Решение на домашна работа № 2 с корекция на решението на Задача 1
Дискретна Математика
3-та и 6-та група, Информатика, ФМИ, СУ

8 декември 2009 г.

5 т. **Задача 1:** Докажете по индукция, че за всяко множество A, броят на подмножествата на A с четен брой елементи е равен на броя на подмножествата с нечетен брой елементи.

NB *В условието е пропуснато уточнението, че A е крайно множество.*

NB *Освен това е пропуснато да се уточни, че $A \neq \emptyset$. В решенията на домашното, публикувани преди две седмици, грешно се твърди, че*

$$2^{\emptyset} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

В действителност

$$2^{\emptyset} = \{\emptyset, \emptyset\} = \{\emptyset\}$$

Очевидно твърдението не е в сила, понеже $|\{\emptyset\}| = 1$ и няма как множество с един елемент да се разбие на две подмножества с равен брой елементи. Иначе казано, подмножествата на $\emptyset$ с четен брой елементи са едно на брой, а именно:

$\emptyset$ // *има нула елемента, нулата е четно число*

а подмножествата на $\emptyset$ с нечетен брой елементи са нула на брой – няма такива.

Решение: Нека 2^A степенното множество на A. Дефинираме, че:

$$2^A_e = \{X \mid X \in 2^A \text{ и } |X| \text{ е четно число.}\}$$
$$2^A_o = \{X \mid X \in 2^A \text{ и } |X| \text{ е нечетно число.}\}$$

Задачата се състои в това, да се докаже, че $\forall A$, такова че $A \neq \emptyset$, $|2^A_e| = |2^A_o|$. Доказателството е с индукция по $|A|$.
База: $|A| = 1$. Тогава

$$2^A = \{\emptyset, A\}$$

Очевидно

$$2^A_e = \{\emptyset\}$$
$$2^A_o = \{A\},$$

така че $|2^A_e| = |2^A_o|$ е вярно.

Индуктивна хипотеза: Нека твърдението е вярно за всяко множество A с големина $|A| = n$. Тоест,

$$\forall A, \text{ такова че } |A| = n \colon |2_o^A| = |2_e^A| \tag{1}$$

Индуктивна стъпка: Разглеждаме множество A, такова че $|A| = n+1$. Нека a е произволен елемент на A. Очевидно 2^A се разбива на следните четири подмножества:

$$\begin{aligned}
B_e &= \{X \in 2^A \mid a \in X \text{ и } |X| \text{ е четно число}\} \\
B_o &= \{X \in 2^A \mid a \in X \text{ и } |X| \text{ е нечетно число}\} \\
C_e &= \{X \in 2^A \mid a \notin X \text{ и } |X| \text{ е четно число}\} \\
C_o &= \{X \in 2^A \mid a \notin X \text{ и } |X| \text{ е нечетно число}\}
\end{aligned}$$

Очевидно

$$\begin{aligned}
2_e^A &= B_e \cup C_e \\
2_o^A &= B_o \cup C_o
\end{aligned}$$

Тъй като $B_e \cap C_e = \emptyset$ и $B_o \cap C_o = \emptyset$,

$$|2_e^A| = |B_e| + |C_e| \tag{2}$$

$$|2_o^A| = |B_o| + |C_o| \tag{3}$$

Нека $A' = A \setminus \{a\}$. Съгласно индуктивната хипотеза (1),

$$|2_e^{A'}| = |2_o^{A'}| \tag{4}$$

Очевидно е, че $2_e^{A'} = B_e$ и $2_o^{A'} = B_o$. Следователно,

$$|B_e| = |B_o| \tag{5}$$

Ще покажем, че $|C_e| = |C_o|$. Забележете, че

$$|B_e| = |C_o| \tag{6}$$

понеже има биективно съответствие между елементите им:

- всеки елемент u на B_e се получава от точно един елемент v на C_o чрез „добавяне“ на a; по-формално, $u = v \cup \{a\}$,
- всеки елемент w на C_o се получава от точно един елемент z на B_e чрез „махане“ на a; по-формално, $w = z \setminus \{a\}$.

Аналогично,

$$|B_o| = |C_e| \tag{7}$$

понеже има биективно съответствие между елементите им:

- всеки елемент u на B_o се получава от точно един елемент v на C_e чрез „добавяне“ на a; по-формално, $u = v \cup \{a\}$,
- всеки елемент w на C_e се получава от точно един елемент z на B_o чрез „махане“ на a; по-формално, $w = z \setminus \{a\}$.

