

Решение на домашна работа № 2
Дискретна Математика
3-та и 6-та група, Информатика, ФМИ, СУ

23 ноември 2009 г.

5 т. **Задача 1:** Докажете по индукция, че за всяко множество A , броят на подмножествата на A с четен брой елементи е равен на броя на подмножествата с нечетен брой елементи.

•• NB •• В условието е пропуснато уточнението, че A е крайно множество.

Решение: Нека 2^A степенното множество на A . Дефинираме, че:

$$2_e^A = \{X \mid X \in 2^A \text{ и } |X| \text{ е четно число.}\}$$

$$2_o^A = \{X \mid X \in 2^A \text{ и } |X| \text{ е нечетно число.}\}$$

Задачата се състои в това, да се докаже, че $\forall A, |2_e^A| = |2_o^A|$. Доказателството е с индукция по $|A|$.

База: $|A| = 0$, тоест $|A| = \emptyset$. Известно е, че

$$2^\emptyset = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

Очевидно

$$2_e^\emptyset = \{\emptyset\}$$

$$2_o^\emptyset = \{\{\emptyset\}\},$$

така че $|2_e^\emptyset| = |2_o^\emptyset|$ е вярно.

Индуктивна хипотеза: Нека твърдението е вярно за всяко множество A с големина $|A| = n$. Тоест,

$$\forall A, \text{ такова че } |A| = n: |2_e^A| = |2_o^A| \quad (1)$$

Индуктивна стъпка: Разглеждаме множество A , такова че $|A| = n + 1$. Нека a е произволен елемент на A . Очевидно 2^A се разбива на следните четири подмножества:

$$B_e = \{X \in 2^A \mid a \in X \text{ и } |X| \text{ е четно число}\}$$

$$B_o = \{X \in 2^A \mid a \in X \text{ и } |X| \text{ е нечетно число}\}$$

$$C_e = \{X \in 2^A \mid a \notin X \text{ и } |X| \text{ е четно число}\}$$

$$C_o = \{X \in 2^A \mid a \notin X \text{ и } |X| \text{ е нечетно число}\}$$

Очевидно

$$2_e^A = B_e \cup C_e$$

$$2_o^A = B_o \cup C_o$$

Тъй като $B_e \cap C_e = \emptyset$ и $B_o \cap C_o = \emptyset$,

$$|2_e^A| = |B_e| + |C_e| \quad (2)$$

$$|2_o^A| = |B_o| + |C_o| \quad (3)$$

Нека $A' = A \setminus \{a\}$. Съгласно индуктивната хипотеза (1),

$$|2_e^{A'}| = |2_o^{A'}| \quad (4)$$

Очевидно е, че $2_e^{A'} = B_e$ и $2_o^{A'} = B_o$. Следователно,

$$|B_e| = |B_o| \quad (5)$$

Ще покажем, че $|C_e| = |C_o|$. Забележете, че

$$|B_e| = |C_o| \quad (6)$$

понеже има биективно съответствие между елементите им:

- всеки елемент u на B_e се получава от точно един елемент v на C_o чрез „добавяне“ на a ; по-формално, $u = v \cup \{a\}$,
- всеки елемент w на C_o се получава от точно един елемент z на B_e чрез „махане“ на a ; по-формално, $w = z \setminus \{a\}$.

Аналогично,

$$|B_o| = |C_e| \quad (7)$$

понеже има биективно съответствие между елементите им:

- всеки елемент u на B_o се получава от точно един елемент v на C_e чрез „добавяне“ на a ; по-формално, $u = v \cup \{a\}$,
- всеки елемент w на C_e се получава от точно един елемент z на B_o чрез „махане“ на a ; по-формално, $w = z \setminus \{a\}$.

