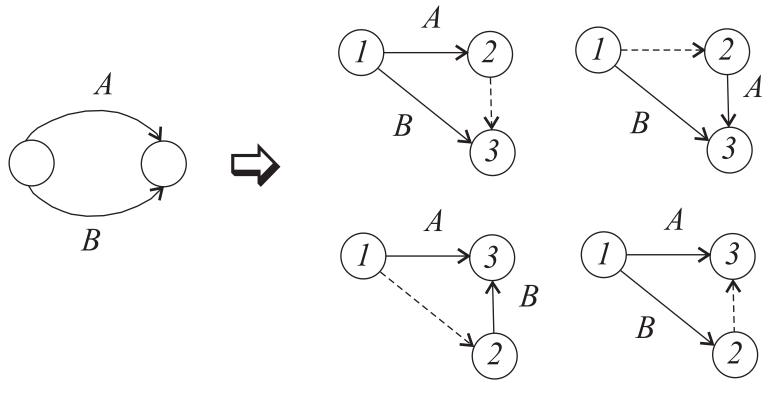
През 1961 г. САЩ дава ход на проекта Аполо. Една от основните му цели е човекът да стъпи на Луната и с това САЩ да изпревари СССР в космическите изследвания. За реализацията на проекта е необходимо решаването на няколко хиляди проблема като решаването на всеки от тях зависи от резултатите на редица други. Мнението на специалистите било, че всичко това ще отнеме десетилетия, което било неприемливо.

Група математици слагат ред в този хаос като предлагат метода, наречен мрежово планиране за подреждане и оптимизиране на дейностите.

През 1969 г. човекът стъпва на Луната, а проектът Аполо успешно приключва през 1972 г.

§14.1. Построяване на мрежата на проекта

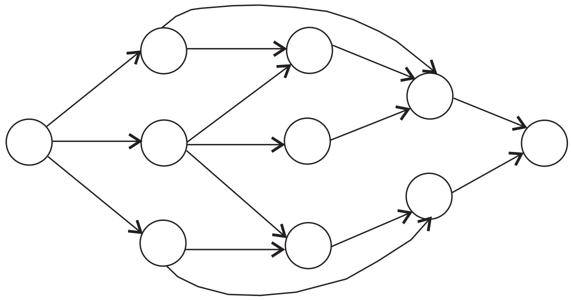
Даден проект се моделира с мрежа. Мрежата е ориентиран граф без цикли. Всеки отделен процес (операция) от проекта се обозначава чрез дъга, ориентирана по посока на изпълнението на проекта. Всеки процес в проекта се представя с точно една дъга. Всеки процес трябва се определя еднозначно с двата си крайни върха. В случай, че имаме два паралелни (конкуриращи се) процеса това се постига с въвеждане на фиктивен процес (обозначава се с пунктирана линия), който не поглъща времеви или други ресурси.



Фигура 14.10.

Ако са дадени конкуриращите се процеси A и B по един от четирите начина получаваме възможност да идентифицираме процесите A и B с уникална двойка върхове като въведем фиктивен процес.

Мрежата на проекта се построява като визуално графът се подрежда по групи върхове, несвързани помежду си, наречени нива. Посоченият граф например има пет нива.



Фигура 14.11.

Нивата се номерират във възходящ ред като посоката на свързващите ги дъги е само от ниво с по-малък номер към ниво с по-голям. Подреждането на върховете на графа (събитията) установява отношения на предшествие сред процесите на проекта. Без ограничение на общността можем да приемем, че първото и последното ниво се състоят само от по един връх – начало и край на проекта съответно.

На всяка дъга се присвоява положително число – продължителността на процеса, а върховете, които са начало и край на дъгата можем да наречем събития – съответно начало и край на процеса. На всяко събитие можем да гледаме като на точка от времевата ос, където завършва един процес и започва друг. В термините на графа събитието е връх.

За върха (събитието) j дефинираме

$\Box_j$ – най-ранното възможно настъпване на събитието j (най-ранният момент на завършване на операциите, завършващи в този връх);

$\triangle_j$ – най-късното възможно настъпване на събитието j (най-късният момент за започване на операциите, започващи от този връх);

D_{ij} – продължителност на процеса (i, j).

§14.2. Метод на критичния път

За построяване на мрежовия график на проекта се използва методът на критичния път (CPM – Critical Path Method).

