Домашно № 1 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Информатика", I курс, I поток, летен семестър на 2016/2017 уч. г. в СУ, ФМИ

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	Общо
получени точки					
максимум точки	*10*	*10*	*10*	*10*	*40*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

Задача 1. Седем сандъка с различни строителни материали трябва да бъдат разпределени на десететажен строеж. По колко начина могат да се разпределят материалите по етажите, ако сандъците не бива да се отварят, а на десетия етаж трябва да бъдат оставени не по-малко от два вида материали? Пресметнете отговора докрай.

Задача 2. В равнината са прекарани n прави. Да се докаже че секторите, на които тези прави разделят равнината, могат да се оцветят в два цвята така, че съседните сектори да са разноцветни. Два сектора са съседни, ако имат обща граница с положителна дължина (линия, а не точка).

Задача 3. В множеството на целите положителни числа дефинираме релацията R:

$$R(a,\, b) \iff \frac{a}{b} \text{ е квадрат на рационално число.}$$

а) Докажете, че R е релация на еквивалентност. **(5 точки)**

б) Нека X е множеството от класовете на еквивалентност на релацията R,
а Y е множеството от всички крайни множества от прости числа.
Постройте биекция между X и Y. **(5 точки)**

Задача 4. Дадени са множествата $K = \left\{ (a,\, b) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{a}{b} = 2 \right\}$ и $L = \left\{ (a,\, b) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{b}{a} = 3 \right\}$.
Докажете, че $|\, K \,| = |\, L \,|$.

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Всеки от седемте сандъка може да попадне на който и да е от десетте етажа. Затова всяко разпределение на материалите по етажите се описва от наредена седморка $(a_1, \ldots, a_7)$ от цели числа от 1 до 10 (номера на етажи), където $a_i = k$ означава, че i-тият сандък е оставен на k-тия етаж. Наредените седморки са *вариации*. Имаме вариации *със повторение*, защото може два сандъка да бъдат оставени на един и същ етаж. Следователно броят на всички начини за разпределяне на строителните материали по етажи е равен на $\widetilde{V}_{10}^{\,7} = 10^7 = 10\,000\,000$.

От това число трябва да извадим броя на разпределенията, при които на десетия етаж няма никакви материали или има материали само от един вид.

Ако на десетия етаж няма материали, то сандъците са разпределени по другите девет етажа. Разсъждавайки както по-горе, стигаме до извода, че броят на разпределенията от този вид е равен на $\widetilde{V}_9^{\,7} = 9^7 = 4\,782\,969$.

Ако на десетия етаж има материали само от един вид, то този вид може да бъде избран по 7 начина, а останалите 6 сандъка се разпределят по другите 9 етажа по $\widetilde{V}_9^{\,6}$ начина, тоест разпределенията от този вид са $7 \,.\, \widetilde{V}_9^{\,6} = 7 \,.\, 9^6 = 7 \,.\, 531\,441 = 3\,720\,087$.

Окончателно, търсеният брой разпределения на строителните материали по етажите е равен на $10\,000\,000 - 4\,782\,969 - 3\,720\,087 = 1\,496\,944$.

Задача 2. Ще докажем твърдението с помощта на математическа индукция.

База: $n = 1$. Прекарана е единствена права. Тя разделя равнината на две полуравнини. Оцветяваме едната полуравнина в бяло, другата — в черно.

Индуктивна стъпка: Нека твърдението е вярно за n прави, тоест получените сектори могат да бъдат оцветени в два цвята. Прекарваме нова права (№ $n+1$) и обръщаме цветовете на секторите от едната полуравнина на новата права. Получаваме правилно оцветяване: съседните сектори са разноцветни. Следователно твърдението е вярно и за $n+1$ прави.

Забележка: Твърдението и доказателството остават в сила за произволни линии, които са безкрайни в двете посоки (например параболи) или са крайни, но затворени (окръжности, елипси, контури на многоъгълници и т.н.).

Задача 3.

а) R е релация на еквивалентност, защото е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

— Рефлексивност: $\forall a\ R(a, a)$, понеже $\dfrac{a}{a} = 1$ е квадрат на рационално число: $1 = 1^2$.

— Симетричност: От $R(a, b)$ следва, че $\dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{m}{n}\right)^2$ за някакви цели положителни числа m и n. Тогава $\dfrac{b}{a} = \left(\dfrac{n}{m}\right)^2$ е квадрат на реципрочното рационално число, следователно $R(b, a)$.

— Транзитивност: От $R(a, b)$ и $R(b, c)$ следва, че $\dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{m}{n}\right)^2$ и $\dfrac{b}{c} = \left(\dfrac{p}{q}\right)^2$ за някакви цели $m,\ n,\ p$ и $q > 0$. Тогава $\dfrac{a}{c} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{b}{c} = \left(\dfrac{mp}{nq}\right)^2$, следователно $R(a, c)$.

б) Лесно се вижда, че $R(a, b) \iff$ в разлагането си на прости множители числата a и b съдържат едни и същи прости множители на нечетна степен. На всеки клас на еквивалентност съпоставяме множеството на тези прости множители. Това е търсената биекция.

П р и м е р : Числата $15 = 3^1 . 5^1$, $60 = 2^2 . 3^1 . 5^1$, $135 = 3^3 . 5^1$ и т.н. са от един клас, на който съпоставяме множеството $\{3,\ 5\}$. На класа на точните квадрати съответства $\varnothing$.

Задача 4. За да докажем, че множествата K и L са равномощни, ще построим биекция. Множествата K и L могат да се запишат по следния начин:

$$K = \Big\{ (2x,\, x) \;\Big|\; x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Big\}\,, \qquad L = \Big\{ (x,\, 3x) \;\Big|\; x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Big\}\,.$$

Дефинираме функция $f : K \rightarrow L$ с формулата $f\Big((2x,\, x)\Big) = (x,\, 3x)$. Функцията f е биекция, защото всеки елемент на L има единствен първообраз от K, а именно: $f^{\,-1}\Big((x,\, 3x)\Big) = (2x,\, x)$, т.е. обратната релация $f^{\,-1}$ също е функция.