От (5), (6) и (7) следва, че:

$$|C_e| = |C_o| \quad (8)$$

От (5), (8), (2) и (3) следва, че $|2_e^A| = |2_o^A|$. \square

3 т. **Задача 2:** Докажете, че

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Решение:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} &= \\ &= \left(\sum_{\substack{k \in \{0,1,\dots,n\} \\ k \text{ четно}}} (-1)^k \binom{n}{k} \right) + \left(\sum_{\substack{k \in \{0,1,\dots,n\} \\ k \text{ нечетно}}} (-1)^k \binom{n}{k} \right) = \\ &= \left(\sum_{\substack{k \in \{0,1,\dots,n\} \\ k \text{ четно}}} \binom{n}{k} \right) - \left(\sum_{\substack{k \in \{0,1,\dots,n\} \\ k \text{ нечетно}}} \binom{n}{k} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

Известно е, че $\binom{n}{k}$ е броят на подмножествата, имащи k елемента, на кое да е n -елементно множество A . Тогава, очевидно,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k \in \{0,1,\dots,n\} \\ k \text{ четно}}} \binom{n}{k} &\text{ е броят на подмножествата на } A \text{ с четен брой елементи} \\ \sum_{\substack{k \in \{0,1,\dots,n\} \\ k \text{ нечетно}}} \binom{n}{k} &\text{ е броят на подмножествата на } A \text{ с нечетен брой елементи} \end{aligned}$$

Съгласно Задача 1, тези две суми са еднакви. Следва, че $(9) = 0$. \square

7 т. **Задача 3:** Докажете с комбинаторни средства, че

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Решение: Нека A е множество с $2n$ елемента. Нека всеки елемент от A има атрибут-цвят, като n елемента са бели, а останалите n , черни. По колко начина можем да подберем различни подмножества на A с по n елемента?

От една страна, това може да стане по

$$\binom{2n}{n} \quad (10)$$

начина, тъй като това са комбинаторни конфигурации без повторение и без наредба – тук не обръщаме внимание на цветовете на избраните елементи.

От друга страна, можем да разбием подбиранията по броя на елементите от единия цвят, да речем белия. Белите елементи, които попадат в дадено подбиране, може да са 0 или 1 или ... или n . Следователно, да подберем n елемента от общо $2n$ в тази задача е същото като да подберем k елемента измежду всичките n бели и да подберем $n - k$ елемента измежду всичките n черни. За дадено k , такава че $0 \leq k \leq n$, броят начини да подберем n елемента от общо $2n$, така че k измежду подбраните да са бели, е, по принципа на произведението:

$$\underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{брой начини } k \text{ елемента от общо } n \text{ да са бели}} \times \underbrace{\binom{n}{n-k}}_{\text{брой начини останалите елементи да са черни}}$$

Тъй като k се мени от 0 до n и подбиранията се разбиват по k (при различен брой бели елементи в две подбирания, те задължително са различни), общият брой подбирания е:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$$

Но знаем, че $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, следователно общият брой на подбирания е:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \tag{11}$$

Изразите (10) и (11) броят едно и също количество, следователно са равни. \square

- 12 т. **Задача 4:** По колко начина могат да седнат около кръгла маса с номерирани столове хората от n на брой женени двойки (очевидно става дума за $2n$ души), така че съпрузите от нито една двойка да не седят на съседни столове?

Решение: Нека двойките съпрузи са c_1, c_2, \dots, c_n . Нека S_i означава множеството от всички възможни сядания, в които съпрузите от c_i седят непозволено, тоест един до друг, за някое i , такава че $1 \leq i \leq n$. Нека \mathcal{U} е универсумът в тази задача, а именно, множеството от всички възможни сядания на тези $2n$ души около масата (без оглед на принадлежност към съпрузески двойки). Търсеният отговор е $|\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \dots \cap \overline{S_n}|$. По принципа

на включването и изключването,

$$\begin{aligned}
 |\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \dots \cap \overline{S_n}| &= |U| \\
 &\quad - \sum_{1 \leq i \leq n} |S_i| \\
 &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |S_i \cap S_j| \\
 &\quad - \dots \\
 &\quad + (-1)^n |S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n|
 \end{aligned}$$

Лесно се вижда, че $|U| = (2n)!$, тъй като толкова са начините, $2n$ човека да седнат на $2n$ различни (номерирани) места без никакви ограничения.

