Малко контролно I

Име: курс: гр. ФН:

Задача 1. *(5 точки)* Подредете в асимптотично растящ ред функциите:

$$(n!)^2, \quad 2^{n!}, \quad \lg(n!), \quad \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}, \quad 2^{2^n}, \quad \left(\sqrt{2}\right)^{\lg n^2}$$

Задача 2. *(4 точки)* Решете следните рекурентни уравнения:

А) $T(n) = 4T\left(\frac{n}{3}\right) + n\lg n$

Б) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n$

В) $T(n) = 6T(n-1) - 9T(n-2) + n^2.2^n$

Г) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$

Задача 3. *(6 точки)* Дадена е следната рекурсивна функция:

$$\left| \begin{array}{l} T(0,k) = k \\ T(n+1,k) = T(n,k) + T(n,k+1) \end{array} \right.$$

Да се докаже, че $T\big(n, P(n)\big) \prec n!$ за всеки положителен полином $P(n)$.

Задача 4. *(5 точки)* Да се докаже, че за естествено число n, следният алгоритъм връща n^3:

```
int Alg(int n)
{
      int s = 0, t = 1, m = 0;
      for (int j = 0; j < n; j++)
      {
            t = t + m;
            s = s + t;
            m = m + 6;        // 6 като за отличен!
      }
      return s;
}
```

Задача 5. *(4 точки)*

Диаметър на масив от цели числа ще наричаме най-голямото произведение на два, различни по позиция, негови елемента.

Предложете алгоритъм с време $O(n)$, който намира диаметъра на масив с $n \geq 2$ елемента.

Задача 6. *(4 точки)*

Ще казваме, че масив от цели числа $a[n]$ е *вълнист* ако първите му $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ елемента са сортирани, а останалата част от масива или е празна или също е вълниста.

Докажете, че няма алгоритъм, който по даден масив от цели числа $a[n]$, за време $O(n)$ формира вълнист масив от елементите на a.

Кратки решения:

Задача 1. Правилният ред е:

$$\left(\sqrt{2}\right)^{\lg n^2} \prec \lg(n!) \prec \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} \prec (n!)^2 \prec 2^{2^n} \prec 2^{n!}$$

1.
$$\left(\sqrt{2}\right)^{\lg n^2} = 2^{\lg n} = n \prec n \lg n \asymp \lg(n!)$$

2.
$$\lg(n!) \asymp n \lg n \prec n\sqrt{n} \asymp \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}$$

3.
$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} \asymp n\sqrt{n} \prec (n!)^2$$

4.
$$\text{Тъй като } \lg(n!)^2 \asymp n \lg n \prec 2^n = \lg 2^{2^n}, \text{ то } (n!)^2 \prec 2^{2^n}$$

5.
$$\text{Тъй като } 2^n \prec n!, \text{ то } 2^{2^n} \prec 2^{n!}$$

Задача 2.

А) Тъй като $n \lg n = O\left(n^{\log_3 4 - \varepsilon}\right)$ за достатъчно малко $\varepsilon > 0$, то от първия случай на Master теоремата имаме $T(n) = \Theta\left(n^{\log_3 4}\right)$.

Б) От допълнителната работа n получаваме $T(n) = \Omega(n)$. Коректността на твърдението $\exists n_0\ \forall n \geq n_0\ T(n) \leq c.n$ за достатъчно голяма константа c се показва чрез прилагане на индукционното предположение за n. Оттук $T(n) = O(n)$, откъдето $T(n) = \Theta(n)$.

В) Общото решение на $T(n)$ има вида $T(n) = \lambda_1 2^n + \lambda_2 n.2^n + \lambda_3 n^2.2^n + \lambda_4 3^n + \lambda_5 n.3^n = \Theta(n.3^n)$.

Г) Тъй като $n^2 = \Omega(n^{1+\varepsilon})$ за достатъчно малко $\varepsilon > 0$ и освен това е изпълнено уловието за регулярност с константа $c = 1/2$, то от третия случай на Master теоремата имаме $T(n) = \Theta(n^2)$.

Задача 3. Лесно се проверява, че:

$$T(n,k) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (k+i) \leq (n+k).2^n$$

Сега $T\big(n, P(n)\big) \leq \big(n + P(n)\big).2^n \prec n!$, което е вярно за всеки положителен полином $P(n)$.

Задача 4.

На всяка итерация от цикъла $s = j^3$, $t = 3j^2 - 3j + 1$, а $m = 6j$. Коректността на тази инварианта се проверява непосредствено.

Задача 5.

Нека a_0, a_1 и b_0, b_1 са съответно двата най-малки и двата най-големи елемента на масива. Намирането им отнема време $O(n)$. Диаметърът на масива е по-голямото от $a_0.a_1$ и $b_0.b_1$.

Задача 6.

Вълнист масив може да се сортира за линейно време - сортираме рекурсивно дясната половина и merge-ваме с лявата. Това отнема време: $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$, което от Master теоремата има решение $T(n) = \Theta(n)$.

Оттук идва и долната граница $\Omega(n \log n)$ за формиране на вълнист масив.