От (5), (6) и (7) следва, че:

$$|C_e| = |C_o| \tag{8}$$

От (5), (8), (2) и (3) следва, че $|2^A_e| = |2^A_o|$. $\square$

3 т. **Задача 2:** Докажете, че

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Решение:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} =$$

$$\left(\sum_{\substack{k \in \{0,1,\dots,n\} \\ k \text{ четно}}} (-1)^k \binom{n}{k} \right) + \left(\sum_{\substack{k \in \{0,1,\dots,n\} \\ k \text{ нечетно}}} (-1)^k \binom{n}{k} \right) =$$

$$\left(\sum_{\substack{k \in \{0,1,\dots,n\} \\ k \text{ четно}}} \binom{n}{k} \right) - \left(\sum_{\substack{k \in \{0,1,\dots,n\} \\ k \text{ нечетно}}} \binom{n}{k} \right) \tag{9}$$

Известно е, че $\binom{n}{k}$ е броят на подмножествата, имащи k елемента, на кое да е n-елементно множество A. Тогава, очевидно,

$$\sum_{\substack{k \in \{0,1,\dots,n\} \\ k \text{ четно}}} \binom{n}{k} \text{ е броят на подмножествата на } A \text{ с четен брой елементи}$$

$$\sum_{\substack{k \in \{0,1,\dots,n\} \\ k \text{ нечетно}}} \binom{n}{k} \text{ е броят на подмножествата на } A \text{ с нечетен брой елементи}$$

Съгласно Задача 1, тези две суми са еднакви. Следва, че (9) $= 0$. $\square$

7 т. **Задача 3:** Докажете с комбинаторни средства, че

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Решение: Нека A е множество с $2n$ елемента. Нека всеки елемент от A има атрибут-цвят, като n елемента са бели, а останалите n, черни. По колко начина можем да подберем различни подмножества на A с по n елемента?

От една страна, това може да стане по

$$\binom{2n}{n} \tag{10}$$

начина, тъй като това са комбинаторни конфигурации без повторение и без наредба – тук не обръщаме внимание на цветовете на подбраните елементи.

От друга страна, можем да разбием подбиранията по броя на елементите от единия цвят, да речем белия. Белите елементи, които попадат в дадено подбиране, може да са 0 или 1 или ... или n. Следователно, да подберем n елемента от общо $2n$ в тази задача е същото като да подберем k елемента измежду всичките n бели и да подберем $n - k$ елемента измежду всичките n черни. За дадено k, такова че $0 \leq k \leq n$, броят начини да подберем n елемента от общо $2n$, така че k измежду подбраните да са бели, е, по принципа на произведението:

$$\underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{броят начини } k \text{ елемента от общо } n \text{ да са бели}} \times \underbrace{\binom{n}{n-k}}_{\text{броят начини останалите елементи да са черни}}$$

Тъй като k се мени от 0 до n и подбиранията се разбиват по k (при различен брой бели елементи в две подбирания, те задължително са различни), общият брой подбирания е:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$$

Но знаем, че $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, следователно общият брой на подбирания е:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \tag{11}$$

Изразите (10) и (11) броят едно и също количество, следователно са равни. □

12 т. **Задача 4:** По колко начина могат да седнат около кръгла маса с номерирани столове хората от n на брой женени двойки (очевидно става дума за $2n$ души), така че съпрузите от нито една двойка да не седят на съседни столове?

Решение: Нека двойките съпрузи са c_1, c_2, …, c_n. Нека S_i означава множеството от всички възможни сядания, в които съпрузите от c_i седят непозволено, тоест един до друг, за някое i, такова че $1 \leq i \leq n$. Нека U е универсумът в тази задача, а именно, множеството от всички възможни сядания на тези $2n$ души около масата (без оглед на принадлежност към съпружески двойки). Търсеният отговор е $|\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \ldots \cap \overline{S_n}|$. По принципа на включването и изключването,

$$
\begin{aligned}
|\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \ldots \cap \overline{S_n}| = |U| & \\
& - \sum_{1 \leq i \leq n} |S_i| \\
& + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |S_i \cap S_j| \\
& - \ldots \\
& + (-1)^n |S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n|
\end{aligned}
$$

Лесно се вижда, че $|U| = (2n)!$, тъй като толкова са начините, $2n$ човека да седнат на $2n$ различими (номерирани) места без никакви ограничения.

Ще покажем, че всяка от сумите

$$
\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_t \leq n} |S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \ldots \cap S_{i_t}|
$$

където t е някое цяло число, такова че $1 \leq t \leq n$, по абсолютна стойност е равна на

$$
\binom{n}{t} .2n.(2n - t - 1)!.2^t
$$

Тази сума е равна на броя начини t двойки да са седнали непозволено, по всички възможни начини да бъдат подбрани t двойки от $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$. Имаме следните четири независими съображения.