Ще покажем, че всяка от сумите

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_t \leq n} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \dots \cap S_{i_t}|$$

където t е някое цяло число, такава че $1 \leq t \leq n$, по абсолютна стойност е равна на

$$\binom{n}{t} \cdot 2n \cdot (2n - t - 1)! \cdot 2^t$$

Тази сума е равна на броя начини t двойки да са седнали непозволено, по всички възможни начини да бъдат подбрани t двойки от $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$. Имаме следните четири независими съображения.

- По $\binom{n}{t}$ начина можем да подберем t двойки от общо n .
- По $2n$ начина можем да изберем два стола за първата двойка от тези t двойки.
- За останалите $t - 1$ двойки, по $(2n - t - 1)!$ начина можем да разположим хората от тези $t - 1$ двойки, така че хората от всяка от тези двойки да са съседни, и останалите хора (тези, които не са в нито една от въпросните t двойки) по оставащите (след сядането на първата двойка) столове. Причината това да е така е, че гледаме на тези $t - 1$ двойки като на „блокове“, тоест една такава двойка е един обект, а всеки човек, който не е в някоя двойка, е самостоятелен

обект. Общо обектите са на брой

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{2n - 2}_{\text{толкова са хората за настаняване след сядането на първата двойка}} \\
 - & \underbrace{2(t - 1)}_{\text{от техния брой вадим броя на хората в } t-1 \text{ двойки}} \\
 + & \underbrace{t - 1}_{\text{толкова са обектите от вид „двойка“}} = 2n - t - 1
 \end{aligned}$$

Следователно, задачата по колко начина могат да седнат тези $t - 1$ двойки непозволено на оставащите места (след сядането на първата двойка) е същата като задачата, по колко начина можем да разположим $2n - t - 1$ обекта в редица.

- За всяка от досега направените подборки на места за сядане на t двойки по всички възможни непозволени начини, за всяка двойка можем да разположим хората от нея по 2 начина на двата избрани стола. Общо това са 2^t възможни начина.

След като установихме, че

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_t \leq n} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \dots \cap S_{i_t}| = \binom{n}{t} \cdot 2n \cdot (2n - t - 1)! \cdot 2^t$$

отговорът следва да е

$$\begin{aligned}
 |\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \dots \cap \overline{S_n}| &= (2n)! + \sum_{t=1}^n (-1)^t \cdot \binom{n}{t} \cdot 2n \cdot (2n - t - 1)! \cdot 2^t \\
 &= \sum_{t=0}^n (-1)^t \cdot \binom{n}{t} \cdot 2n \cdot (2n - t - 1)! \cdot 2^t \\
 &= 2n \left(\sum_{t=0}^n (-1)^t \cdot \binom{n}{t} \cdot (2n - t - 1)! \cdot 2^t \right)
 \end{aligned}$$

5 т. **Задача 5:** Колко са възможните ръце в бриджа с разпределение на цветовете 5, 4, 4, 0? Дайте отговор-число.

Решение: За фиксирано разпределение на цветовете от даден брой \dagger , броят на възможните ръце е:

$$\binom{13}{5} \times \binom{13}{4} \times \binom{13}{4} \times \binom{13}{0} = 657\,946\,575$$

\dagger Примерно, 5 купи, 4 пики, 4 спатии, 0 кари.

Това е така, понеже по $\binom{13}{k}$ начина можем да подберем k карти от 13-те карти от даден цвят.

Това не е окончателният отговор. Окончателният отговор е произведението от 657 946 575 и броят начини, по които можем да изберем от кой цвят да има 5 карти, от кой 4 и т.н. Този брой е

$$\binom{4}{1} \times \binom{3}{1} = 12$$

тъй като по $\binom{4}{1}$ начина може да изберем от кой цвят да има 5 карти и по $\binom{3}{1}$ начина, от оставащите 3 цвята, от кой да има 0 карти; след като сме избрали от кой цвят да има 5 и от кой, 0 карти, за цветовете с по 4 карти изборът е само един. Друг начин да се изведе това „12“ е чрез формулата за мултиномиалния коефициент:

$$\frac{4!}{1!.2!.1!} = 12$$

И така, отговорът е

$$657\,946\,575 \times 12 = 7\,895\,358\,900 \quad \square$$

Задача 6: На празнично тържество идват 100 гости. Разиграва се благотворителна томбола по следните правила. Всеки гостенин записва името си (да приемем, че всички имена са различни) върху картонче, пуска картончето в кутия и плаща някаква сума за участието в томболата. В края на тържеството се вадят по случаен начин едно след друго три картончета от кутията. Веднъж изтеглено, никое картонче не се слага отново в кутията. Този, чието име е изтеглено първо, получава награда от p_1 лева; вторият получава награда от p_2 лева, а третият, от p_3 лева. По колко различни начина могат да бъдат раздадени наградите на гостите, ако

