

ЛОГИЧЕСКИ ЗАДАЧИ

Задачи, при решаването на които логическите съображения и интуицията преобладават над пресмятанията, които се извършват при решението, се наричат логически задачи.

1

Решаването на задачи с таблица или граф и граф-дърво

1 1

Иван, Петър и Николай събирали в парка кестени. Едно от момчетата носело кошница, другото – торба, а третото носело полиетиленов плик. Петър не носел кошница, нито плик. Иван също не носел кошница. В какво е събирал кестените всеки от тях?

1 2

Във фирма работят програмист, мениджър и икономист. Техните имена са Спас, Филип и Драган. Мениджърът няма брат и сестра и е най-младият от тримата. Драган е по-голям от програмиста и е женен за сестрата на Спас. Назовете имената на програмиста, мениджъра и икономиста.

1 3

Веско живее по-високо от Петко, но по-ниско от Стефан, а Тодор живее по-ниско от Петко в една и съща четириетажна кооперация. Посочете кой на кой етаж живее.

1 4

Съучениците Десислава, Василена, Георги и Юлиан посещават занимания по художествено слово, рисуване, танци и хор. Определете кой в кое занимание участва, ако на концерта на хора Десислава и Георги харесали неговото изпълнение. Юлиан и Деси не обичат да рецитират. Деси не познава Георги. Василена и участникът в художествено слово са чести гости на художника.

1 5

Сашо, Ваньо, Петко и Евлоги тренират в една от секциите: гимнастика, футбол, волейбол и борба. Сашо и Петко били на кино по време на волейболен мач на секцията по волейбол. Ваньо, борецът и футболистът са приятели. Евлоги и

Сашо били на лагер с бореца. Сашо е на един чин с футболиста. Какво спортува всяко момче?

- 1 6** Г-жа Василева, г-жа Михайлова и г-жа Петрова преподават химия, биология и математика в градовете София, Пловдив и Варна. Знае се, че Василева не работи в София, а Михайлова не е в Пловдив. Тази, която е в София, не преподава математика. Работещата в Пловдив преподава химия. Г-жа Михайлова не е биолог. Определете всяка от тях кой предмет преподава и в кой град живее.
- 1 7** В един клас предметите математика, физика, химия, биология, английски и български език се преподават от учителите Ангелов, Борисова и Каменова. Всеки от тях преподава точно два предмета. Учителят по химия живее в една къща с учителя по математика. Най-млад от тримата е Ангелов. Математикът често играе шах с Каменова. Физикът е по-възрастен от учителя по биология, но е по-млад от Борисова. Най-възрастният от тримата учители живее по-далеч от училището от останалите двама колеги. Кой учител по какъв предмет преподава?
- 1 8** Мария, Лили, Живка и Катя свирят на различни инструменти: пиано, китара, цигулка и виола. Всяка от тях владее по един чужд език: немски, френски, испански и английски. Момичето, което свири на китара, владее испански. Лили не свири на цигулка и виола и не владее английски език. Мария не знае английски и не свири на виола. Момичето, което знае английски, не свири на пиано и виола. Живка знае френски и не свири на цигулка, а Мария не обича немски език.
Всяко от момичетата владее точно един език и свири на един инструмент. На какъв инструмент свири всяко от тях и какъв език владее?
- 1 9** Ива, Лилия и Ралица са облечени в рокли с различни цветове – бяла, червена и синя. Обувките им са в един от същите три цвята. Само при Лилия цветът на роклята и обувките е еднакъв. Нито роклята, нито обувките на Ралица са бели, а Ива е с червени обувки. Определете с какъв цвят рокля и обувки е всяка от тях.

1 10 Иван, Борис, Пламен и Светла организирали помежду си състезание по решаване на задачи. За решаване на словесна задача давали 5 точки, за решаване на уравнение – 4 точки, за решаване на геометрична задача – 2 точки, и за пресмятане на числов израз – 1 точка. Единствената словесна задача решила Светла. Общо били решени три геометрични задачи. Освен това всички заедно получили 18 точки. Най-малко точки имал Пламен, макар че решил най-много на брой задачи. Пламен и Борис имали заедно толкова точки, колкото Иван и Светла. При това всеки имал различен брой точки. По колко точки е получил всеки? Обяснете защо.