Намирането на критичния път става на два етапа (хода). В хода напред се пресмятат най-ранните моменти на събитията, а при хода назад – най-късните моменти на събитията.

Ход напред: започва в първия връх 1 и завършва в последния връх n. Полага се $\Box_1 = 0$, т.е. проектът започва в момента 0. После числата $\Box$ се пресмятат по нива: за върха j се намират върховете i от предходните нива, които са непосредствено свързани с j с процеси (дъги) (i, j). За тях вече са пресметнати $\Box_i$ и се пресмята $\Box_j = \max\limits_i\{\Box_i + D_{ij}\}$. Пресмятанията завършват с намиране на $\Box_n$. $\Box_n$ е продължителността на целия проект.

Ход назад: започва в последния връх n и завършва в първия връх 1. Полага се $\triangle_n = \square_n$, т.е. най-ранният и най-късният момент на завършване на проекта съвпадат. После числата $\triangle$ се пресмятат по нива: за върха j се намират върховете k от следващите нива, които са непосредствено свързани с j с процеси (дъги) (j,k). За тях вече са пресметнати $\triangle_k$ и се пресмята $\triangle_j = \min\limits_k\{\triangle_k - D_{jk}\}$. Пресмятанията завършват с намиране на $\triangle_1$. При правилни пресмятания задължително се получава $\triangle_1 = 0$.

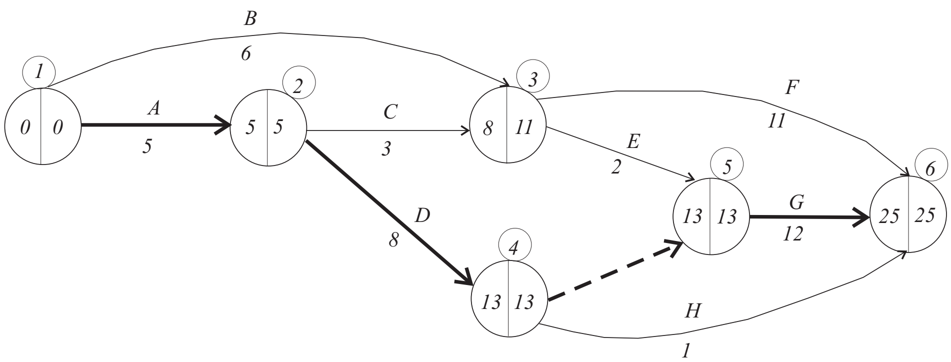
Процесът (i,j) се нарича критичен, ако

1. $\triangle_i = \square_i$
2. $\triangle_j = \square_j$
3. $\triangle_j - \triangle_i = \square_j - \square_i = D_{ij}$.

Критичните процеси образуват непрекъснат път от началното събитие до крайното. Критичен път винаги съществува, но може да не бъде единствен.

Пример: Да се намери критичният път на проекта.

За да се онагледи методът, всеки връх j се разделя на две части като в лявата част след пресмятането му се нанася числото $\square_j$, а в дясната част след пресмятането му се нанася числото $\triangle_j$. Номерът на върха е вписан в малкото кръгче отгоре.



Фигура 14.12.

Ход напред:

$\square_1 = 0$
$\square_2 = \square_1 + D_{12} = 5$
$\square_3 = \max\{\square_0 + D_{13}, \square_2 + D_{23}\} = \max\{0+6, 5+3\} = 8$
$\square_4 = \square_2 + D_{24} = 5 + 8 = 13$
$\square_5 = \max\{\square_3 + D_{35}, \square_4 + D_{45}\} = \max\{8+2, 13+0\} = 13$
$\square_6 = \max\{\square_3 + D_{36}, \square_4 + D_{46}, \square_5 + D_{56}\} = \max\{19, 25, 14\} = 25.$

Проектът се изпълнява за 25 дни.