2 т. а) $p_1 = 200$ лв, $p_2 = 100$ лв, $p_3 = 50$ лв.

2 т. б) $p_1 = p_2 = p_3 = 100$ лв.

Решение на а): Това какви точно са наградите е без значение. Това, което има значение е, че наградите са различни. Задачата се свежда до преброяване на различните комбинаторни конфигурации с дължина 3 (защото наградите са 3 на брой), с наредба (защото наградите

са различни) и без повторение (защото едно име не може да бъде изтеглено повече от един път), над опорно множество със 100 елемента. $K_H(100, 3) = 100 \times 99 \times 98 = 970\,200$.

По-просто казано, най-голямата награда може да отиде при 100 човека, средната, при 99, а най-малката, при 98.

Решение на б): Задачата се свежда до преброяване на различните комбинаторни конфигурации с дължина 3, без наредба (защото наградите са еднакви) и без повторение (защото едно име не може да бъде изтеглено повече от един път), над опорно множество със 100 елемента. $K(100, 3) = \binom{100}{3} = 161\,700$.

По-просто казано, задачата е същата като „По колко начина може да бъдат подбрани 3 човека от 100?“. □

Задача 7: На празнично тържество идват 100 гости. Разиграва се благотворителна томбола по следните правила. Всеки гостенин записва името си (да приемем, че всички имена са различни) върху картонче, пуска картончето в кутия и плаща някаква сума за участието в томболата. В края на тържеството се вадят по случаен начин едно след друго три картончета от кутията. Веднъж изтеглено, всяко картонче се слага отново в кутията. Този, чието име е изтеглено първо, получава награда от p_1 лева; вторият получава награда от p_2 лева, а третият, от p_3 лева. По колко различни начина могат да бъдат раздадени наградите на гостите, ако

2 т. а) $p_1 = 200$ лв, $p_2 = 100$ лв, $p_3 = 50$ лв.

2 т. б) $p_1 = p_2 = p_3 = 100$ лв.

Решение на а): Задачата се свежда до преброяване на различните комбинаторни конфигурации с дължина 3 (защото наградите са 3 на брой), с наредба (защото наградите са различни) и с повторение (защото едно име може да бъде изтеглено повече от един път), над опорно множество със 100 елемента. $K_{H,P}(100, 3) = 100^3 = 1\,000\,000$.