– По $\binom{n}{t}$ начина можем да подберем t двойки от общо n.

– По $2n$ начина можем да изберем два стола за първата двойка от тези t двойки.

– За останалите $t-1$ двойки, по $(2n-t-1)!$ начина можем да разположим хората от тези $t-1$ двойки, така че хората от всяка от тези двойки да са съседи, и останалите хора (тези, които не са в нито една от въпросните t двойки) по оставащите (след сядането на първата двойка) столове. Причината това да е така е, че гледаме на тези $t-1$ двойки като на „блокове“, тоест една такава двойка е един обект, а всеки човек, който не е в някоя двойка, е самостоятелен обект. Общо обектите са на брой

$$\begin{aligned}&\underbrace{2n-2}_{\text{толкова са хората за настаняване след сядането на първата двойка}}\\ -&\underbrace{2(t-1)}_{\text{от техния брой вадим броя на хората в } t-1 \text{ двойки}}\\ +&\underbrace{t-1}_{\text{толкова са обектите от вид „двойка“}} = 2n-t-1\end{aligned}$$

Следователно, задачата по колко начина могат да седнат тези $t-1$ двойки непозволено на оставащите места (след сядането на първата двойке) е същата като задачата, по колко начина можем да разположим $2n-t-1$ обекта в редица.

– За всяка от досега направените подборки на места за сядане на t двойки по всички възможни непозволени начини, за всяка двойка можем да разположим хората от нея по 2 начина на двата избрани стола. Общо това са 2^t възможни начина.

След като установихме, че

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_t\le n} |S_{i_1}\cap S_{i_2}\cap\ldots\cap S_{i_t}| = \binom{n}{t}.2n.(2n-t-1)!.2^t$$

отговорът следва да е

$$\begin{aligned}|\overline{S_1}\cap\overline{S_2}\cap\ldots\cap\overline{S_n}| &= (2n)! + \sum_{t=1}^{n}(-1)^t.\binom{n}{t}.2n.(2n-t-1)!.2^t\\ &= \sum_{t=0}^{n}(-1)^t.\binom{n}{t}.2n.(2n-t-1)!.2^t\\ &= 2n\left(\sum_{t=0}^{n}(-1)^t.\binom{n}{t}.(2n-t-1)!.2^t\right)\end{aligned}$$

5 т. **Задача 5:** Колко са възможните ръце в бриджа с разпределение на цветовете $5, 4, 4, 0$? Дайте отговор-число.

Решение: За фиксирано разпределение на цветовете от даден брой [†], броят на възможните ръце е:

$$\binom{13}{5} \times \binom{13}{4} \times \binom{13}{4} \times \binom{13}{0} = 657\,946\,575$$

Това е така, понеже по $\binom{13}{k}$ начина можем да подберем k карти от 13-те карти от даден цвят.

Това не е окончателният отговор. Окончателният отговор е произведението от $657\,946\,575$ и броят начини, по които можем да изберем от кой цвят да има 5 карти, от кой 4 и т.н. Този брой е

$$\binom{4}{1} \times \binom{3}{1} = 12$$

тъй като по $\binom{4}{1}$ начина може да изберем от кой цвят да има 5 карти и по $\binom{3}{1}$ начина, от оставащите 3 цвята, от кой да има 0 карти; след като сме избрали от кой цвят да има 5 и от кой, 0 карти, за цветовете с по 4 карти изборът е само един. Друг начин да се изведе това „12“ е чрез формулата за мултиномиалния коефициент:

$$\frac{4!}{1!.2!.1!} = 12$$

И така, отговорът е

$$657\,946\,575 \times 12 = 7\,895\,358\,900$$ □

Задача 6: На празнично тържество идват 100 гости. Разиграва се благотворителна томбола по следните правила. Всеки гостенин записва името си (да приемем, че всички имена са различни) върху картонче, пуска картончето в кутия и плаща някаква сума за участието в томболата. В края на тържеството се вадят по случаен начин едно след друго три картончета от кутията. Веднъж изтеглено, никое картонче не се слага отново в кутията. Този, чието име е изтеглено първо, получава награда от p_1 лева; вторият получава награда от p_2 лева, а третият, от p_3 лева. По колко различни начина могат да бъдат раздадени наградите на гостите, ако

2 т. **а)** $p_1 = 200$ лв, $p_2 = 100$ лв, $p_3 = 50$ лв.

[†] Примерно, 5 купи, 4 пики, 4 спатии, 0 кари.

