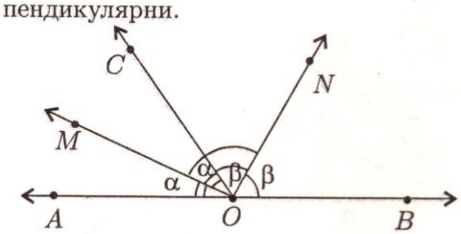
ОСНОВНИ ЗАДАЧИ

Видове ъгли. Ъгли, получени при пресичането на две прави с трета

ОЗ 1. Да се докаже, че ъглополовящите на два съседни ъгъла са взаимно перпендикулярни.



Дадено:
$\sphericalangle AOC$ и $\sphericalangle BOC$ съседни; $OM^{\to}$ ъглополовяща на $\sphericalangle AOC$; $ON^{\to}$ ъглополовяща на $\sphericalangle COB$.

Да се докаже, че $OM^{\to} \perp ON^{\to}$.

Доказателство:

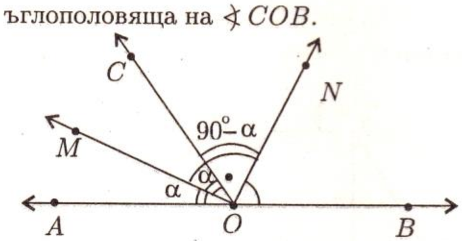
Нека $\sphericalangle AOM = \alpha \Rightarrow \sphericalangle MOC = \alpha$ ($OM^{\to}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle AOC$).

Нека $\sphericalangle CON = \beta \Rightarrow \sphericalangle NOB = \beta$ ($ON^{\to}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle COB$).

$\sphericalangle AOC + \sphericalangle COB = 180°$ (Т. за съседни ъгли) $\Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow$

$\alpha + \beta = 90°$, но $\sphericalangle MON = \alpha + \beta \Rightarrow \sphericalangle MON = 90° \Rightarrow OM^{\to} \perp ON^{\to}$.

ОЗ 2. Ъглите AOC и BOC са съседни и $OM^{\to}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle AOC$. Построен е лъч $ON^{\to} \perp OM^{\to}$ ($ON^{\to}$ е вътрешен за $\sphericalangle BOC$). Да се докаже, че $ON^{\to}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle COB$.



Дадено:
$\sphericalangle AOC$ и $\sphericalangle BOC$ съседни; $OM^{\to}$ ъглополовяща на $\sphericalangle AOC$; $OM^{\to} \perp ON^{\to}$.

Да се докаже, че $ON^{\to}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle COB$.

Доказателство:

Нека $\sphericalangle AOM = \alpha \Rightarrow \sphericalangle MOC = \alpha$ ($OM^{\to}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle AOC$).

$\sphericalangle MON = 90° \Rightarrow \sphericalangle CON = \sphericalangle MON - \sphericalangle MOC = 90° - \alpha$ (1).

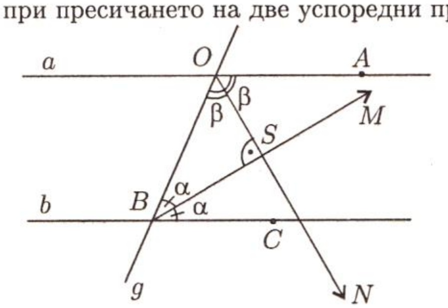
$\sphericalangle AON + \sphericalangle NOB = 180°$ (Т. за съседни ъгли).

$\sphericalangle AON = \alpha + 90° \Rightarrow \alpha + 90° + \sphericalangle NOB = 180° \Rightarrow \sphericalangle NOB = 180° - 90° - \alpha$

$\Rightarrow NOB = 90° - \alpha$ (2).

От (1) и (2) $\Rightarrow \sphericalangle CON = \sphericalangle NOB \Rightarrow ON^{\to}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle COB$.

ОЗ 3. Да се докаже, че ъглополовящите на два прилежащи ъгъла, образувани при пресичането на две успоредни прави с трета, са перпендикулярни.



