ИЗБРАНИ ГЛАВИ ОТ КОМБИНАТОРИКАТА И ТЕОРИЯТА НА ГРАФИТЕ
(ПОДГОТОВКА ЗА ИЗПИТ — СУ, ФМИ, ЛЕТЕН СЕМЕСТЪР, 2016 / 2017)

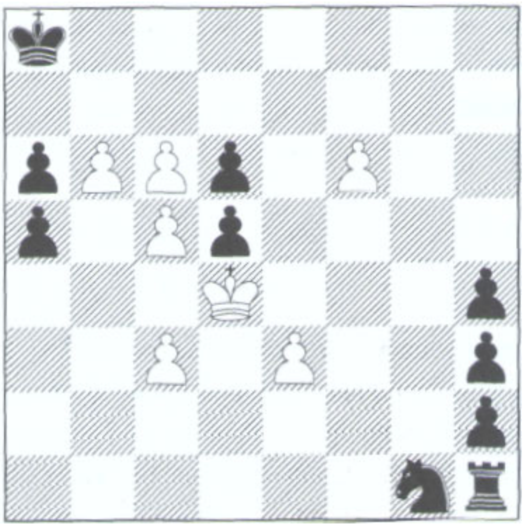
Задача 1.

а) Докажете, че във всеки ред от триъгълника на Паскал
броят на нечетните числа е точна степен на двойката $\left(\text{вкл. } 1 = 2^0\right)$.

б) В кои редове са четни всички числа с изключение на крайните единици?

Задача 2. Докажете, че ако i, j и n са цели числа, $i > 0$, $j > 0$, $i + j \le n$, то числата $\binom{n}{i}$ и $\binom{n}{j}$ не са взаимно прости.

Задача 3. Да разгледаме следната шахматна позиция.



Черните трябва да направят 34 последователни хода, след което белите дават мат в един ход. Черните нямат право да се подлагат под шах. Също така, черните нямат право да дават шах на белите освен евентуално с последния ход. Белите и черните играят кооперативно, т.е. стремят се да постигнат обща цел.

По колко начина може да се постигне поставената цел? (R. Stanley)

Задача 4. Нека $k(n)$ е броят на решенията (x, y, z) на уравнението

$$(x - y)(y - z)(z - x) = n$$

в цели положителни числа x, y и z. Докажете, че $k(n)$ се дели на 3 за всяко цяло $n > 0$.

Задача 5. Намерете проста формула за $\mathrm{ex}(n,\ P_4)$, т.е. колко най-много ребра може да има граф с n върха, несъдържащ път с четири различни върха.

Задача 6. Нека $G = ((A, B), E)$ е двуделен граф и $S \subseteq A$, $T \subseteq B$. Нека в G има сдвояване, което съдържа всички върхове от S, и сдвояване, което съдържа всички върхове от T. Докажете, че в G има сдвояване, което съдържа всички върхове от $S \cup T$.

Задача 7. Намерете пораждащата функция на редицата:

$$a_1 = 5, \quad a_2 = 8, \qquad a_n = 3a_{n-1} + 7a_{n-2} \text{ за всяко цяло } n \geq 3.$$

РЕШЕНИЯ

Решение на задача 1. а) От едно от следствията от теоремата на Люка (за броя на числата, които не се делят на дадено просто число) следва, че броят на нечетните числа във всеки ред на триъгълника на Паскал е равен на 2 на степен броя на единиците в двоичното представяне на номера на реда (като първият ред има номер нула).

б) Един ред съдържа само четни числа (с изключение на крайните единици) тогава и само тогава, когато броят на нечетните числа в този ред е 2 или 1 (крайните единици). От споменатото следствие от теоремата на Люка правим извод, че това е изпълнено точно когато номерът на реда, записан в двоична бройна система, съдържа не повече от една единица. С други думи, един ред от триъгълника на Паскал съдържа само четни числа (без крайните единици) точно тогава, когато номерът на този ред е 0 или точна степен на 2 (включително $1 = 2^0$).