2 т. **б)** $p_1 = p_2 = p_3 = 100$ лв.

Решение на а): Това какви точно са наградите е без значение. Това, което има значение е, че наградите са различни. Задачата се свежда до преброяване на различните комбинаторни конфигурации с дължина 3 (защото наградите са 3 на брой), с наредба (защото наградите са различни) и без повторение (защото едно име не може да бъде изтеглено повече от един път), над опорно множество със 100 елемента. $K_{\text{Н}}(100, 3) = 100 \times 99 \times 98 = 970\,200$.

По-просто казано, най-голямата награда може да отиде при 100 човека, средната, при 99, а най-малката, при 98.

Решение на б): Задачата се свежда до преброяване на различните комбинаторни конфигурации с дължина 3, без наредба (защото наградите са еднакви) и без повторение (защото едно име не може да бъде изтеглено повече от един път), над опорно множество със 100 елемента. $K(100, 3) = \binom{100}{3} = 161\,700$.

По-просто казано, задачата е същата като „По колко начина може да бъдат подбрани 3 човека от 100?“.

□

Задача 7: На празнично тържество идват 100 гости. Разиграва се благотворителна томбола по следните правила. Всеки гостенин записва името си (да приемем, че всички имена са различни) върху картонче, пуска картончето в кутия и плаща някаква сума за участието в томболата. В края на тържеството се вадят по случаен начин едно след друго три картончета от кутията. Веднъж изтеглено, всяко картонче се слага отново в кутията. Този, чието име е изтеглено първо, получава награда от p_1 лева; вторият получава награда от p_2 лева, а третият, от p_3 лева. По колко различни начина могат да бъдат раздадени наградите на гостите, ако

2 т. **а)** $p_1 = 200$ лв, $p_2 = 100$ лв, $p_3 = 50$ лв.

2 т. **б)** $p_1 = p_2 = p_3 = 100$ лв.

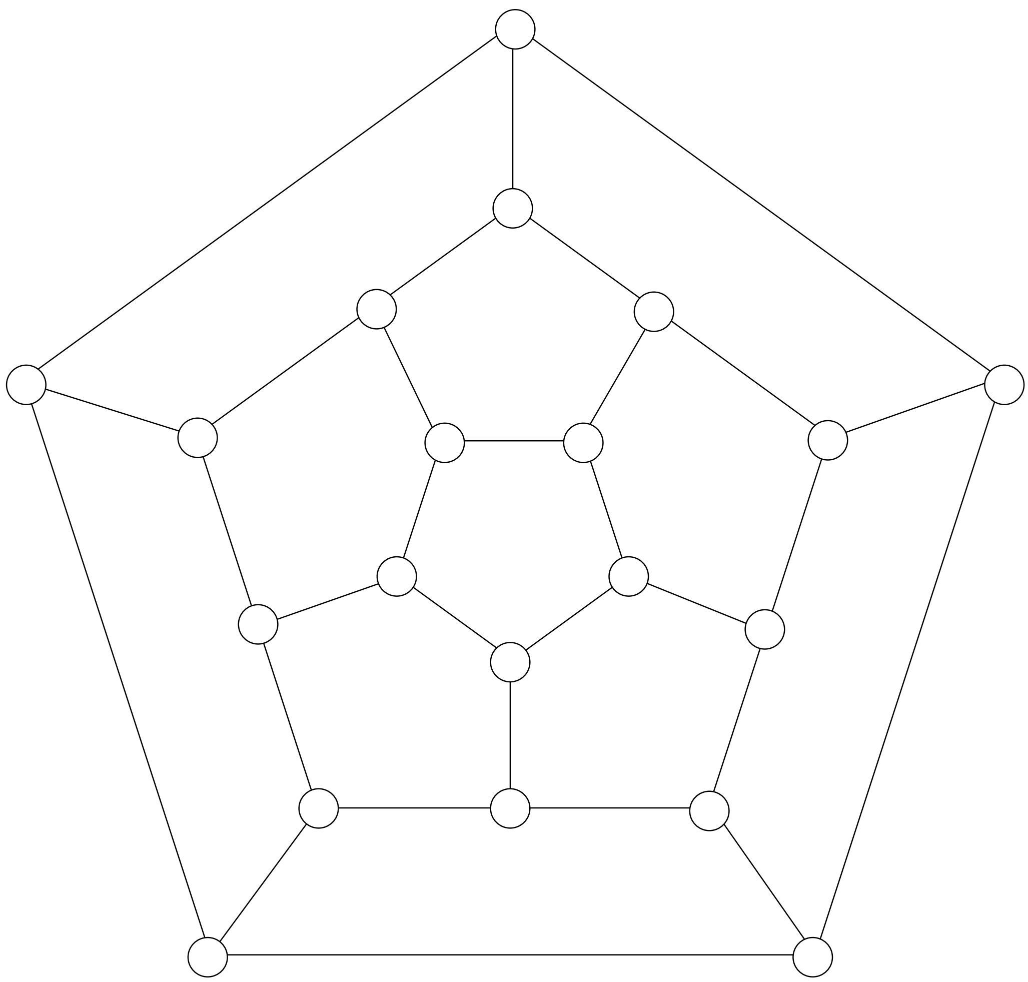
Решение на а): Задачата се свежда до преброяване на различните комбинаторни конфигурации с дължина 3 (защото наградите са 3 на брой), с наредба (защото наградите са различни) и с повторение (защото едно име може да бъде изтеглено повече от един път), над опорно множество със 100 елемента. $K_{\text{Н,П}}(100, 3) = 100^3 = 1\,000\,000$.

