Домашна работа № 2
Дискретна Математика
3-та и 6-та група, Информатика, ФМИ, СУ

18 ноември 2009 г.

На всички задачи дайте колкото можете по-добре аргументирани отговори. Отговори без никаква аргументация не се зачитат. Пишете ***ясно и прегледно****. Задача 10 е бонус, тоест за пълен брой точки е достатъчно да се решат останалите задачи.*

5 т. **Задача 1:** Докажете **по индукция**, че за всяко множество A, броят на подмножествата на A с четен брой елементи е равен на броя на подмножествата с нечетен брой елементи.

3 т. **Задача 2:** Докажете, че

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$$

Упътване: използвайте резултата от предната задача и комбинаторни съображения.

7 т. **Задача 3:** Докажете с комбинаторни средства, че

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

Упътване: разгледайте множество от $2n$ елемента, като всеки елемент има освен идентичността си и някакъв атрибут, да го наречем „цвят“, измежду два възможни цвята. Нека точно n елемента са в единия цвят, което значи, че останалите n елемента са в другия цвят.

12 т. **Задача 4:** По колко начина могат да седнат около кръгла маса с

номерирани столове хората от n на брой женени двойки (очевидно става дума за $2n$ души), така че съпрузите от нито една двойка да не седят на съседни столове?

5 т. **Задача 5:** Колко са възможните ръце в бриджа с разпределение на цветовете $5, 4, 4, 0$? Дайте отговор-число.

Пояснение: всичко от играта бридж, което е необходимо да се знае за целите на тази задача, е следното. Бридж се играе с 52 карти, като всяка карта има два атрибута. За целите на тази задача е достатъчно да се знае, че единият от тези атрибути се нарича ***цвят****. Има общо 4 цвята и картите от всеки цвят са еднакъв брой, а именно 13.* ***Ръка*** *се нарича подборка от 13 карти, като подредбата на картите в ръката няма значение.* ***Разпределение на цветовете*** *в дадена ръка наричаме редица от цели неотрицателни числа c_1, c_2, c_3, c_4, такава че:*

1. $c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq c_4$,
2. $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 13$,
3. *за някой цвят, броят на картите от него в ръката е c_1, за друг цвят е c_2, за трети е c_3, а за четвъртия цвят е c_4.*

Задача 6: На празнично тържество идват 100 гости. Разиграва се благотворителна томбола по следните правила. Всеки гостенин записва името си (да приемем, че всички имена са различни) върху картонче, пуска картончето в кутия и плаща някаква сума за участието в томболата. В края на тържеството се вадят по случаен начин едно след друго три картончета от кутията. Веднъж изтеглено, никое картонче не се слага отново в кутията. Този, чието име е изтеглено първо, получава награда от p_1 лева; вторият получава награда от p_2 лева, а третият, от p_3 лева. По колко различни начина могат да бъдат раздадени наградите на гостите, ако

2 т. **а)** $p_1 = 200$ лв, $p_2 = 100$ лв, $p_3 = 50$ лв.

2 т. **б)** $p_1 = p_2 = p_3 = 100$ лв.

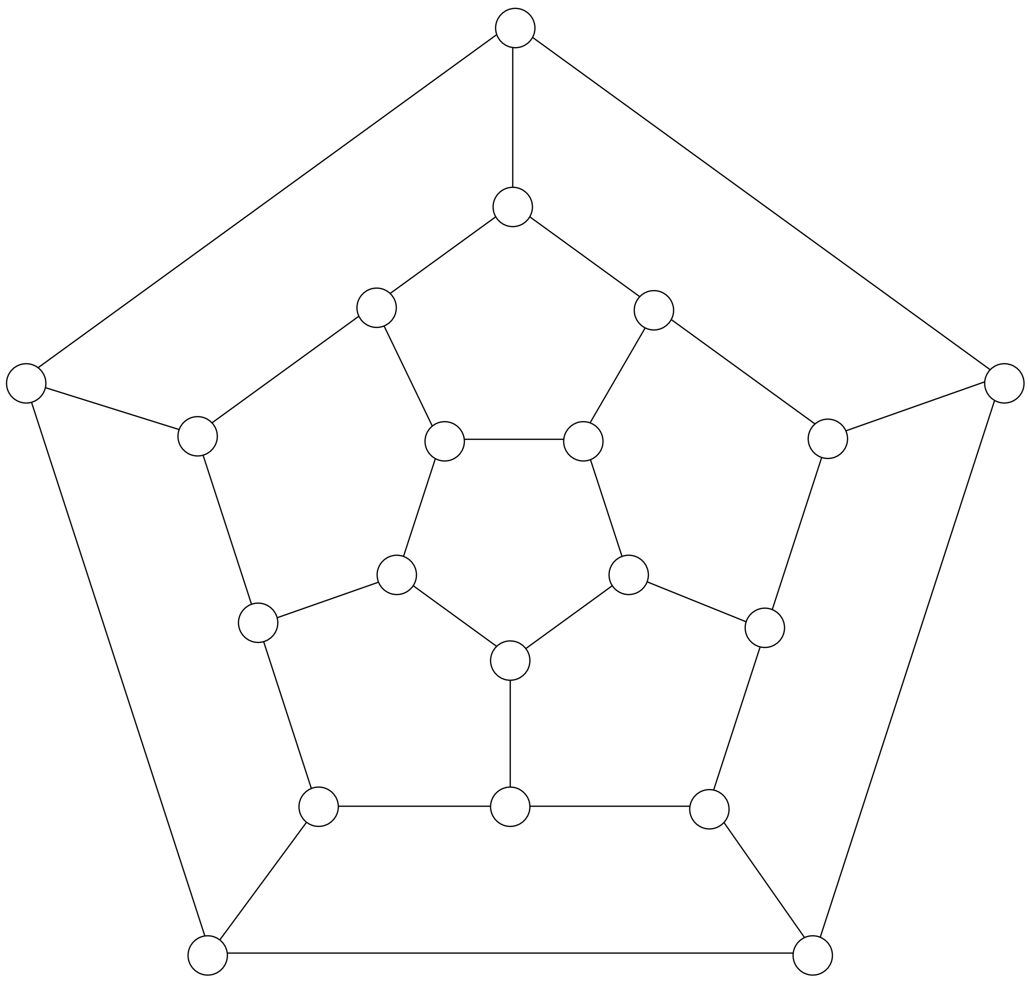
Задача 7: На празнично тържество идват 100 гости. Разиграва се благотворителна томбола по следните правила. Всеки гостенин записва името си (да приемем, че всички имена са различни) върху картонче, пуска картончето в кутия и плаща някаква сума за участието в томболата. В края на тържеството се вадят по случаен начин едно след друго три картончета от кутията. Веднъж изтеглено, всяко картонче се слага отново в кутията. Този, чието име е изтеглено първо, получава награда от p_1

лева; вторият получава награда от p_2 лева, а третият, от p_3 лева. По колко различни начина могат да бъдат раздадени наградите на гостите, ако

2 т. **а)** $p_1 = 200$ лв, $p_2 = 100$ лв, $p_3 = 50$ лв.

2 т. **б)** $p_1 = p_2 = p_3 = 100$ лв.

5 т. **Задача 8:** Да се открие Хамилтонов цикъл в следния граф с 20 върха и 30 ребра:



Фиг. 1

5 т. **Задача 9:** Възможно ли е в група от 11 човека, всеки да познава

точно трима души (освен себе си, естествено)? За целите на тази задача, познанството е симетрично: за всеки двама души X и Y, X познава Y тогава и само тогава, когато Y познава X.

15 т. **Задача 10:** Нека $J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, за всяко цяло положително n. Нека дефинираме, че *„граф-мрежа* $m \times n$*"* е обикновен граф $G(V, E)$, където множеството от върховете е $V = J_m \times J_n$, а множеството от ребрата е

$$E = \{(u \times v, p \times q) \mid u \in J_n, v \in J_m, p \in J_n, q \in J_m, |u - p| + |v - q| = 1\}$$

Намерете и докажете необходимо и достатъчно условие за това, да има Хамилтонов цикъл в граф-мрежа $3 \times n$.