Решение на задача 2. Да допуснем противното: че числата $\binom{n}{i}$ и $\binom{n}{j}$ са взаимно прости. От комбинаторното тъждество

$$\binom{n}{i}\binom{n-i}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{i}$$

следва, че $\binom{n}{j}$ дели $\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}$. Понеже $\binom{n}{i}$ и $\binom{n}{j}$ са взаимно прости, то $\binom{n}{j}$ дели $\binom{n-i}{j}$. Обаче $0 < \binom{n-i}{j} < \binom{n}{j}$, защото $i > 0,\ j > 0,\ i + j \leq n$. Получи се следното: от две положителни числа по-голямото дели по-малкото. Както знаем, това е невъзможно.

Полученото противоречие показва, че направеното допускане не е вярно. Следователно числата $\binom{n}{i}$ и $\binom{n}{j}$ не са взаимно прости.

Решение на задача 3. Двете черни пешки на a5 и a6 произвеждат офицери на полето a1. По маршрута a1–b2–c1–d2–e1–g3–f4–h6–f8–e7–d8–c7–b8–a7 двата офицера достигат съответно до a7 и b8, където блокират черния цар, така че белите да могат да обявят мат с ход на пешката от b6 на b7.

Да номерираме полетата по маршрута: 0 за a6, 1 за a5, . . . , 18 за a7 (полетата f2, g5 и g7 не се номерират: през тях офицерите преминават транзит). Във всеки миг положението на двете подвижни фигури (пешки / офицери) се описва с наредена двойка (x, y) от цели неотрицателни числа, x е номерът на полето на фигурата, тръгнала от a5, а y — на фигурата, тръгнала от a6. На всеки ход се мести едната фигура, т.е. или x, или y расте с 1. През цялото време втората фигура остава зад първата, т.е. $y < x$. Търсим броя на траекториите от т. (1, 0) до т. (18, 17). Въвеждаме нова координатна система, в която абсцисите са намалени с 1. Сега търсим броя на пътищата от т. (0, 0) до т. (17, 17), за които $y < x + 1$. От теорията знаем, че това е числото на Каталан $c_{18} = \dfrac{1}{35}\dbinom{35}{18} =$ 129 644 790.

Решение на задача 4. Нека S е множеството от решенията на уравнението (т.е. S е множество от наредени тройки, съставени от цели положителни числа). В задачата се иска да докажем, че броят на елементите $|S| = k(n)$ се дели на 3. Уравнението е циклично, без да е симетрично. С други думи, ако $(x, y, z) \in S$, то $(y, z, x) \in S$ и $(z, x, y) \in S$. Множеството S от решенията на уравнението се разбива на подмножества от по три решения, затова $|S| = k(n)$ се дели на 3. Наредените тройки (x, y, z), (y, z, x) и (z, x, y) са две по две различни; иначе $x = y = z$, което е невъзможно, понеже $n > 0$.

Това решение използва идеята за инволюция. Функцията

$$f((x, y, z)) = (y, z, x)$$

е от вида $f\colon S \to S$. Тя не е инволюция, защото

$$f(f((x, y, z))) = (z, x, y) \neq (x, y, z) \text{ при } n > 0.$$

Обаче

$$f(f(f((x, y, z)))) = (x, y, z),$$

т.е. всеки елемент на S има орбита с дължина 3, затова $|S|$ се дели на 3. (При инволюциите без неподвижни точки всички орбити имат дължина 2.)

Решение на задача 5. Щом графът не съдържа P_4, то той не съдържа и цикъл с дължина, по-голяма или равна на 4. Следователно всички цикли на графа (ако има такива) са с дължина 3. Ето защо всяка компонента на свързаност е или триъгълник (цикъл с дължина 3), или дърво. Броят на ребрата на графа е n минус броя на компонентите дървета. Затова броят на ребрата е най-голям, когато броят на компонентите дървета е най-малък.