По-просто казано, най-голямата награда може да отиде при 100 човека, средната, също при 100, и най-малката, също при 100.

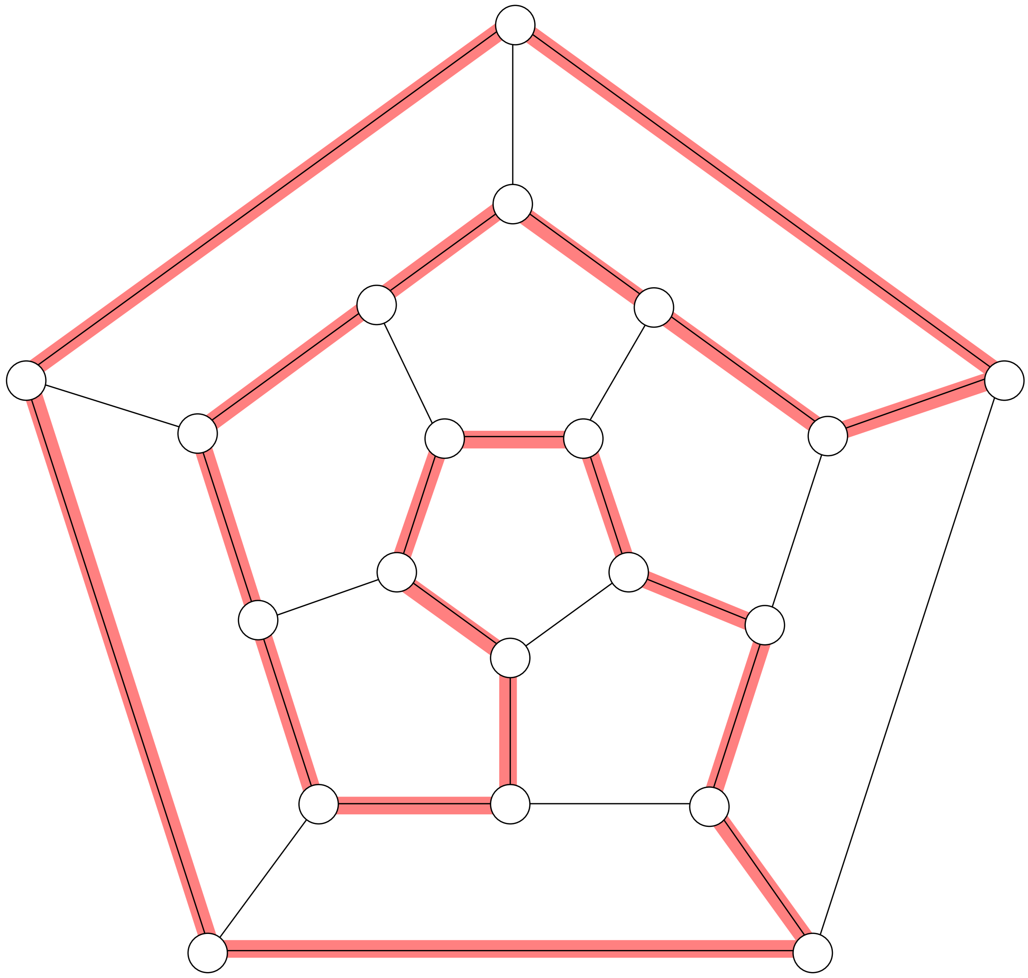
Решение на б): Задачата се свежда до преброяване на различните комбинаторни конфигурации с дължина 3 (защото наградите са 3 на брой), без наредба (защото наградите са еднакви), с повторение (защото едно име може да бъде изтеглено повече от един път), над опорно множество със 100 елемента. $\mathsf{K}_{\text{Н,П}}(100, 3) = \binom{100+3-1}{3} = 171\,700$.