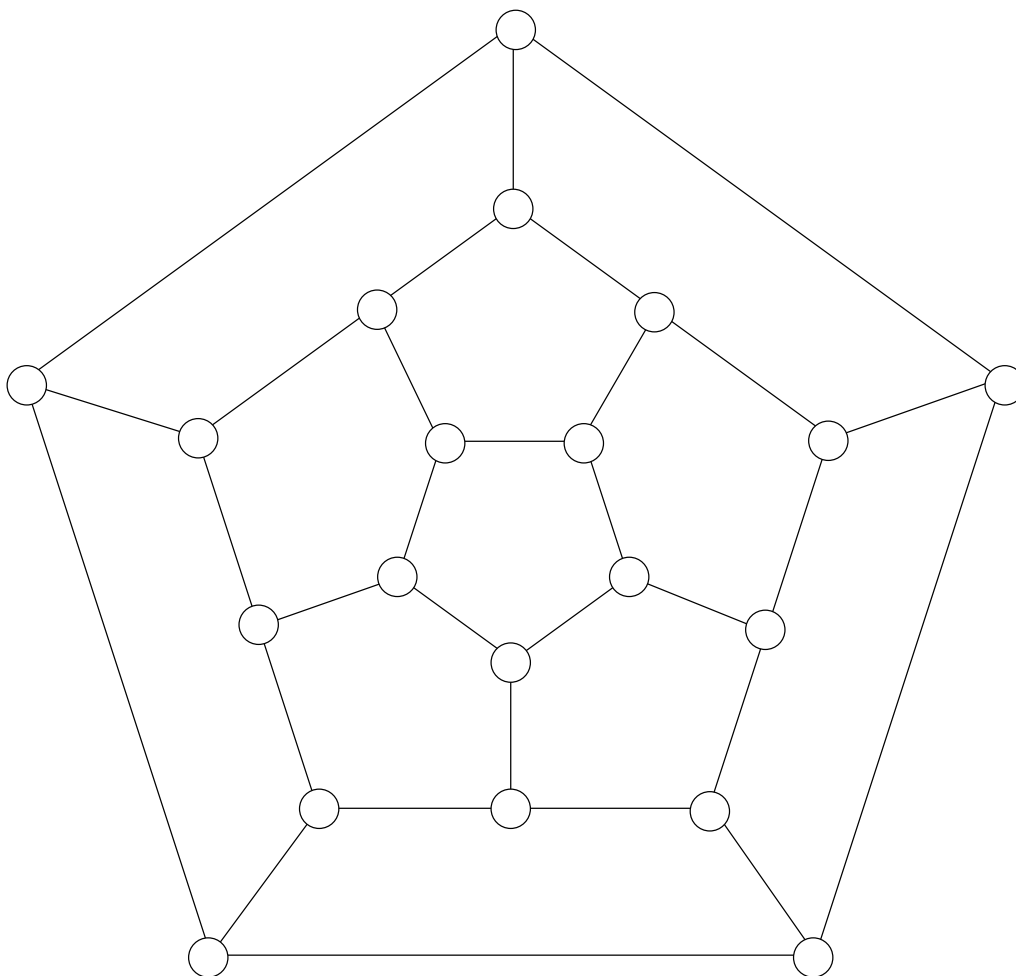
По-просто казано, най-голямата награда може да отиде при 100 човека, средната, също при 100, и най-малката, също при 100.

Решение на б): Задачата се свежда до преброяване на различните комбинаторни конфигурации с дължина 3 (защото наградите са 3 на брой), без наредба (защото наградите са еднакви), с повторение (защото едно

име може да бъде изтеглено повече от един път), над опорно множество със 100 елемента. $K_{H,\Pi}(100,3) = \binom{100+3-1}{3} = 171\,700$.