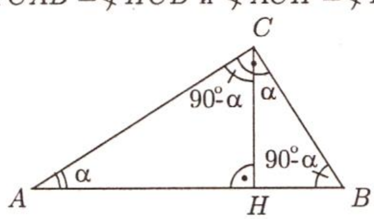
Дадено:
$(a\|b) \cap g$; $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle OBC$ прилежащи ъгли; $ON^{\rightarrow}$ – ъглополовяща на $\sphericalangle AOB$; $BM^{\rightarrow}$ ъглополовяща на $\sphericalangle OBC$.

Да се докаже, че $ON^{\rightarrow} \perp BM^{\rightarrow}$.

Доказателство:
Нека $ON^{\rightarrow} \cap BM^{\rightarrow} = S$. Нека $\sphericalangle OBM = \alpha \Rightarrow \sphericalangle MBC = \alpha$ (свойство на ъглополовящата $BM^{\rightarrow}$).
Нека $\sphericalangle BON = \beta \Rightarrow \sphericalangle NOA = \beta$ (свойство на ъглополовящата $ON^{\rightarrow}$).
$\sphericalangle OBC + \sphericalangle BOA = 180^\circ$ (прилежащи при $(a\|b) \cap g$);
$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$.
Разглеждаме $\triangle BOS$: $\sphericalangle OBS + \sphericalangle BSO + \sphericalangle BOS = 180^\circ$ (Т. за сбор на ъглите в триъгълник).
$\alpha + \sphericalangle BSO + \beta = 180^\circ \Rightarrow \sphericalangle BSO = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, но $\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow$
$\sphericalangle BSO = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow ON^{\rightarrow} \perp BM^{\rightarrow}$.

Сбор от ъглите в триъгълник

ОЗ 4. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90^\circ$), CH е височина. Да се докаже, че $\sphericalangle CAB = \sphericalangle HCB$ и $\sphericalangle ACH = \sphericalangle HBC$.

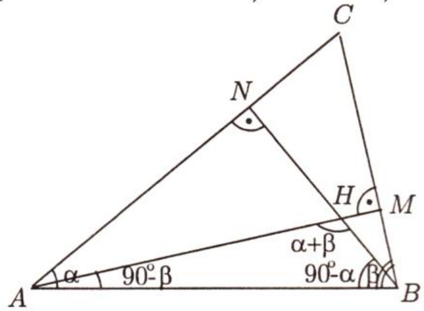


Дадено:
$\triangle ABC$ – правоъгълен; $\sphericalangle C = 90^\circ$,
CH – височина.

Да се докаже, че $\sphericalangle CAB = \sphericalangle HCB$ и $\sphericalangle ACH = \sphericalangle HBC$.

Доказателство:
Нека $\sphericalangle CAB = \alpha$ (1).
За $\triangle ACH$: $\sphericalangle CAH + \sphericalangle ACH + \sphericalangle AHC = 180^\circ$ (Т. за сбор на ъглите в триъгълник),
$\sphericalangle ACH = 180^\circ - \sphericalangle CAH - \sphericalangle AHC = 180^\circ - \alpha - 90^\circ = 90^\circ - \alpha$ (2).
$\sphericalangle HCB = \sphericalangle ACB - \sphericalangle ACH = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$ (3).
От (1) и (3) $\Rightarrow \sphericalangle CAB = \sphericalangle HCB = \alpha$.
За $\triangle HCB$: $\sphericalangle HCB + \sphericalangle CHB + \sphericalangle HBC = 180^\circ$ (Т. за сбор на ъглите в триъгълник),
$\alpha + 90^\circ + \sphericalangle HBC = 180^\circ \Rightarrow \sphericalangle HBC = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$ (4).
От (2) и (4) $\Rightarrow \sphericalangle ACH = \sphericalangle HBC = 90^\circ - \alpha$.