$\square$

5 т. **Задача 8:** Да се открие Хамилтонов цикъл в следния граф с 20 върха и 30 ребра:



Фиг. 1



Фиг. 2: Хамилтонов цикъл в графа от Фигура 1.

Решение: Решението е показано на Фигура 2 на тази страница. □

5 т. **Задача 9:** Възможно ли е в група от 11 човека, всеки да познава точно трима души (освен себе си, естествено)? За целите на тази задача, познанството е симетрично: за всеки двама души X и Y, X познава Y тогава и само тогава, когато Y познава X.

Решение: Не е възможно. Задачата може да бъде моделирана с граф. Нека множеството от тези хора е $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_{11}\}$. Да построим граф $G(H, E)$, като ребрата се поставят по следния начин:

$$\forall i, j, \text{ такива че } 1 \le i < j \le 11, (h_i, h_j) \in E \Leftrightarrow h_i \text{ се познава с } h_j$$

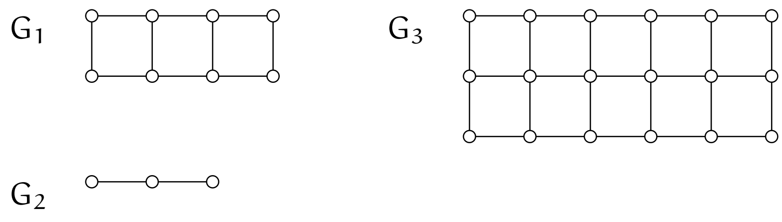
Броят на познатите на човек h_i в групата е равен на степента на h_i в G, за $1 \le i \le 11$. Задачата е еквивалентна на задачата, може ли в G всеки връх да има степен 3. Известно е, че в кой да е граф, върховете от нечетна степен са четен брой, следователно не е възможно всеки от 11-те върха да е от нечетна степен, следователно не е възможно всеки човек от групата да познава точно трима души от същата група. □

15 т. **Задача 10:** Нека $J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, за всяко цяло положително n. Нека дефинираме, че *„граф-мрежа* $m \times n$*“* е обикновен граф $G(V, E)$, където множеството от върховете е $V = J_m \times J_n$, а множеството от ребрата е

$$E = \{(u \times v, p \times q) \,|\, u \in J_n, v \in J_m, p \in J_n, q \in J_m, |u - p| + |v - q| = 1\}$$

Намерете и докажете необходимо и достатъчно условие за това, да има Хамилтонов цикъл в граф-мрежа $3 \times n$.

Решение: Ето няколко примера за графи-мрежи:



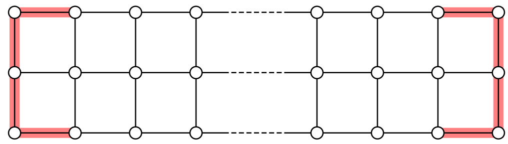
G_1 е граф-мрежа 2×4, G_2 е граф-мрежа 1×3, а G_3 е граф-мрежа 3×6. За краткост ще означаваме графа-мрежа $3 \times n$ с G^n.

Наблюдение 1. *Ако в* G^n *за* $n \ge 2$ *има Хамилтонов цикъл* c*, то следните два пътя:*

- $(1, 2), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (3, 2)$ *и*
- $(1, n - 1), (1, n), (2, n), (3, n), (3, n - 1)$

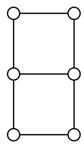
са части от c, тоест подпоследователности на c. □

Въпросните пътища нямат общи върхове тогава и само тогава, когато $n \geq 4$, но това дали имат общи върхове или не е без значение за валидността на твърдението. Ето нагледно какво се твърди в наблюдението – пътищата, маркирани в червено, са задължително част от Хамилтоновия цикъл, ако изобщо има такъв:

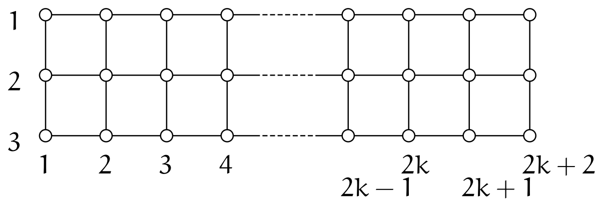


Теорема 1. *Необходимото и достатъчно условие G^n да има Хамилтонов цикъл е n да е четно число.*