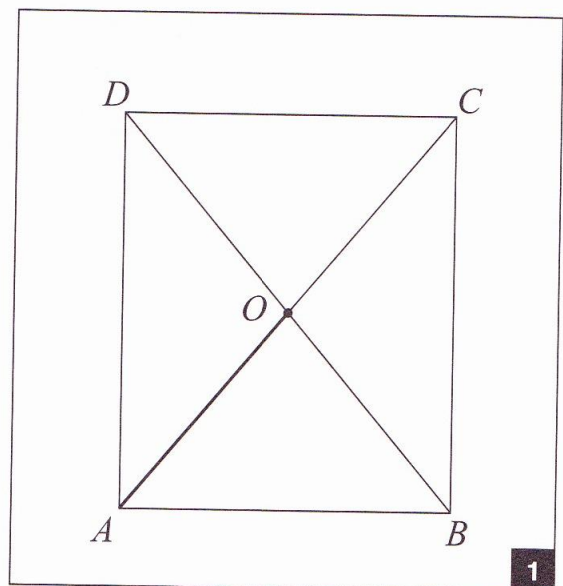
1 11 За закуска в детска градина предлагат кифла, сок и ябълка. По колко начина дете може да избере своята закуска, ако то може да избере или да не избере всяко от предложените неща?

1 12 В стол за обяд предлагат супа, три вида основни ястия и два десерта. Ако можем да вземем най-много по едно от всяко ястие, колко различни менюта се получават?

1 13 По колко начина можем да изминем пътя от A до C (черт. 1), без да минем по два пъти през една и съща точка.

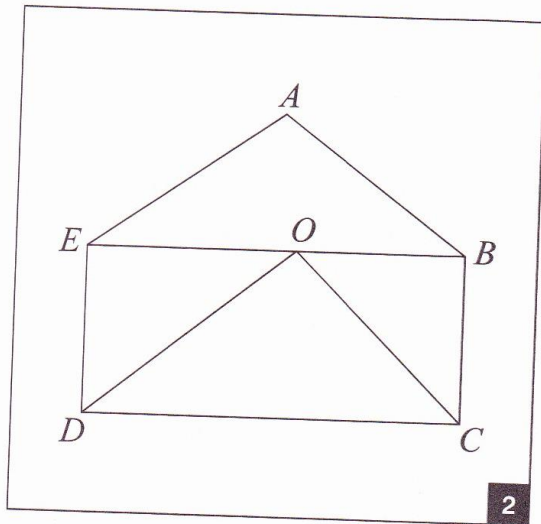
1 14 Намерете:

- а) всички трицифрени числа, записани с цифрите 2, 3, 7, които се използват само по веднъж;
- б) всички четирицифрени числа, записани с цифрите 1, 5, 6, 9, като се използват точно по веднъж.



1 15 По колко различни начина могат да седнат Асен, Боян, Силвия и Диана на четири последователни стола?

- 1 16** Поля отишла на лагер и взела със себе си един панталон, една пола, три блузи, чифт сандали и чифт мокасини. По колко различни начина може да се облече Поля?



- 1 17** По колко различни маршрута може да се измине пътят от A до D (черт. 2) по начертаните отсечки, без да се минава по два пъти през една и съща точка?

- 1 18** В паркинг на „Метро“ може да се влезе по 5 различни ленти за паркиране и да се излезе през 6 ленти. Възможно ли е 31 коли да преминат по различни маршрути през този паркинг?