ОЗ 5. Височините, прекарани от върховете A и B на остроъгълен $\triangle ABC$, се пресичат в т. H. Ако $\sphericalangle A = \alpha$ и $\sphericalangle B = \beta$, да се докаже, че $\sphericalangle AHB = \alpha + \beta$.



Дадено:
$\triangle ABC$ – остроъгълен; AM и BN – височини; $AM \cap BN = H$;
$\sphericalangle CAB = \alpha$; $\sphericalangle ABC = \beta$.

Да се докаже, че $\sphericalangle AHB = \alpha + \beta$.

Доказателство:

Разглеждаме $\triangle ABN$: $\sphericalangle ANB = 90°$;

$\sphericalangle NAB = \alpha \Rightarrow \sphericalangle ABN = 180° - (\sphericalangle ANB + \sphericalangle NAB)$ (Т. за сбор на ъглите в триъгълник), $\sphericalangle ABN = 180° - (90° - \alpha) = 90° - \alpha$.

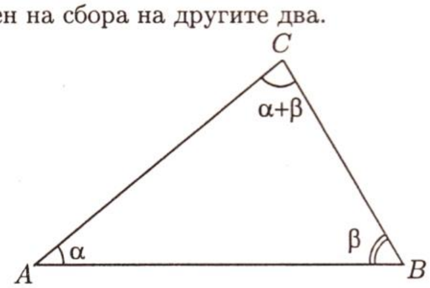
Разглеждаме $\triangle ABM$: $\sphericalangle AMB = 90°$; $\sphericalangle ABM = \beta \Rightarrow$

$\sphericalangle MAB = 180° - (\sphericalangle AMB + \sphericalangle ABM) = 180° - (90° + \beta) = 90° - \beta$.

Разглеждаме $\triangle ABH$: $\sphericalangle HAB + \sphericalangle ABH + \sphericalangle AHB = 180°$ (Т. за сбор на ъглите в триъгълник),

$90° - \beta + 90° - \alpha + \sphericalangle AHB = 180° \Rightarrow \sphericalangle AHB = 180° - 90° + \beta - 90° + \alpha \Rightarrow \sphericalangle AHB = \alpha + \beta$.

ОЗ 6. Да се определи видът на триъгълник според ъглите му, ако един от тях е равен на сбора на другите два.



Дадено:
$\triangle ABC$ – произволен; $\sphericalangle C = \sphericalangle A + \sphericalangle B$.

Да се определи $\triangle ABC$ според ъглите му.

Решение:

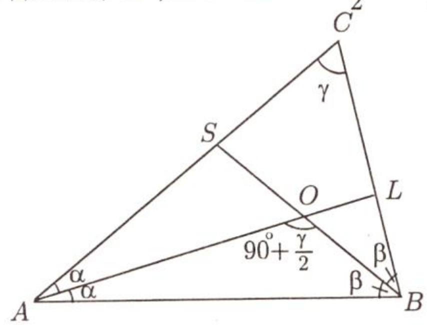
Нека $\sphericalangle A = \alpha$ и $\sphericalangle B = \beta$, $\sphericalangle C = \alpha + \beta$ (по условие).

От теоремата за сбор на ъглите в $\triangle ABC \Rightarrow \alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180°$, $2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$, но $\sphericalangle C = \alpha + \beta \Rightarrow \sphericalangle C = 90° \Rightarrow \triangle ABC$ е правоъгълен с $\sphericalangle C = 90°$.

Аналогично, ако $\sphericalangle A = \sphericalangle B + \sphericalangle C$, то ще следва, че $\sphericalangle A = 90°$

(или ако $\sphericalangle B = \sphericalangle A + \sphericalangle C$, то ще следва, че $\sphericalangle B = 90°$).

ОЗ 7. В $\triangle ABC$ ъглополовящите на $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$ се пресичат в т. O. Ако $\sphericalangle C = \gamma$, да се докаже, че $\sphericalangle AOB = 90^\circ + \dfrac{\gamma}{2}$.



Дадено:
$\triangle ABC$ – произволен; AL – ъглополовяща на $\sphericalangle A$; BS – ъглополовяща на $\sphericalangle B$; $AL \cap BS = O$; $\sphericalangle C = \gamma$.

Да се докаже, че $\sphericalangle AOB = 90^\circ + \dfrac{\gamma}{2}$.

Доказателство:

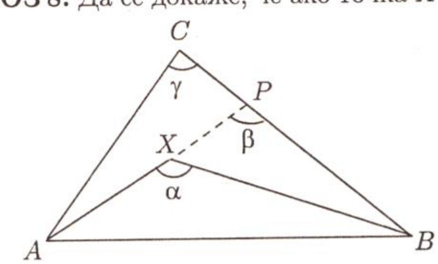
Нека $\sphericalangle CAL = \sphericalangle LAB = \alpha$; $\sphericalangle ABS = \sphericalangle SBC = \beta$.

Разглеждаме $\triangle ABC$: $\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB = 180^\circ$ (Т. за сбор на ъглите в триъгълник), $2\alpha + 2\beta + \gamma = 180^\circ$, $2\alpha + 2\beta = 180^\circ - \gamma \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}$ (1).

Разглеждаме $\triangle ABO$: $\sphericalangle OAB + \sphericalangle ABO + \sphericalangle AOB = 180^\circ$ (Т. за сбор на ъглите в триъгълник), $\alpha + \beta + \sphericalangle AOB = 180^\circ$ (2).

Заместваме (1) в (2): $90^\circ - \dfrac{\gamma}{2} + \sphericalangle AOB = 180^\circ \Rightarrow \sphericalangle AOB = 180^\circ - 90^\circ + \dfrac{\gamma}{2}$, $\sphericalangle AOB = 90^\circ + \dfrac{\gamma}{2}$.

ОЗ 8. Да се докаже, че ако точка X е вътрешна за $\triangle ABC$, то $\sphericalangle AXB > \sphericalangle ACB$.



Дадено:
$\triangle ABC$ – произволен; X – произволна вътрешна за $\triangle ABC$.

Да се докаже, че $\sphericalangle AXB > \sphericalangle ACB$.

Доказателство:

Продължаваме AX до пресичането с BC в точка P. Означаваме $\sphericalangle AXB = \alpha$; $\sphericalangle APB = \beta$ и $\sphericalangle ACB = \gamma$.

Използваме теоремата-следствие за външен ъгъл: Всеки външен ъгъл на триъгълник е по-голям от който и да е вътрешен, несъседен на него ъгъл.

$\sphericalangle AXB$ е външен за $\triangle XBP \Rightarrow \sphericalangle AXB > \sphericalangle APB$, т.е. $\alpha > \beta$ (1).

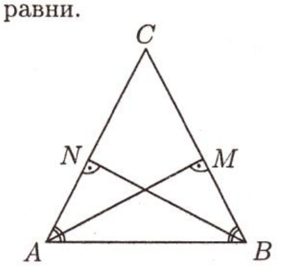
$\sphericalangle APB$ е външен за $\triangle APC \Rightarrow \sphericalangle APB > \sphericalangle ACP$, т. е. $\beta > \gamma$ (2).

От (1) и (2) $\Rightarrow \alpha > \beta$; $\beta > \gamma$. Прилагаме транзитивното свойство $\Rightarrow \alpha > \gamma \Rightarrow \sphericalangle AXB > \sphericalangle ACB$.

Аналогично се доказва, че $\sphericalangle BXC > \sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle AXC > \sphericalangle ABC$.

Равнобедрен триъгълник

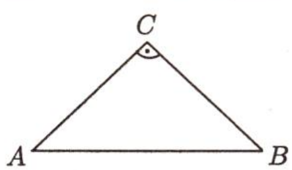
ОЗ 9. Да се докаже, че в равнобедрен триъгълник височините към бедрата са равни.

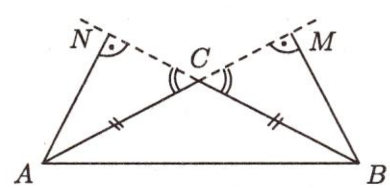


Дадено:
$\triangle ABC$ – равнобедрен ($AC = BC$);
AM и BN – височини.