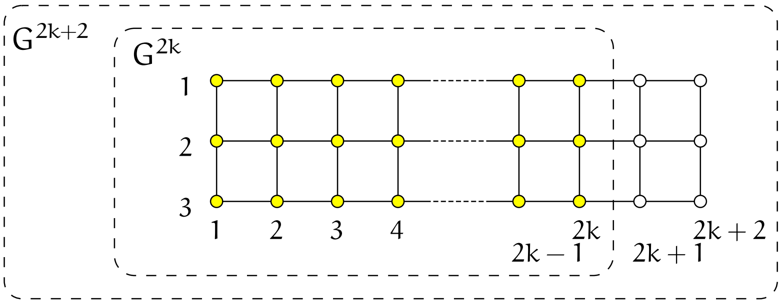
Доказателство:
Тъй като твърдението е от вида „X е необходимо и достатъчно условие за Y“, необходимо е доказателство от две части.
Доказателство, I част: Ще докажем, че ако n е четно число, то в G^n има Хамилтонов цикъл. Доказателството е с индукция по n.
Базата е $n = 2$. Очевидно, G^2 има Хамилтонов цикъл:



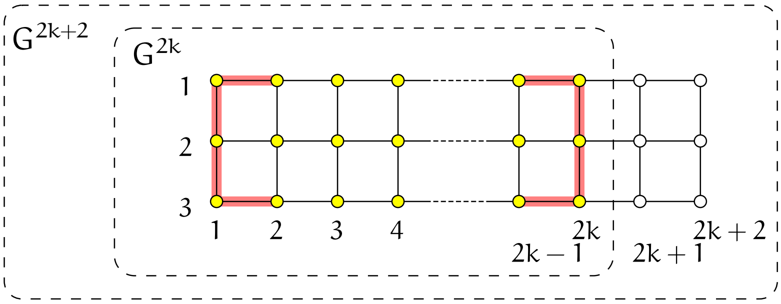
Да допуснем, че G^{2k} за някое $k \in \mathbb{N}$ има Хамилтонов цикъл и да разгледаме $G^{2(k+1)} = G^{2k+2}$:



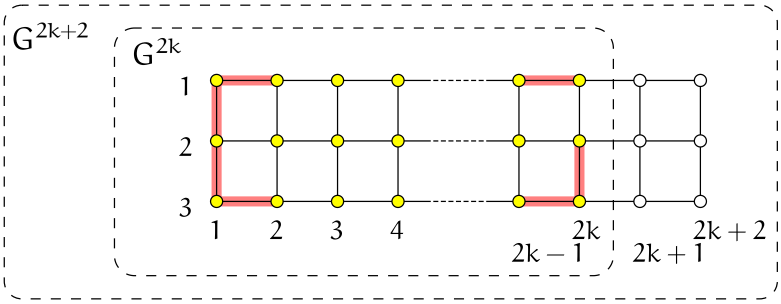
Забележете, че върховете от вида (x, y), където $x \in \{1, 2, 3\}$ и $y \in \{1, 2, \ldots, 2k\}$ индуцират подграф G^{2k} в G^{2k+2}. На следния чертеж илюстрираме този факт, маркирайки върховете на индуцирания G^{2k} в жълто.



Съгласно индукционната хипотеза, в този индуциран G^{2k} има Хамилтонов цикъл c. Съгласно Наблюдение 1, маркираните в розово пътища на следния чертеж са части от c:

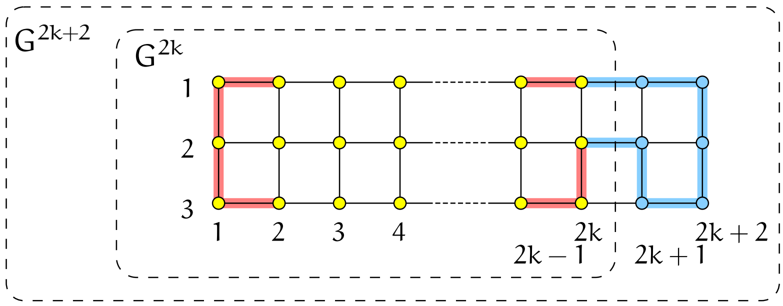


Да премахнем реброто $((1, 2k), (2, 2k))$ от c:



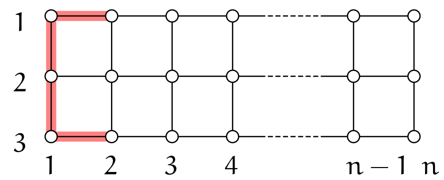
Получаваме Хамилтонов път p с краища $(1, 2k)$ и $(2, 2k)$.