2 Обединения и сечения на множества

Често използваме думата **множество**, за да означим някаква съвкупност от различни обекти, които ги обединява някакво общо свойство. Тези обекти ги наричаме елементи на множеството. Множествата означаваме с A, B, C, D, \dots , а елементите им чрез a, b, c, d, \dots . Ако a е елемент от множество A , то записваме $a \in A$, ако a не е елемент от множество B – $a \notin B$. Множество, което няма нито един елемент, наричаме празно множество и го означаваме с ϕ . Множеството C от всички елементи, общи за множествата A и B , наричаме тяхно сечение и означаваме $C = A \cap B$. Множеството D от елементи, които са или от A , или от B , наричаме тяхно обединение и означаваме $D = A \cup B$. Множество A е подмножество на B , ако всеки елемент от A е елемент и от B ($A \subset B$).

- 2 1** Дадени са множествата $A = \{1; 5; 8; 12; 19; 35\}$ и $B = \{5; 8; 13; 17; 34\}$. Да се намерят сечението и обединението на множествата A и B .

- 2 2** От тридесет и четирима ученика 14 карат велосипед, 15 плуват, а 9 могат и двете неща. Колко са учениците, които не могат да плуват и карат велосипед?
- 2 3** На паркинг има 42 бели леки автомобили и 13 автомобили с марка „Рено“. Осем от рената са бели. Колко общо са колите на този паркинг?
- 2 4** В компания за компютърни технологии работят 50 души, които говорят родния си български език. Освен това 35 от тях говорят английски, 20 говорят немски, а 10 говорят само български. Колко от служителите говорят само английски и колко само немски език?
- 2 5** Мариела получила за рождения си ден цветя. На въпроса колко цветя е получила, тя отговорила: Получих червени и жълти рози и червени карамфили. Червените цветя са 16. Всички рози са 11 и 7 от тях са червени. Колко цветя всичко е получила Мариела?
- 2 6** В едно село на Армения всеки жител говори или арменски, или руски, или и двата езика. На всеки 100 жители 90 говорят арменски и 70 руски. Колко говорят двата езика?
- 2 7** От 73 ученици 26 се занимават с информатика, 18 – с математика, 24 – с физика, а 23 не се занимават с нищо. Десет от физиците се занимават и с математика, 6 от физиците са и информатици, а един се занимава и с трите предмета. Имали такъв, който се занимава с математика и информатика?
- 2 8** При анкетирането на 800 жители на един град се оказало, че 430 четат вестник „Труд“, 220 – вестник „Пари“, и 180 и двата вестника. Колко жители не четат нито един от двата вестника?
- 2 9** В петите класове на едно училище учат 70 ученика. От тях занимания в школата по математика посещават 51, по изобразително изкуство – 40, а по български език – 22 ученика. В трите школи едновременно участват 6 ученика, 32 са едновременно в математика и изобразително изкуство, в изобразително изкуство и български език те са 8, а в мате-

матика и български език – 11 ученика. Има ли ученици, които не посещават нито една школа?

2 10 В един клас учат 35 ученика и всички обичат или да плуват, или да играят баскетбол, или да свирят на пиано. Много успяват да се занимават и с едното, и с другото. Най-много са плувците, които играят и баскетбол – 25, а 5 от тях свирят и на пиано. Шампионът по плуване не свири на пиано и не обичат баскета, а двама негови приятели, добри баскетболисти, не умеят да плуват, но свирят добре на пиано. Сред пианистите има 7, които не играят баскет и не плуват. Колко са пианистите в класа? Колко са плувците? Колко от баскетболистите не се увличат от плуване и не свирят на пиано?

2 11 В една паралелка от 40 ученика четворки имат: 19 ученика по английски език, 17 ученика по математика и 22 ученика по химия. Само по един предмет четворки имат: 4 ученика по английски, 4 по математика и 11 по химия. Учениците които имат четворки по математика и химия, са 7, а 5 от тях имат и четворка по английски език. Колко са учениците, които имат четворки по един, два и три от посочените предмети? Колко са учениците без четворки?