Ход назад:

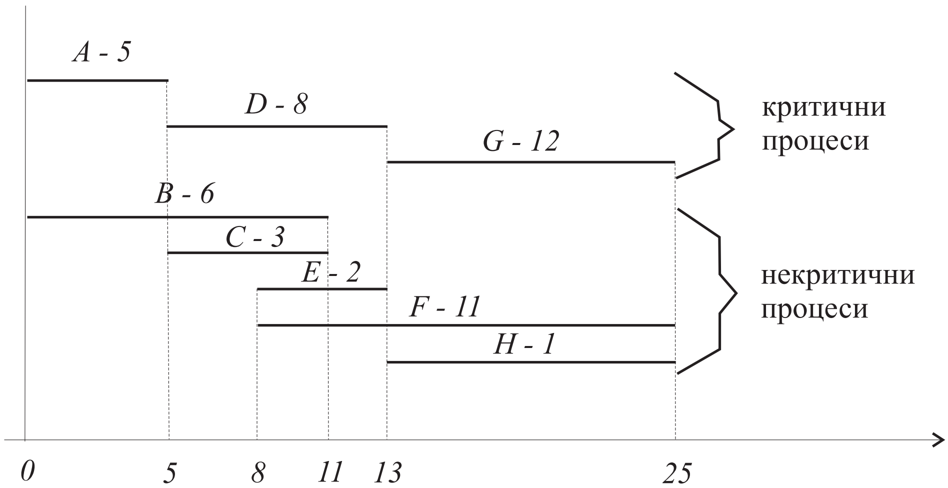
$$\triangle_6 = \square_6 = 25$$
$$\triangle_5 = \triangle_6 - D_{56} = 25 - 12 = 13$$
$$\triangle_4 = \min\{\triangle_6 - D_{46}, \triangle_5 - D_{45}\} = \min\{25 - 1, 13 - 0\} = 13$$
$$\triangle_3 = \min\{\triangle_5 - D_{35}, \triangle_6 - D_{36}\} = \min\{13 - 2, 25 - 11\} = 11$$
$$\triangle_2 = \min\{\triangle_3 - D_{23}, \triangle_4 - D_{24}\} = \min\{11 - 3, 13 - 8\} = 5$$
$$\triangle_1 = \min\{\triangle_3 - D_{13}, \triangle_2 - D12\} = \min\{11 - 6, 5 - 5\} = 0.$$

Критичният път е $1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 6$, а критичните процеси са A, D и G като фиктивният не се взима под внимание. Процесът $H = (4, 6)$ не е критичен, тъй като не изпълнява третото условие!

§14.3. Построяване на времевия график на проекта

За всеки процес (i, j) $\square_i$ е най-ранният момент на започване на процеса, а $\triangle_j$ е най-късният момент на завършване на процеса. Така $[\square_i, \triangle_j]$ е максималният интервал от време, в който се изпълнява процесът (i, j).

Да построим времевия график за примера:



Фигура 14.13.

Критичните процеси се разполагат последователно един след друг без времеви луфтове и припокривания. Тяхната обща продължителност е равна на продължителността на проекта (в случая 25 дни).

Некритичните процеси се представят с максималните интервали на изпълнение $[\square_i, \triangle_j]$, които превишават реалната продължителност на тези процеси.

Как се избира времето за начало на некритичен процес? Обикновено предпочитат да започват некритичните процеси в най-ранния възможен момент. В този случай остава резерв от време, който може да се използва за решаване на неочаквано възникнали по време на изпълнение на процеса проблеми. Ако на некритичните процеси не се налагат допълнителни ограничения и всички те започват в най-ранните възможни моменти от време, то времевият график се прави автоматично. Във всички случаи обаче трябва да се следи да не се наруши последователността на процесите.

В нашия пример процесът C трябва да е завършил до началото на процеса E, но максималните интервали на изпълнение на тези процеси се припокриват, затова реалните интервали на изпълнението им също могат да се припокриват. Затова е необходимо да се предвидят някакви „червени флагчета“, които да указват кога даден процес може да започне без нарушения на отношението на следване с други процеси. За целта се използват резервите от време на некритичните процеси.

За всеки некритичен процес (i, j) се дефинира
пълен резерв от време ПР$(i, j) = \triangle_j - \square_i - D_{ij}$ и
свободен резерв от време СР$(i, j) = \square_j - \square_i - D_{ij}$,
като очевидно СР$(i, j) \leqslant$ ПР(i, j).

§14.4. Правило на червеното флагче

За некритичен процес (i, j)

а) ако СР$(i, j) =$ ПР(i, j), то даденият процес може да се изпълнява по всяко време вътре в максималния интервал $[\square_i, \triangle_j]$ без да това да нарушава последователността на процесите;

б) ако СР$(i, j) <$ ПР(i, j), то без да се нарушава последователността процесът може да започва с отместване от $\square_i$, което не превишава СР(i, j). Отместване на началото на процеса от $\square_i$, превишаващо СР(i, j) (но не повече от ПР(i, j)) е възможно, но трябва да се съпровожда с поне равно отместване относно $\square_j$ на всички процеси, които започват от j.