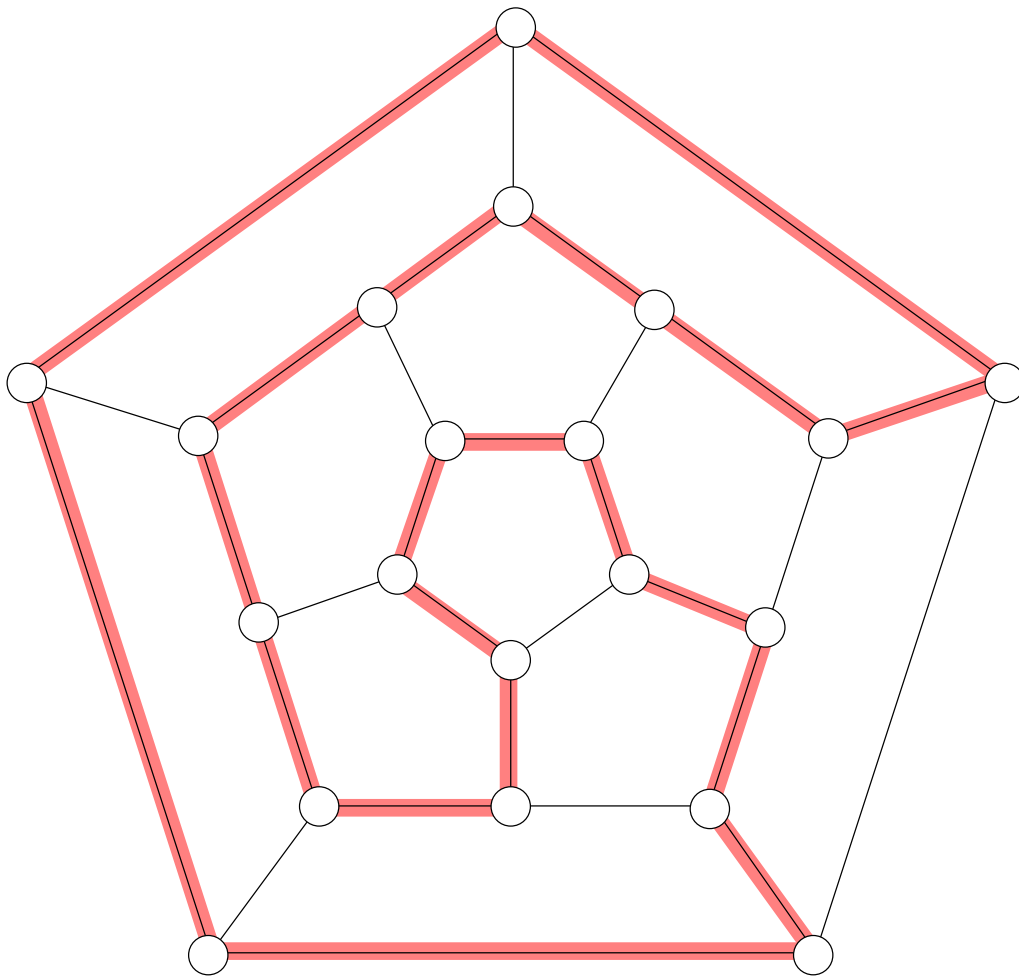
□

5 т. **Задача 8:** Да се открие Хамилтонов цикъл в следния граф с 20 върха и 30 ребра:



Фиг. 1

Решение: Решението е показано на Фигура 2 на следващата страница.
□



Фиг. 2: Хамилтонов цикъл в графа от Фигура 1.

5 т. **Задача 9:** Възможно ли е в група от 11 човека, всеки да познава точно трима души (освен себе си, естествено)? За целите на тази задача, познанството е симетрично: за всеки двама души X и Y , X познава Y тогава и само тогава, когато Y познава X .

Решение: Не е възможно. Задачата може да бъде моделирана с граф. Нека множеството от тези хора е $H = \{h_1, h_2, \dots, h_{11}\}$. Да построим граф $G(H, E)$, като ребрата се поставят по следния начин:

$$\forall i, j, \text{ такива че } 1 \leq i < j \leq 11, (h_i, h_j) \in E \Leftrightarrow h_i \text{ се познава с } h_j$$

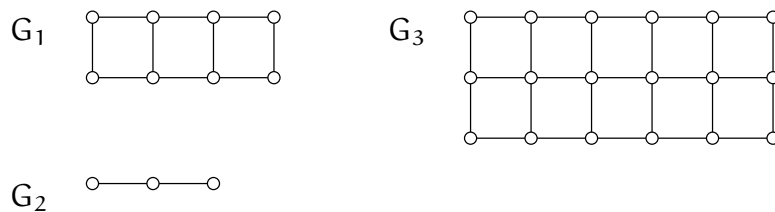
Броят на познатите на човек h_i в групата е равен на степента на h_i в G , за $1 \leq i \leq 11$. Задачата е еквивалентна на задачата, може ли в G всеки връх да има степен 3. Известно е, че в кой да е граф, върховете от нечетна степен са четен брой, следователно не е възможно всеки от 11-те върха да е от нечетна степен, следователно не е възможно всеки човек от групата да познава точно трима души от същата група. \square

15 т. **Задача 10:** Нека $J_n = \{1, 2, \dots, n\}$, за всяко цяло положително n . Нека дефинираме, че „граф-мрежа $m \times n$ “ е обикновен граф $G(V, E)$, където множеството от върховете е $V = J_m \times J_n$, а множеството от ребрата е

$$E = \{(u \times v, p \times q) \mid u \in J_n, v \in J_m, p \in J_n, q \in J_m, |u - p| + |v - q| = 1\}$$

Намерете и докажете необходимо и достатъчно условие за това, да има Хамилтонов цикъл в граф-мрежа $3 \times n$.