2 12 Ученици от едно училище били на екскурзия. Всички носели пари за разходи само в банкноти. Оказало се, че 567 ученика имат поне по 2 лв., 346 поне по 4 лв., 329 поне по 5 лв., 204 поне по 10 лв., 155 поне по 12 лв., 132 поне по 15 лв., 38 поне по 16 лв., а 17 ученика имат точно по 20 лв. Колко лева носели общо учениците на тази екскурзия?

3 Мисли и отговори

3 1 Теодор бяга всеки ден по толкова километра, колкото е числото на датата от месеца. Ако Теодор е бягал 30 дни от 1 февруари 2007 година, то колко километра е пробягал?

- 3 2** Иван може да събере сено на дядо си за 4 часа. Петър и Георги събират същото сено също за 4 часа. За колко часа тримата ще съберат сено?
- 3 3** Тръба се пуска сутринта и напълва басейна в 16 часа. В колко часа трябва да се пусне още една тръба със същата мощност, че басейнът да е напълнен в 12 часа?
- 3 4** Една крава изядва копа̀ сено за 5 дни, а една коза изядва същата копа̀ за 20 дни. За колко дни кравата и козата заедно ще изядат копа̀та?
- 3 5** В един клас има 25 ученика разделени в две групи. Броят на учениците в първата група, увеличен 3 пъти, е 8 пъти по-малък от броя на учениците във втората група. По колко ученици има във всяка група?
- 3 6** Конник, който се движи със скорост 11 км за час, трябва да настигне пешеходец, тръгнал 6 часа по-рано със скорост 5 км за час. След колко часа конникът ще настигне пешеходеца?
- 3 7** В автобус има едноместни и двуместни седалки. Шофьорът забелязал, че в автобуса са седнали 9 човека и 12 седалки са напълно празни. Втори път забелязал, че са седнали 12 човека и 5 седалки са напълно празни. Колко седалки има автобусът?
- 3 8** В училище доставили едно и също число пакети с учебници за 5. и 6. клас. Учебниците за 6. клас били с 16 повече от тези за 5. клас. Във всеки пакет за 5. клас имало по 10 учебника, а в пакетите за 6. клас – по 14. По колко учебника за 5. и 6. клас са доставили?
- 3 9** Два влака се движат един срещу друг със скорост съответно 55 км за час и 45 км за час. На какво разстояние ще бъдат един от друг 1 час и 15 минути преди срещата?
- 3 10** За номериране страниците на едно пособие по математика са били използвани 270 цифри. Колко страници има пособието, ако номерацията започва от първата страница?

- 3 11** Пет котки изяждат 5 мишки за 6 минути. Колко мишки изяждат 7 котки за 12 минути?
- 3 12** Колко пъти в денонощието стрелките на часовник сключват ъгъл от 11° ?
- 3 13** В една гора, която се състои от дъб и бук, фирма за дърводобив е отсякла $\frac{1}{4}$ от дъбовите и $\frac{2}{7}$ от буковите дървета. В доклад на еколозите „Зелени патрули“ се твърди, че са отсечени половината от дърветата на гората. Вярно ли е това твърдение? Защо?
- 3 14** От съд пълен със златоносен пясък са извлекли половината от всичкото злато, а след това – $\frac{1}{3}$ от останалото злато. В резултат на което пясъкът в съда останал наполовина. Каква част от златоносния пясък в съда е било чистото злато?
- 3 15** На състезание по математика са предложени няколко по-леки и няколко по-сложни задачи. Участниците получават по 3 точки за решението на сложните и по 2 точки за решението на леките задачи. Освен това за нерешена лека задача се отнема по 1 точка. Йорданка решила 10 задачи и събрала 16 точки. Колко от леките задачи е решила тя?
- 3 16** Десет ученика решили общо 31 задачи. Измежду тях имало такива, които не са решили нито една задача, такива, които решили само една задача, само две задачи или само три задачи. Установете, че измежду учениците е имало поне един, който е решил най-малко 5 задачи.
- 3 17** Квадратна таблица 8×8 е оцветена така: 26 квадратчета в синьо, а останалите в бяло. Като сгънали таблицата на две еднакви части по една от нейните разделителни линии, точно 8 двойки сини полета се покрили едно с друго. Колко двойки бели полета са се покрили едно с друго?
- 3 18** Съществуват ли двуцифрени числа \overline{ab} и \overline{cd} такива, че $\overline{ab.cd} = \overline{abcd}$? Обосновете отговора си.