Некритичният процес (i, j) получава червено флагче само когато СР$(i, j) <$ ПР(i, j) и то се взима под внимание при отместване на началото на процеса относно $\square_i$, при което следва да се отчете отместване на процесите, следващи j.

Нека да изчислим резервите от време на некритичните процеси от примера:

некритичен процес	продължителност	ПР(i, j)	СР(i, j)	флагче
$B(1, 3)$	6	$11 - 0 - 6 = 5$	$8 - 0 - 6 = 2$	✓
$C(2, 3)$	3	$11 - 5 - 3 = 3$	$8 - 5 - 3 = 0$	✓
$E(3, 5)$	2	$13 - 8 - 2 = 3$	$13 - 8 - 2 = 3$	
$F(3, 6)$	11	$25 - 8 - 11 = 6$	$25 - 8 - 11 = 6$	
$H(4, 6)$	1	$25 - 13 - 1 = 11$	$25 - 13 - 1 = 11$	

Процесите E, F и H могат да се изпълняват по всяко време в максималните си интервали.

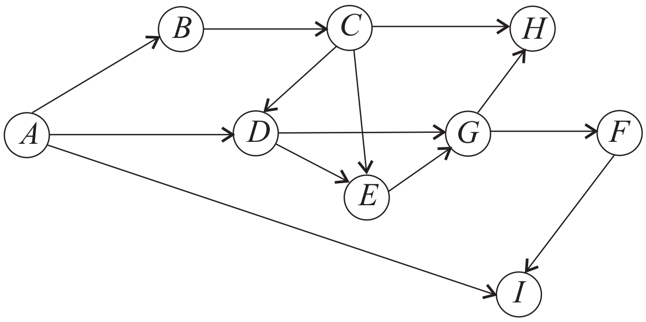
Процесите B и C са обозначени с червени флагчета.

Да разгледаме процеса B. За него ПР е 5, което означава, че той може да започне във всеки ден от интервала 0–5 дни от началото на изпълнение на проекта. Но неговият СР е 2 дни и ако B започне в 0, 1 или 2 ден от началото на проекта това не би оказало влияние върху следващите го процеси E и F. Ако процесът B започне в $(2+d)$-ият ден (за $2+d \leqslant 5$), то началото на процесите E и F е необходимо да се премести от най-ранният момент на тяхното начало (ден 8 от началото на проекта) с не по-малка от d дена. Само тогава не се нарушава последователността на B, E и F.

За процеса C имаме СР нула. Това означава, че всяко отместване от началото на този процес трябва да се съпровожда с не по-малко отместване на началото на процесите E и F.

§14.5. Подреждане на върховете на графа по нива

Ще го илюстрираме с пример. Нека е даден графът



Фигура 14.14.

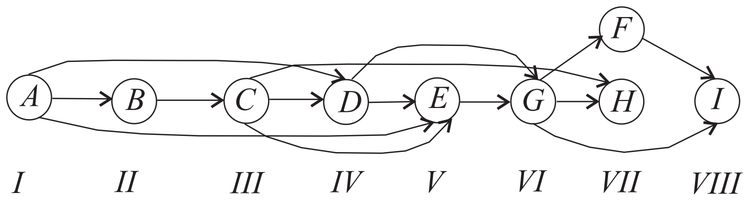
Неговата матрица на съседство е

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A		1		1					1
B			1						
C				1	1			1	
D					1		1		
E							1		
F									1
G						1		1	
H									
I									
	0	1	1	2	2	1	2	2	2
		0	1	1	2	1	2	2	1
$\vdots$	$\vdots$								

Сумираме числата във всеки стълб и записваме резултата отдолу. Върховете, за които се получи 0 са на първо ниво – в случая върхът

A. Зачертаваме от матрицата редът и стълбът на A. Сумираме числата във всеки стълб. Там където се получи 0 е второто ниво – в случая това е върхът B. Зачертаваме от матрицата редът и стълбът на B и повтаряме до изчерпване.

В резултат полученият граф е с 8 нива и изглежда така:



Фигура 14.15.