Топки в кутии

n кутии

m топки		различими		неразличими
различими	без ограничения	n^m	без ограничения	$\sum_{k=1}^{n} \left\{ m \atop k \right\}$
различими	≤ 1 топка в кутия (инекции)	$n^{\underline{m}}$	≤ 1 топка в кутия (инекции)	$[\![m \leq n]\!]$
различими	≥ 1 топка в кутия (сюрекции)	$\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$	≥ 1 топка в кутия (сюрекции)	$\left\{ m \atop n \right\}$
неразличими	без ограничения	$\binom{m+n-1}{m}$	без ограничения	$\sum_{k=1}^{n} p(m,k)$
неразличими	≤ 1 топка в кутия (инекции)	$\binom{n}{m}$	≤ 1 топка в кутия (инекции)	$[\![m \leq n]\!]$
неразличими	≥ 1 топка в кутия (сюрекции)	$\binom{m-1}{m-n}$	≥ 1 топка в кутия (сюрекции)	$p(m,n)$

Обяснение на нотациите:

- $\left\{ m \atop n \right\}$ — чете се "m-подмножество-n" — е *число на Стирлинг от втори род.* $\left\{ m \atop n \right\}$ е броят на начините за разбиване на m-елементно множество на n подмножества. В сила е рекурентното уравнение

  $$\left\{ m \atop n \right\} = n \left\{ m-1 \atop n \right\} + \left\{ m-1 \atop n-1 \right\} \text{ за } m > 0 \text{ и } m \geq n.$$

  с гранични условия $\left\{ k \atop k \right\} = 1$ за $k \geq 0$ и $\left\{ k \atop 0 \right\} = 0$ за $k > 0$. Лесно се вижда, че числата на Стирлинг от втори род са свързани с броя на сюрекциите от m-елементен домейн в n-елементен кодомейн така:

  $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m = n! \left\{ m \atop n \right\}.$$

- $p(m,n)$ е броят на целочислените разбивания на числото m на n части (на английски: *number of integer partitions*). *Целочислено разбиване на* m *на* n *части* е всяка сума от n положителни естествени числа (където $1 \leq n \leq m$), равна на m, където редът на сумиране няма значение. Тогава $\sum_{k=1}^{n} p(m,k)$ е броят на целочислените разбивания на числото m. Например числото 4 има пет целочислени разбивания:

  $$4 = 1+1+1+1$$
  $$4 = 1+1+2$$
  $$4 = 2+2$$
  $$4 = 1+3$$
  $$4 = 4$$

Очевидно $p(4, 2) = 2$.

В сила е рекурентното уравнение

$$p(n, k) = p(n - k, k) + p(n - 1, k - 1)$$

с гранични условия $p(k, k) = 1$ за $k \geq 0$ и $p(k, 0) = 0$ за $k \geq 1$ и $p(t, k) = 0$ за $t < k$.

- $[\![q]\!]$, където q е някакъв израз с булева интерпретация, се дефинира така:

$$[\![q]\!] = \begin{cases} 1, & \text{ако } q \text{ е истина;} \\ 0 & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Например $[\![m \leq n]\!]$ е равно на 1, когато $m \leq n$, а във всички останали случаи е 0. Тази нотация се нарича *нотация на Iverson*.