- 3 19** В един град има 10 ресторанта и n музеи. Група туристи посетили града. Оказало се, че всеки ресторант бил посетен точно от 4 туристи, а всеки музей – точно от 6 туристи. Освен това всеки турист посетил точно 5 от ресторантите и 3 от музеите. Намерете броя на музеите в града.
- 3 20** Баща оставил следното завещание: „Най-възрастният син да получи 1000 рупии и $\frac{1}{8}$ от останалото, следващият – 2000 рупии и $\frac{1}{8}$ от новия остатък, третият син – 3000 рупии и $\frac{1}{8}$ от третия остатък, и т. н.“ Последният получил всичките останали пари. Намерете броя на синовете и парите, оставени от баща им. (задача на Ойлер)
- 3 21** Тревата на една ливада расте еднакво гъсто и бързо. Известно е, че 70 крави могат да я опасат за 24 дни, а 30 крави – за 60 дни. Колко крави ще я опасат за 96 дни? (задача на Нютон)
- 3 22** Страниците на една книга са номерирани от първата до последната. Непослушният Христо откъснал 13 листа от различни места на книгата и събрал номерата на всички откъснати страници. Като резултат е получил числото 2008. Вярно ли е събирал Христо? Отговорът да се обоснове.
- 3 23** В турнир по тенис участват 32 отбора и играят всеки срещу всеки. След първия кръг отпадат половината отбори. В следващия кръг отново играят всеки срещу всеки и отново отпадат половината и продължават по същата схема. Колко срещи са изиграни до излъчване на победителя?
- 3 24** Във всяка клетка на квадратната таблица 7×7 има по един бръмбар. В един момент бръмбарите излитат, а после всеки от тях каца в клетка, която има обща страна с тази, от която е излетял. Обяснете защо ще остане клетка, в която няма да кацне бръмбар.
- 3 25** Всяко от три семейства има по две деца – момиче и момче. Децата си разделили 16 музикални диска. Лили взела един, Нина – два, Таня – три. Филип Гошев взел толкова, колкото сестра си, Иван Ташев – два пъти повече от сестра

си, а Георги Златанов – три пъти повече от сестра си. Намерете фамилиите на момичетата.

- 3 26** Заек, вълк и мечка пробягват разстояние от 100 метра. Заекът финишира пръв, а в този момент вълкът е на 10 метра от финиша. Когато финишира вълкът, мечката има още 10 метра до финала. На колко метра от финала е била мечката в момента, в който заекът е финиширал? (животните бягат с постоянна скорост)
- 3 27** Срещат се двама приятели Андрей и Стефан.
 Андрей: „Стефане, закъде бързаш?“
 Стефан: „За влака в 6 часа. Колко минути остават до тръгването му?“
 Андрей: „Преди 50 минути от 3 часа насам бяха изминали 4 пъти повече минути, отколкото сега остават до 6 часа.“
 В колко часа са се срещнали Андрей и Стефан?
- 3 28** При раздаването на наградите от математическо състезание всички наградени застанали един до друг на сцената. Красимир твърди: „Шестият отляво е единствен с максимален брой точки.“
 Стоян: „Деветият отдясно е този с максимален брой точки.“
 Колко са били наградените?
- 3 29** Сашо, Петър, Янко и Тодор играели футбол и счупили стъклото на класната стая. Пред учителя си те дали следните показания:
 Сашо: „Янко или Тодор счупи стъклото.“
 Петър: „Тодор го счупи.“
 Янко: „Аз не съм го счупил.“
 Тодор: „Не съм виновен.“
 Учителят преценил, че трима от тях казват истината. Кой е счупил стъклото?
- 3 30** От тримата приятели – Илиян, Павел и Станимир, един е кестеняв, един – рус, и един – чернокос. От трите твърдения: „Илиян е рус“, „Павел не е рус“ и „Станимир не е чернокос“ само едно е вярно. Каква е косата на всеки от тях?

- 3 31** В сектора за скок на височина се състезават трима спортисти. Трима зрители правят предположение за победителя.
- Според мен първото място е за Петров – казал първият.
 - Иванов няма да е последен – забелязал вторият.
 - Василев няма да е първи – заявил третият.
- След състезанието се оказало, че само един от зрителите е познал. Как са се класирали скакачите?
- 3 32** Стоян трябва да открие естествено число по следните свойства:
- Валентин: Числото е просто.
 Тити: Числото е 9.
 Галимир: Числото е четно.
 Илиян: Числото е 6.
- Помогнете на Стоян да открие числото, ако само единият от двойките Валентин и Тити, съответно Галимир и Илиян казва истината.
- 3 33** Ангел, Бисер, Васил и Гурко са участвали в състезание по бягане. След състезанието те твърдят:
- Ангел: „Аз не бях нито пръв, нито последен.“
 Бисер: „Аз не съм последен.“
 Васил: „Аз бях пръв.“
 Гурко: „Аз бях последен.“
- Три от отговорите са верни, а един е грешен. Кой е излъгал? Кой е пръв?
- 3 34** Написани са последователно естествените числа от 1 до 40. Може многократно да се разместват местата на две числа, стоящи през едно. Възможно ли е при тези размествания числата да се подредят така: 40, 39, 38, ..., 3, 2, 1? Обосновете отговора си.
- 3 35** На дъската са написани числата 1, 2, ..., 50. Изтриват се две произволни числа и се записва тяхната разлика (от по-голямо число се вади по-малкото). Операцията се повтаря, докато на дъската остане само едно число. Четно или нечетно е последното число и защо?

- 3 36** Пред Николай и Атанас има по една дъска с написани естествените числа от 1 до 20 включително. Всеки от тях изтрива произволни две числа и вместо тях написва число, равно на сбора им, намален с 2. На следващия ход операцията се повтаря и т. н., докато на дъската остане само едно число. Печели онзи, който е оставил по-голямо число. Николай първо е изтрил 1 и 2 и написал 1, а Атанас – 19 и 20 и написал 37. Николай или Атанас ще спечели играта отгук нататък при най-добри ходове? Отговорът да се обоснове.
- 3 37** Дадени са 2009 точки, някои 3 от които не лежат на една права. Двама души A и B играят следната игра. Отначало A свързва две произволни точки с отсечка, след това същото прави B и т. н. Всеки може да свърже две точки, които не са вече свързани. Играта завършва, ако някой от тях пръв образува триъгълник и той е победител. Кой от двамата може да победи? Как трябва да играе?
- 3 38** Естествените числа 1, 2, 3, ..., 1996, 1997 са написани последователно в редица. Могат да се зачертаят няколко последователни числа от редицата и на тяхно място се записва число, даващо броя им. (Например ако зачертаем 2, 3, 4, се получава редицата 1, 3, 5, ..., 1996, 1997.) Може ли след краен брой зачертавания да останат числата 999 и 1000? Обосновете отговора си.
- 3 39** Дадени са числата 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, -7, -8, -9, -10, -11. Двама играят следната игра: един след друг всеки избира по едно число. Накрая всеки събира своите 7 числа. Побеждава този, чийто сбор по абсолютна стойност е по-голям. Кой от играчите би могъл да спечели – първият или вторият, и защо?
- 3 40** На дъската са написани числата 1, 2, 3, ..., 1999, 2000. По какъв начин да поставим пред тези числа знак „+“ или „-“ така, че стойността на получения израз след извършване на означените действия да е положителна и възможно най-малка?