Ако n се дели на 3, тогава може всички компоненти да са триъгълници. В този случай графът има n върха и n ребра.

Ако n не се дели на 3, то графът има поне една компонента дърво. Ясно е, че една компонента дърво (с един или два върха) е достатъчна: всички други компоненти могат да са триъгълници. Такъв граф има n върха и $n - 1$ ребра.

Окончателно, $\operatorname{ex}\left(n,\, P_4\right) = \begin{cases} n, & \text{ако } n \text{ се дели на 3;} \\ n-1, & \text{ако } n \text{ не се дели на 3.} \end{cases}$

Решение на задача 6. За начало да вземем ребрата от сдвояването на T. Ако те покриват всички върхове от S, получили сме търсеното сдвояване.

Нека остават непокрити върхове от S и s_1 е такъв връх. Ще покажем как се покрива s_1. Нека $s_1 b$ е реброто, покриващо s_1 в сдвояването на S, $b \in B$. Ако $b \notin T$, добавяме $s_1 b$ към текущото множество от ребра и върхът s_1 е покрит.

Нека $b \in T$. В сдвояването на T има единствено ребро ba, $a \in A$. Добавяме реброто $s_1 b$ към текущото множество от ребра, а махаме реброто ba. Ако $a \notin S$, то успели сме да покрием s_1, без да развалим постигнатото: върховете, които са били покрити, остават покрити, а текущото множество от ребра е сдвояване.

Ако $a \in S$, да означим върха a с s_2. Сега s_1 е покрит, но s_2 не е, т.е. броят на покритите върхове е останал непроменен. Повтаряме горните разсъждения за s_2 вместо s_1. Получаваме редица от върхове от S: $s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots$

Върховете в тази редица са различни: s_1 не се повтаря, защото не е край на ребро от сдвояването на T; никой друг връх не се повтаря, защото не може да е край на две ребра от сдвояването на T (по определението за сдвояване).

Понеже графът е краен, а членовете на редицата са два по два различни, то тя също е крайна. Покриването на последния връх от редицата не разваля други върхове, тоест увеличава с единица броя на покритите върхове от S.

Повтаряме описаните стъпки: покриваме върховете от S един по един. С това е построено желаното сдвояване, съдържащо всички върхове от $S \cup T$.

Решение на задача 7. Първите няколко члена на редицата са

$a_1 = 5, \quad a_2 = 8, \quad a_3 = 59, \quad a_4 = 233$ и тъй нататък.

Нека $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 5x + 8x^2 + 59x^3 + 233x^4 + \ldots$

е пораждащата функция на редицата. Следователно

$x f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n, \quad x^2 f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2} x^n.$

Затова $3x f(x) + 7x^2 f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} 3a_{n-1} x^n + \sum_{n=3}^{\infty} 7a_{n-2} x^n$, тоест

$$\left(3x + 7x^2\right) f(x) = 3a_1 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} 3a_{n-1} x^n + \sum_{n=3}^{\infty} 7a_{n-2} x^n.$$

Заместваме $a_1 = 5$:

$$\left(3x + 7x^2\right) f(x) = 15x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left(3a_{n-1} + 7a_{n-2}\right) x^n.$$

От рекурентното уравнение получаваме:

$$\left(3x + 7x^2\right) f(x) = 15x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n, \quad \text{тоест}$$

$$\left(3x + 7x^2\right) f(x) = 15x^2 - a_1 x - a_2 x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

Заместваме $a_1 = 5$ и $a_2 = 8$:

$$\left(3x + 7x^2\right) f(x) = 15x^2 - 5x - 8x^2 + f(x), \quad \text{т.е.}$$

$$\left(3x + 7x^2\right) f(x) = f(x) + 7x^2 - 5x,$$

$$\left(7x^2 + 3x - 1\right) f(x) = 7x^2 - 5x,$$

затова пораждащата функция на редицата е $f(x) = \dfrac{7x^2 - 5x}{7x^2 + 3x - 1}$.