Решение: Ето няколко примера за графи-мрежи:



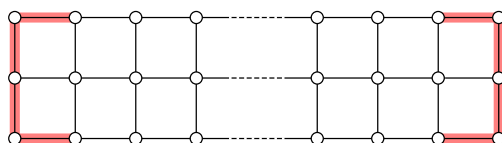
G_1 е граф-мрежа 2×4 , G_2 е граф-мрежа 1×3 , а G_3 е граф-мрежа 3×6 . За краткост ще означаваме графа-мрежа $3 \times n$ с G^n .

Наблюдение 1. Ако в G^n за $n \geq 2$ има Хамилтонов цикъл c , то следните два пътя:

- $(1, 2), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (3, 2)$ и
- $(1, n - 1), (1, n), (2, n), (3, n), (3, n - 1)$

са части от c , тоест подпоследователности на c . □

Въпросните пътища нямат общи върхове тогава и само тогава, когато $n \geq 4$, но това дали имат общи върхове или не е без значение за валидността на твърдението. Ето нагледно какво се твърди в наблюдението – пътищата, маркирани в червено, са задължително част от Хамилтоновия цикъл, ако изобщо има такъв:



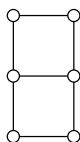
Теорема 1. *Необходимото и достатъчно условие G^n да има Хамилтонов цикъл е n да е четно число.*

Доказателство:

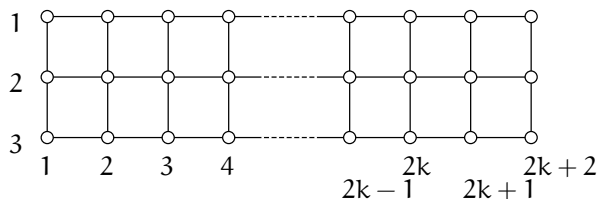
Тъй като твърдението е от вида „ X е необходимо и достатъчно условие за Y “, необходимо е доказателство от две части.

Доказателство, I част: Ще докажем, че ако n е четно число, то в G^n има Хамилтонов цикъл. Доказателството е с индукция по n .

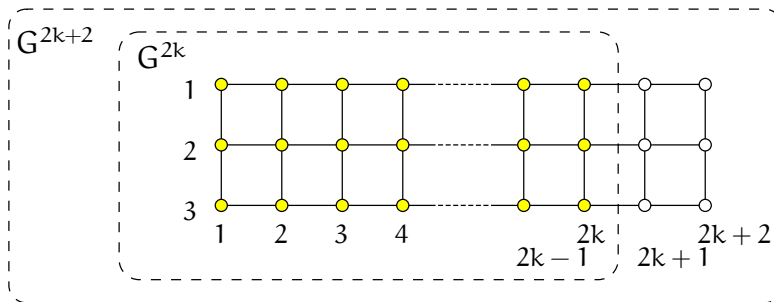
Базата е $n = 2$. Очевидно, G^2 има Хамилтонов цикъл:



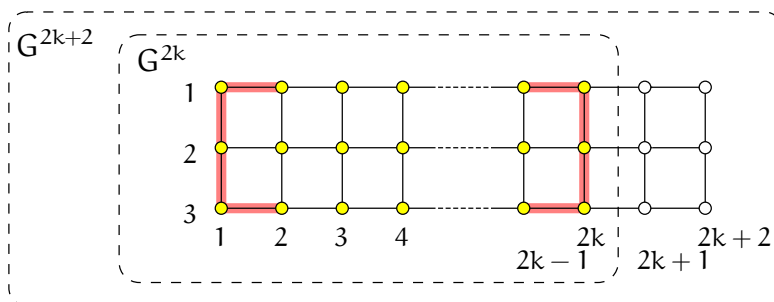
Да допуснем, че G^{2k} за някое $k \in \mathbb{N}$ има Хамилтонов цикъл и да разгледаме $G^{2(k+1)} = G^{2k+2}$:



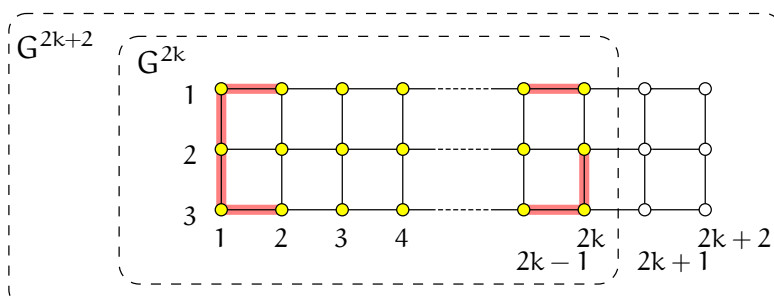
Забележете, че върховете от вида (x, y) , където $x \in \{1, 2, 3\}$ и $y \in \{1, 2, \dots, 2k\}$ индуцират подграф G^{2k} в G^{2k+2} . На следния чертеж илюстрираме този факт, маркирайки върховете на индуцирания G^{2k} в жълто.



Съгласно индукционната хипотеза, в този индуциран G^{2k} има Хамилтонов цикъл c . Съгласно Наблюдение 1, маркираните в розово пътища на следния чертеж са части от c :

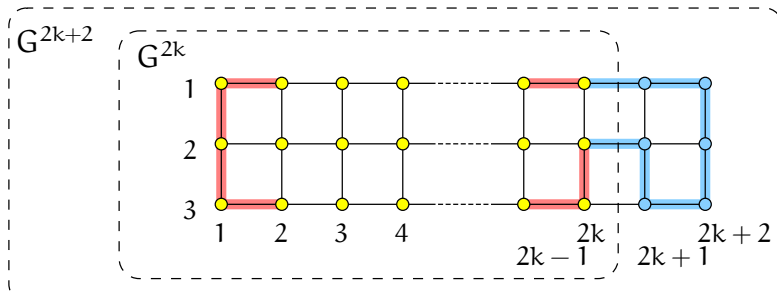


Да премахнем реброто $((1, 2k), (2, 2k))$ от c :



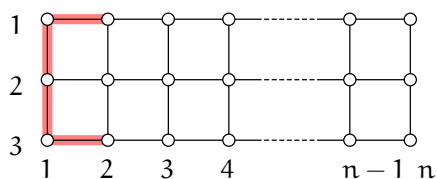
Получаваме Хамилтонов път p с краища $(1, 2k)$ и $(2, 2k)$.

Да добавим към p оцветените в синьо ребра и върхове:



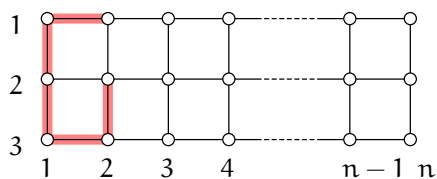
Построихме Хамилтонов цикъл в G^{2k+2} .

Доказателство, II част: Ще докажем, че ако в G^n има Хамилтонов цикъл, то n е четно число. Нека в G^n има Хамилтонов цикъл. Съгласно Наблюдение 1, ребрата, маркирани в розово, са в този цикъл:

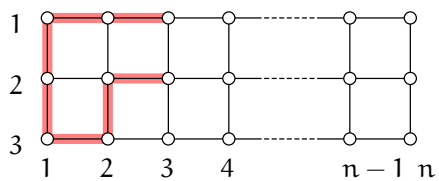


Да си представим възможните продължения за Хамилтоновия цикъл. Връх $(3, 2)$ има два съседа, към които можем да продължим, а именно $(2, 2)$ и $(3, 3)$.

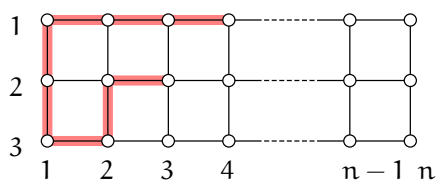
Случай А): реброто $((3, 2), (2, 2))$ е в Хамилтоновия цикъл:



Оттук имаме задължително продължение:



И още:



Ако от връх $(2, 3)$ продължим не към $(3, 3)$, а към $(2, 4)$, то връх $(3, 3)$ никога не може да бъде достигнат от цикъла. Следователно, реброто $((2, 3), (3, 3))$ е в цикъла:

