Домашно № 2 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Информатика", I курс, I поток, летен семестър на 2016/2017 уч. г. в СУ, ФМИ

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	Общо
получени точки					
максимум точки	*10*	*10*	*10*	*10*	*40*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

Задача 1. Да се решат рекурентните уравнения:

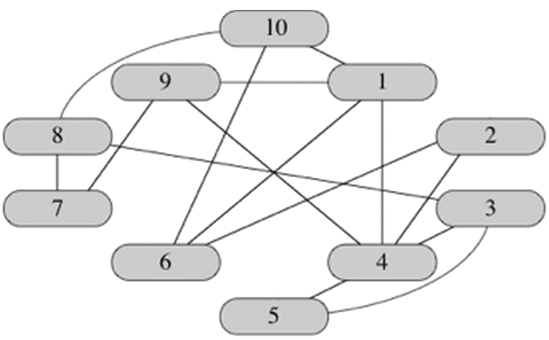
а) $T(0) = 44, \quad T(n) = 2017^{T(n-1)}$ за всяко цяло $n \geq 1$. **(2 точки)**

б) $T(1) = 1, \quad T(n) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{T(n-1)} + n^2}$ за всяко цяло $n \geq 2$. **(4 точки)**

в) $T(n) = 13\,T(n-1) - 42\,T(n-2) + 9 + 15n\,.\,8^n + 5n^2\,.\,19^n + 16n^3 + 8^{n+1} + 18n^4$. **(4 точки)**

Задача 2. Да се пресметне броят на непразните алгебрични сборове, които могат да бъдат образувани от числата $1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ,\ n$ при спазване на следните правила:
— Всяко число участва в алгебричния сбор най-много веднъж.
— Всяко число може да участва или със знак плюс, или със знак минус.
— По абсолютна стойност всяко събираемо е с поне две единици по-голямо от предходното.
Например при $n = 3$ има десет възможни алгебрични сбора:
$+1, \quad +2, \quad +3, \quad -1, \quad -2, \quad -3, \quad 1+3, \quad -1+3, \quad 1-3, \quad -1-3.$

Задача 3. За показания граф дайте обосновани отговори на следните въпроси:



а) Има ли хамилтонов цикъл? **(1 точка)**
б) Има ли хамилтонов път? **(1 точка)**
в) Има ли ойлеров цикъл? **(1 точка)**
г) Има ли ойлеров път? **(1 точка)**
д) Колко е хроматичното число? **(3 точки)**
е) Колко е хроматичният индекс? **(3 точки)**

Задача 4. Докажете, че ако в ориентиран тегловен граф има контур с отрицателно тегло, то има и прост контур с отрицателно тегло.

РЕШЕНИЯ

Задача 1.

а) Пресмятаме първите няколко члена на редицата:

$$T(0) = 44, \quad T(1) = 2017^{44}, \quad T(2) = 2017^{2017^{44}}.$$

Оттук не е трудно да се досетим за формулата за общия член:

$$T(n) = 2017^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2017^{44}}}}},$$

където броят на числата 2017 в дясната страна е равен на n.

Доказателство: чрез математическа индукция.

База: При $n = 0$ изразът за $T(n)$ според формулата съдържа нула числа 2017, тоест $T(0) = 44$, което е вярно по условие.

Индуктивна стъпка: Нека $n > 0$ и в $T(n-1)$ има $n-1$ числа 2017. От $T(n) = 2017^{T(n-1)}$ следва, че в $T(n)$ числата 2017 са с едно повече — основата на степента в дясната страна на рекурентното уравнение. Следователно в $T(n)$ числата 2017 са $(n-1)+1 = n$ на брой.

б) Преобразуваме рекурентното уравнение във вида

$$\frac{1}{T(n)} \;=\; \frac{1}{T(n-1)} + n^2.$$

Развиваме уравнението:

$$\frac{1}{T(n)} \;=\; \frac{1}{T(n-1)} + n^2 \;=\; \frac{1}{T(n-2)} + (n-1)^2 + n^2 \;=\; \frac{1}{T(n-3)} + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2.$$

Като развием докрай, получаваме формулата

$$\frac{1}{T(n)} \;=\; \frac{1}{T(1)} + 2^2 + \ldots + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 \;=\; 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2.$$

Следователно $\dfrac{1}{T(n)} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, откъдето намираме $T(n) = \dfrac{6}{n(n+1)(2n+1)}$.

