

## Коректност на метода на характеристичното уравнение за решаване на линейни рекурентни уравнения

Стефан Фотев

Пиша този файл, тъй като не успях да намеря в интернет кратко и ясно обяснение на коректността на този метод. Това ме мотивира да изведа сам тези резултати.

Основната ми цел е достъпен и разбираем за запознати читатели текст.

### Задача:

Дадено е следното рекурентно уравнение:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k} + \alpha_1^n P_1(n) + \dots + \alpha_s^n P_s(n)$$

, където  $c_1, \dots, c_k$ , са комплексни числа,  $c_k \neq 0$ ,  $P_1, \dots, P_s$  са комплексни полиноми, от степени съответно  $\delta_1, \dots, \delta_s$ , а коефициентите  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  са различни помежду си, ненулеви комплексни числа.

Дадени са начални условия:  $a_0 = b_0, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}$ .

Изразът  $x^k - c_1 x^{k-1} - \dots - c_k$  наричаме *характеристичен полином* на рекурентното уравнение. Изразът  $c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k}$  наричаме *хомогенна част*, а  $\alpha_1^n P_1(n) + \dots + \alpha_s^n P_s(n)$  - съответно *нехомогенна*.

Нека  $M$  е мулти-множество, съставено от корените на характеристичния полином със съответната кратност и константите  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  с кратности съответно  $\delta_1 + 1, \dots, \delta_s + 1$ .

Тогава решението на рекурентното уравнение има общ вид:

$$\sigma_1^n Q_1(n) + \dots + \sigma_t^n Q_t(n)$$

, където  $\sigma_1, \dots, \sigma_t$  са различните елементи на  $M$ , а  $Q_1, \dots, Q_t$  са полиноми от степени с една по-малко от броя срещания на  $\sigma_1, \dots, \sigma_t$  в  $M$ .

Пример:

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2^n(n^2 + 5n - 6) + 3^n(4n^2 + 3)$$

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 166$$

Корените на характеристичния полином  $x^2 - 3x + 2$  са 1 и 2.

Мулти-множеството  $M$  е съставено от  $\{1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3\}$ .

В такъв случай общият вид на решението изглежда така:

$$a_n = 1^n \lambda_0 + 2^n(\lambda_1 + \lambda_2 n + \lambda_3 n^2 + \lambda_4 n^3) + 3^n(\lambda_5 + \lambda_6 n + \lambda_7 n^2)$$

Точното решение се намира, след решаване на система линейни уравнения за коефициентите. Тя се получава, чрез оценяване на първите няколко стойности на  $a_n$  (началните и евентуално някои допълнителни).

## I. Рекурентни уравнения, съдържащи само хомогенна част

Цялата коректност на методи се базира на два тривиални резултата. Ще ги кръстят съответно  $P$ -лема и  $\Delta$ -лема.

**$P$ -лема:** Нека  $P(x)$  е комплексен полином от степен  $n \geq 1$ . Тогава:

$$r \text{ е корен на } P \text{ с кратност } s \Leftrightarrow P(r) = P'(r) = P''(r) = \dots = P^{(s-1)}(r) = 0$$

*Доказателство:*

Нека  $P(x) = (x - r)Q(x)$ , където  $Q$  е полином от степен с една по-малко от степента на  $P$ . Тогава  $P'(r) = Q(r)$  (разгледайте границата на диференчното частно).

Останалата част от доказателството оставям на читателя за упражнение. ■

*Забележка:* Твърдението е вярно и за константни полиноми, но това не е от значение.

**$\Delta$ -лема:** Нека  $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  е комплексен полином от степен  $n \geq 1$ .