Да добавим към p оцветените в синьо ребра и върхове:



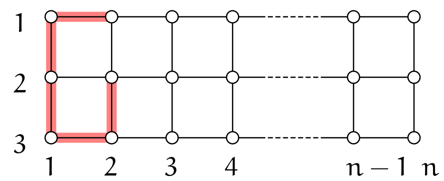
Построихме Хамилтонов цикъл в G^{2k+2}.

Доказателство, II част: Ще докажем, че ако в G^n има Хамилтонов цикъл, то n е четно число. Нека в в G^n има Хамилтонов цикъл. Съгласно Наблюдение 1, ребрата, маркирани в розово, са в този цикъл:

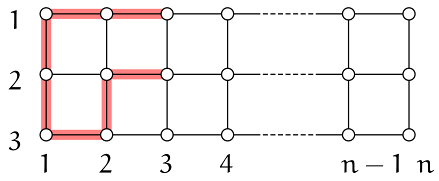


Да си представим възможните продължения за Хамилтоновия цикъл. Връх $(3, 2)$ има два съседа, към които можем да продължим, а именно $(2, 2)$ и $(3, 3)$.

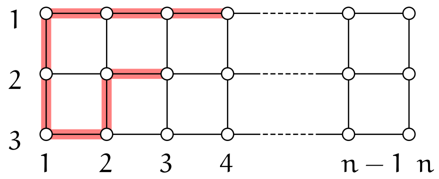
Случай А): реброто $((3, 2), (2, 2))$ е в Хамилтоновия цикъл:



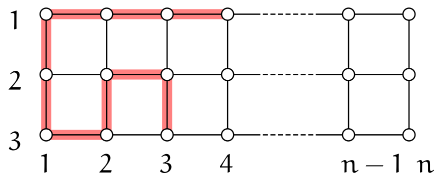
Оттук имаме задължително продължение:



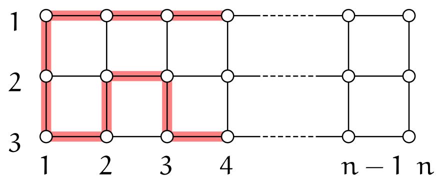
И още:



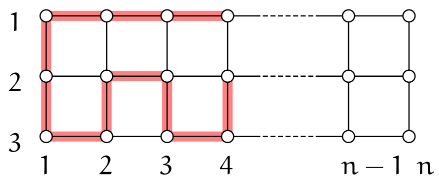
Ако от връх $(2,3)$ продължим не към $(3,3)$, а към $(2,4)$, то връх $(3,3)$ никога не може да бъде достигнат от цикъла. Следователно, реброто $((2,3),(3,3))$ е в цикъла:



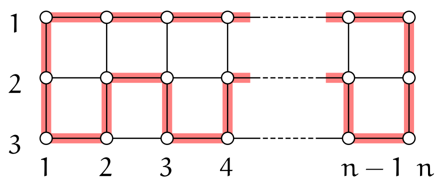
Задължително реброто $((3,3),(3,4))$ е в цикъла:



Ако от връх $(3,4)$ продължим към $(3,5)$, то връх $(2,4)$ никога не може да бъде достигнат от цикъла. Следователно, реброто $((3,4),(2,4))$ е в цикъла:

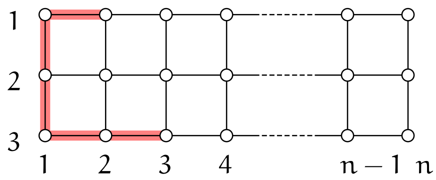


И така нататък. Лесно се вижда, че след като веднъж направим избор от $(3,2)$ да продължим към $(2,2)$, Хамилтоновият цикъл е единствено възможен:

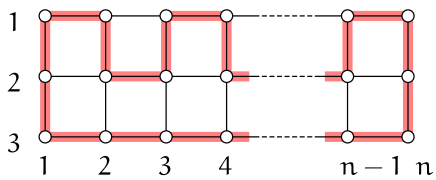


и че n трябва да е четно число, тъй като броят на ребрата „по хоризонтал" е нечетен, а четността на n е обратна на тази на броя на ребрата по хоризонтал.

Случай Б): реброто $((3,2),(3,3))$ е в Хамилтоновия цикъл:



Чрез разсъждения, напълно аналогични на Случай А) достигаме до извода, че след като направим избора от $(3,2)$ да продължим към $(3,3)$, Хамилтоновият цикъл е единствено възможен:



И в този случай n е четно число, по същите съображения като преди.

$\square$