в) В свободния член групираме събираемите с равни основи:

$$T(n) = 13\,T(n-1) - 42\,T(n-2) + (15n+8)\,.\,8^n + 5n^2\,.\,19^n + (18n^4 + 16n^3 + 9)\,.\,1^n.$$

От хомогенната част съставяме характеристичното уравнение $x^n = 13\,x^{n-1} - 42\,x^{n-2}$. Понеже търсим ненулеви корени, делим на $x^{n-2} \neq 0$ и получаваме уравнението $x^2 - 13x + 42 = 0$, чиито решения са числата 6 и 7. Характеристични корени на свободния член са числата 8 (двукратен корен), 19 (трикратен) и 1 (петкратен). Получава се мултимножество от корени $\Big\{ 1\,,\ 1\,,\ 1\,,\ 1\,,\ 1\,,\ 6\,,\ 7\,,\ 8\,,\ 8\,,\ 19\,,\ 19\,,\ 19 \Big\}$. Следователно

$$T(n) = \Big(C_1 + C_2\,n + C_3\,n^2 + C_4\,n^3 + C_5\,n^4\Big) + C_6\,6^n + C_7\,7^n + \Big(C_8 + C_9\,n\Big)\,8^n + \Big(C_{10} + C_{11}\,n + C_{12}\,n^2\Big)\,19^n.$$

Задача 2. Да означим с $f(n)$ търсения брой на алгебричните сборове. Те са два вида:

— Сборове, в които числото n не участва. Те се образуват от числата $1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n-1$, затова броят на тези сборове е равен на $f(n-1)$.

— Сборове, в които участва числото n. Тогава $n-1$ не участва, т.е. другите събираеми са измежду числата $1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n-2$. Броят на тези сборове е равен на $2f(n-2)+2$, където множителят 2 отразява двете възможности за знака на n — плюс и минус. Събираемото 2 е заради сборовете $+n$ и $-n$: те са непразни, но ако махнем n, ще останат празни, поради което не влизат в бройката $f(n-2)$.

Правилото за събиране поражда рекурентното уравнение $f(n) = f(n-1) + 2f(n-2) + 2$. Съответното характеристично уравнение е $x^n = x^{n-1} + 2x^{n-2}$, което при $x \neq 0$ е равносилно на $x^2 = x + 2$, чиито корени са -1 и 2. От свободния член $2\,.\,1^n$ идва коренът 1. Затова

$$f(n) = C_1(-1)^n + C_2 + C_3\,2^n.$$

Начални условия: $f(1)=2$ и $f(2)=4$, защото при $n=1$ има два алгебрични сбора: $+1$ и -1; а при $n=2$ има четири сбора: $+1$, -1, $+2$ и -2. Също така, $f(3) = f(2) + 2f(1) + 2 = 10$.

В общото решение заместваме $n = 1,\ 2,\ 3$. Получава се системата

$$\left|\begin{array}{rcr} 2\,C_3 + C_2 - C_1 & = & 2 \\ 4\,C_3 + C_2 + C_1 & = & 4 \\ 8\,C_3 + C_2 - C_1 & = & 10 \end{array}\right.$$

с единствено решение $C_1 = -\dfrac{1}{3}$, $C_2 = -1$, $C_3 = \dfrac{4}{3}$. Следователно $f(n) = \dfrac{2^{n+2} + (-1)^{n+1}}{3} - 1$.

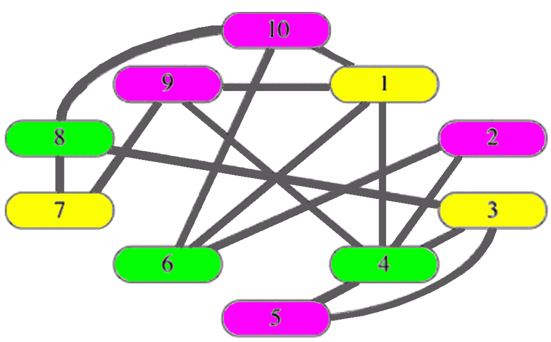
Задача 3.

а) Има хамилтонов цикъл: $6 - 2 - 4 - 5 - 3 - 8 - 7 - 9 - 1 - 10 - 6$.

б) Като премахнем последното ребро от хамилтоновия цикъл, получаваме хамилтонов път: $6 - 2 - 4 - 5 - 3 - 8 - 7 - 9 - 1 - 10$.

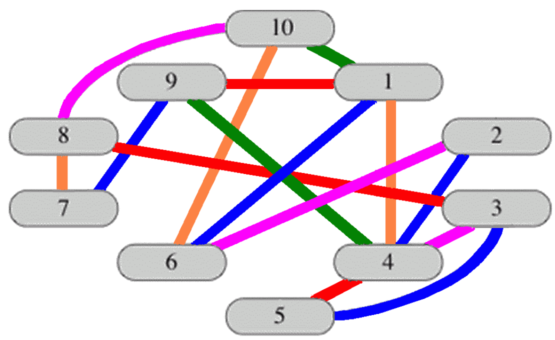
в), г) Върховете № 3, № 4, № 6, № 8, № 9 и № 10 са от нечетна степен (3 и 5). Щом има повече от два върха от нечетна степен, то не съществува нито ойлеров цикъл, нито ойлеров път.

д) Три цвята са достатъчни за върховете, както показва следният пример:



По-малко от три цвята не стигат, защото има клика с три върха (№ 3, № 4 и № 5). Затова хроматичното число на графа е 3.

е) Пет цвята са достатъчни за ребрата. Това личи от следното оцветяване:



Четири цвята са недостатъчни, понеже има връх от пета степен (връх № 4). Затова хроматичният индекс на графа е 5.

Задача 4. От всички контури с отрицателни тегла (по условие има поне един такъв контур) да изберем онзи, който има най-малко ребра. Ако сред контурите с отрицателни тегла има няколко с минимален брой ребра, няма значение кой от тях ще изберем.

Означаваме избрания контур с C. Ще докажем, че C е прост контур, т.е. не съдържа повтарящи се върхове с изключение на началния и крайния връх, които съвпадат и не се срещат повече в C.

Да допуснем противното: че C не е прост контур. Има две възможности (които могат да съществуват едновременно).

Първи случай: C съдържа повторение на връх, различен от началния. Следователно контурът C изглежда така: $C = x - a - b - \ldots - c - y - d - e - f - \ldots - h - y - p - q - \ldots - r - s - x$, където x е началото и краят на C, а върхът y е този, който се среща два пъти, $y \neq x$. Ако се повтарят няколко върха, няма значение кой от тях ще играе ролята на y. Върхът y може да се среща повече от два пъти; в записа на C присъстват само първите две срещания.

Тогава $C_1 = x - a - b - \ldots - c - y - p - q - \ldots - r - s - x$ и $C_2 = y - d - e - f - \ldots - h - y$ са контури с по-малък брой ребра от C. От минималността на броя на ребрата на C следва, че $w\left(C_1\right) \geq 0$, $w\left(C_2\right) \geq 0$, където w е теглото на контура (сборът от теглата на ребрата му). От друга страна, контурът C е избран така, че $w\big(C\big) < 0$. От дефиницията на C_1 и C_2 се вижда, че $w\left(C_1\right) + w\left(C_2\right) = w\big(C\big)$. Получава се така, че събираемите са неотрицателни, а сборът е отрицателен, което е невъзможно.

Втори случай: Началният връх на C се среща поне още веднъж (не само като краен). Следователно контурът C изглежда така: $C = x - a - b - \ldots - c - x - d - e - f - \ldots - h - x$. $C_1 = x - a - b - \ldots - c - x$ и $C_2 = x - d - e - f - \ldots - h - x$ са контури с по-малко ребра от C. Отново $w\left(C_1\right) \geq 0$, $w\left(C_2\right) \geq 0$, $w\big(C\big) < 0$, $w\left(C_1\right) + w\left(C_2\right) = w\big(C\big)$ и пак се стига до противоречието, че сборът на две неотрицателни числа е отрицателен.

Полученото противоречие показва, че направеното допускане не е вярно. Следователно е вярно първоначалното твърдение: C е прост контур. От самия избор на контура C е ясно, че C има отрицателно тегло. Съществуването на прост контур с отрицателно тегло е доказано.