Дефинираме рекурсивно оператор  $\Delta_p^k$  по следния начин:

$$\begin{cases} \Delta_p^0(x) = P(x) \\ \Delta_p^{s+1}(x) = x \cdot (\Delta_p^s(x))' \end{cases}$$

Как изглежда  $\Delta$ ?

$$\Delta_p^1(x) = x \cdot P'(x) = a_1x + a_22x^2 + \dots + a_nnx^n$$

$$\Delta_p^2(x) = x \cdot (\Delta_p^1(x))' = a_1x + a_22^2x^2 + \dots + a_nn^2x^n$$

⋮

$$\Delta_p^s(x) = x \cdot (\Delta_p^{s-1}(x))' = a_11^sx^1 + a_22^sx^2 + \dots + a_nn^sx^n$$

Самата  $\Delta$ -лема се изразява в следното твърдение:

За  $r \neq 0$  и произволно  $s$  е вярно:

$$\Delta_p^0(r) = \Delta_p^1(r) = \dots = \Delta_p^{s-1}(r) = 0 \Leftrightarrow P(r) = P'(r) = P''(r) = \dots = P^{(s-1)}(r) = 0$$

*Доказателство:*

Разглеждаме следната таблица  $S$ :

	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	1	3	1			
4	1	7	6	1		
5	1	15	25	10	1	
6	1	..	..	..	..	1

Общата ѝ формула е:  $S(i, j) = S(i - 1, j - 1) + j \cdot S(i - 1, j)$

Много лесно с индукция по  $s > 0$  се проверява следното твърдение:

$$\Delta_p^s(x) = \sum_{k=1}^s S(s, k) \cdot x^k \cdot P^{(k)}(x)$$

Сега доказателството на лемата е тривиално и в двете посоки - оставям го на читателя за упражнение.

*Забележка:* В литературата числата  $S(n, m)$  са известни като числа на Стирлинг от втори род.

**Следствие:**  $\Delta$ -лемата може да се формулира и така:

$$\Delta_p^0(r) = \Delta_p^1(r) = \dots = \Delta_p^{s-1}(r) = 0 \Leftrightarrow r \text{ е корен с кратност } s \text{ на } P(x)$$

Това идва директно от еквивалентността в  $P$ -лемата. ■

Сега да преминем към коректността на метода. Първо разглеждаме рекурентни уравнения, съдържащи само хомогенна част и оставяме настрана началните условия:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k}$$

**Свойство 1:** Ако редиците  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  са решения на уравнението, то редицата  $\{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}$  също е решение.

**Свойство 2:** Ако редицата  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  е решение на уравнението и  $c \in \mathbb{C}$ , то редицата  $\{ca_n\}_{n=0}^{\infty}$  също е решение.

*Тези две свойства се проверяват непосредствено. Директно следствие от тях е, че решенията на уравнението образуват линейно пространство относно комплексните числа.*

**Свойство 3:** Ако  $r$  е корен на характеристичния полином с кратност  $s$ , то редиците:

$$\{r^n\}_{n=0}^{\infty}, \{nr^n\}_{n=0}^{\infty}, \dots, \{n^{s-1}r^n\}_{n=0}^{\infty}$$

са решения на уравнението.

*Доказателство:*

Нека  $r$  е корен с кратност  $s$  на характеристичния полином, тоест:

$$x^k - c_1 x^{k-1} - \dots - c_k = (x - r)^s Q(x)$$

, където  $Q(x)$  е полином от степен  $k - s$ , без корен  $r$ .

За произволно  $n \geq k$  имаме:

$$x^n - c_1 x^{n-1} - \dots - c_k x^{n-k} = x^{n-k} (x - r)^s Q(x)$$

Следователно  $r$  е корен с кратност  $s$  на  $P_n(x) = x^n - c_1 x^{n-1} - \dots - c_k x^{n-k}$ . Очевидно е, че  $r \neq 0$ , така че можем да приложим следствието от  $\Delta$ -лемата.

$$\Delta_{\mathbb{P}_n}^0(r) = r^n - c_1 r^{n-1} - \dots - c_k r^{n-k} = 0$$

, откъдето  $r^n = c_1 r^{n-1} + \dots + c_k r^{n-k}$ , но това е за произволно  $n \geq k$ , така че редицата  $\{r^n\}_{n=0}^\infty$  е решение на рекурентното уравнение.

Абсолютно аналогично е за  $t = 1, \dots, s-1$ :

$$\Delta_{\mathbb{P}_n}^t(r) = n^t r^n - (n-1)^t c_1 r^{n-1} - \dots - (n-k)^t c_k r^{n-k} = 0$$

, откъдето  $n^t r^n = (n-1)^t c_1 r^{n-1} + \dots + (n-k)^t c_k r^{n-k}$ , но това е за произволно  $n \geq k$ , така че редицата  $\{n^t r^n\}_{n=0}^\infty$  е решение на рекурентното уравнение.

■

### Тривиално следствие от тези свойства:

Нека  $a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k}$  е рекурентно уравнение от горния тип. Нека  $r_1, \dots, r_m$  са корени на характеристичния му полином с кратности съответно  $s_1, \dots, s_m$ .

Тогава всяка линейна комбинация на редиците:

$$\begin{array}{cccc} \{r_1^n\}_{n=0}^\infty, & \{nr_1^n\}_{n=0}^\infty, & \dots, & \{n^{s_1-1}r_1^n\}_{n=0}^\infty, \\ \{r_2^n\}_{n=0}^\infty, & \{nr_2^n\}_{n=0}^\infty, & \dots, & \{n^{s_2-1}r_2^n\}_{n=0}^\infty, \\ & & & \vdots \\ \{r_m^n\}_{n=0}^\infty, & \{nr_m^n\}_{n=0}^\infty, & \dots, & \{n^{s_m-1}r_m^n\}_{n=0}^\infty \end{array}$$

е решение на уравнението.

### Голямата теорема:

Нека  $a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k}$  е рекурентно уравнение от горния тип с начални условия  $a_0 = b_0, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}$ .

Нека  $r_1, \dots, r_m$  са корени на характеристичния му полином с кратности съответно  $s_1, \dots, s_m$ . Тогава решението на уравнението може да се представи като линейна комбинация на следните редици:

$$\begin{array}{cccc} \{r_1^n\}_{n=0}^\infty, & \{nr_1^n\}_{n=0}^\infty, & \dots, & \{n^{s_1-1}r_1^n\}_{n=0}^\infty, \\ \{r_2^n\}_{n=0}^\infty, & \{nr_2^n\}_{n=0}^\infty, & \dots, & \{n^{s_2-1}r_2^n\}_{n=0}^\infty, \\ & & & \vdots \\ \{r_m^n\}_{n=0}^\infty, & \{nr_m^n\}_{n=0}^\infty, & \dots, & \{n^{s_m-1}r_m^n\}_{n=0}^\infty \end{array}$$

*Доказателство:*

Разглеждаме следната матрица:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ r_1 & \dots & r_1 & r_2 & \dots & r_m \\ r_1^2 & \dots & 2^{s_1-1}r_1^2 & r_2^2 & \dots & 2^{s_m-1}r_m^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1^{k-1} & \dots & (k-1)^{s_1-1}r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \dots & (k-1)^{s_m-1}r_m^{k-1} \end{pmatrix}$$

Ключовото наблюдение е, че редовете  $y$  са линейно независими.

Да допуснем, че са линейно зависими с коефициенти  $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}$ , поне един от които е ненулев.

Разглеждаме полинома  $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{k-1} x^{k-1}$ .

От линейната комбинация на редовете, имаме следното за стълбовете:

$$\begin{aligned} \Delta_f^0(r_1) &= \dots = \Delta_f^{s_1-1}(r_1) = 0 \\ \Delta_f^0(r_2) &= \dots = \Delta_f^{s_2-1}(r_2) = 0 \\ &\vdots \\ \Delta_f^0(r_m) &= \dots = \Delta_f^{s_m-1}(r_m) = 0 \end{aligned}$$

Сега от  $\Delta$ -лемата имаме:

$$\begin{aligned} f(r_1) = f'(r_1) &= \dots = f^{(s_1-1)}(r_1) = 0 \\ f(r_2) = f'(r_2) &= \dots = f^{(s_2-1)}(r_2) = 0 \\ &\vdots \\ f(r_m) = f'(r_m) &= \dots = f^{(s_m-1)}(r_m) = 0 \end{aligned}$$

От  $P$ -лемата следва, че  $f(x)$  има корени  $r_1$  с кратност  $s_1$ ,  $r_2$  с кратност  $s_2$ , ...,  $r_m$  с кратност  $s_m$ , което е невъзможно, тъй като  $f$  е нетривиален полином от степен  $\leq k-1$ , и няма как да има  $s_1 + s_2 + \dots + s_m = k$  корена.

В такъв случай съответната детерминанта е ненулева, така че системата:

$$M \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{k-1} \end{pmatrix}$$

има единствено решение за  $\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}$ .

Сега редицата с общ член:

$$c_n = \lambda_0 r_1^n + \lambda_1 n r_1^n + \dots + \lambda_{s_1-1} n^{s_1-1} r_1^n + \lambda_s r_2^n + \dots + \lambda_{k-1} n^{s_m-1} r_m^n$$

отговаря на началните условия и е линейна комбинация на редиците:

$$\begin{aligned} \{r_1^n\}_{n=0}^\infty, \quad \{nr_1^n\}_{n=0}^\infty, \quad \dots, \quad \{n^{s_1-1}r_1^n\}_{n=0}^\infty, \\ \{r_2^n\}_{n=0}^\infty, \quad \{nr_2^n\}_{n=0}^\infty, \quad \dots, \quad \{n^{s_2-1}r_2^n\}_{n=0}^\infty, \\ \vdots \\ \{r_m^n\}_{n=0}^\infty, \quad \{nr_m^n\}_{n=0}^\infty, \quad \dots, \quad \{n^{s_m-1}r_m^n\}_{n=0}^\infty \end{aligned}$$

Оттук директно следва, че тя е решение на рекурентното уравнение. ■

## II. Рекурентни уравнения, съдържащи нехомогенна част

Дадено е рекурентно уравнение от горния тип:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k} + \alpha_1^n P_1(n) + \dots + \alpha_s^n P_s(n)$$

, където  $c_1, \dots, c_k$ , са комплексни числа,  $c_k \neq 0$ ,  $P_1, \dots, P_s$  са комплексни полиноми, от степени съответно  $\delta_1, \dots, \delta_s$ , а коефициентите  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  са различни помежду си, ненулеви комплексни числа.

Ключовото наблюдение е следното:

**Лема:** Нека  $P(x)$  е комплексен полином от степен  $n \geq 1$  и  $\alpha \neq \beta$  са ненулеви комплексни числа.

Тогава  $\alpha P(x) - \alpha P(x-1)$  е полином от степен  $n-1$ , а  $\alpha P(x) - \beta P(x-1)$  е полином отново от степен  $n$ .

*Доказателство:*

Проверява се непосредствено, като се разпише полиномът. ■

*Забележка:* При  $s = 0$ ,  $\alpha P(x) - \alpha P(x-1) = 0$ .

*Къде се използва тази лема?*

Да разгледаме изразите за  $a_n$  и  $a_{n-1}$ .

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k} + \alpha_1^n P_1(n) + \dots + \alpha_s^n P_s(n)$$

$$a_{n-1} = c_1 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k-1} + \alpha_1^{n-1} P_1(n-1) + \dots + \alpha_s^{n-1} P_s(n-1)$$

Умножаваме втория израз с  $\alpha_1$  и го вадим от първия. Получаваме:

$$a_n = (c_1 + \alpha_1) a_{n-1} + \dots + (c_k - \alpha_1 c_{k-1}) a_{n-k} - \alpha_1 c_k a_{n-k-1} + \alpha_1^n R_1(n) + \alpha_2^n Q_2(n) + \dots + \alpha_s^n Q_s(n)$$

От лемата имаме, че  $R_1$  е полином от степен  $\deg(P_1) - 1$ , а  $Q_2, \dots, Q_s$  са полиноми отново от степени съответно  $\deg(P_2), \dots, \deg(P_s)$ .

Непосредствено се проверява, че характеристичният полином на новата зависимост е:

$$(x^n - c_1 x^{n-1} - \dots - c_k)(x - \alpha_1)$$

Правим това  $\delta_1 + 1$  пъти и получаваме рекурентно уравнение с характеристичен полином  $(x^n - c_1 x^{n-1} - \dots - c_k)(x - \alpha_1)^{\delta_1 + 1}$  и нехомогенна част, несъдържаща изрази с  $\alpha_1^n$ .

Сега правим същото за  $\alpha_2$  и така нататък. В крайна сметка получаваме хомогенно рекурентно уравнение с характеристичен полином:

$$(x^n - c_1 x^{n-1} - \dots - c_k)(x - \alpha_1)^{\delta_1 + 1} \dots (x - \alpha_s)^{\delta_s + 1}$$

За него вече знаем какво да правим.

Техническите детайли относно горната конструкция оставям на читателя.