Да се докаже, че $AM = BN$.

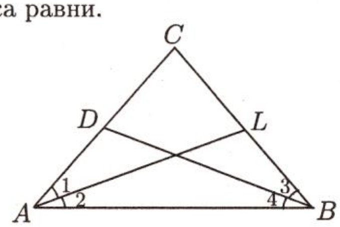
I случай: Ако $\triangle ABC$ е остроъгълен.
Доказателство:
Разглеждаме $\triangle ABN$ и $\triangle BAM$:
1. AB – обща
2. $\sphericalangle NAB = \sphericalangle MBA$ (свойство на равнобедрен триъгълник)
3. $\sphericalangle ANB = \sphericalangle BMA = 90^\circ$
$\Rightarrow \triangle ABN \cong \triangle BAM$ по II признак $\Rightarrow AM = BN$ (като съответни елементи).
II случай: Ако $\triangle ABC$ е правоъгълен.





Доказателство:
$AC = BC$ по условие.
III случай: Ако $\triangle ABC$ е тъпоъгълен. Нека $\sphericalangle ACB > 90^\circ$.
Доказателство:
Разглеждаме $\triangle ACN$ и $\triangle BCM$:
1. $AC = BC$ (свойство на страните в равнобедрен триъгълник)
2. $\sphericalangle ACN = \sphericalangle BCM$ (връхни)
3. $\sphericalangle ANC = \sphericalangle BMC = 90^\circ$
$\Rightarrow \triangle ACN \cong \triangle BCM$ по II признак $\Rightarrow AN = BM$ (като съответни елементи).
Забележка: Задачата може да бъде решена чрез използване на лице на триъгълник.

ОЗ 10. Да се докаже, че в равнобедрен триъгълник ъглополовящите към бедрата са равни.



Дадено:
$\triangle ABC$ – равнобедрен ($AC = BC$);
AL и BD – ъглополовящи.

Да се докаже, че $AL = BD$.

Доказателство:

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 = \dfrac{1}{2} \sphericalangle CAB$ (AL – ъглополовяща по условие)

$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4 = \dfrac{1}{2} \sphericalangle ABC$ (BD – ъглополовяща по условие)

$\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC$ (ъгли при основата на равнобедрен триъгълник)

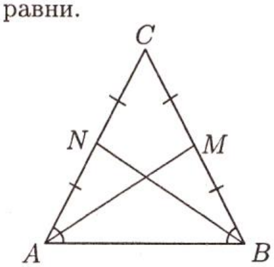
$\Rightarrow \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$.

Разглеждаме $\triangle ABD$ и $\triangle BAL$:

1. AB – обща
2. $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABL$ (свойство на ъглите при основата на равнобедрен триъгълник)
3. $\sphericalangle 4 = \sphericalangle 2$ (по доказателство).

От 1, 2 и 3 $\Rightarrow$ $\triangle ABD \cong \triangle BAL$ по II признак $\Rightarrow$ $AL = BD$ (като съответни елементи).

ОЗ 11. Да се докаже, че в равнобедрен триъгълник медианите към бедрата са равни.



Дадено:
$\triangle ABC$ – равнобедрен ($AC = BC$);
AM и BN – медиани.

Да се докаже, че $AM = BN$.

Доказателство:

т. M – среда на $BC \Rightarrow BM = CM = \dfrac{1}{2}BC$

т. N – среда на $AC \Rightarrow AN = NC = \dfrac{1}{2}AC$, но $BC = AC$ (бедра на равнобедрен триъгълник) $\Rightarrow AN = NC = MB = MC$.

Разглеждаме $\triangle ABM$ и $\triangle BAN$:

1. AB – обща
2. $BM = AN$ (по доказателство)
3. $\sphericalangle ABM = \sphericalangle BAN$ (ъгли при основата на равнобедрен триъгълник)

$\Rightarrow \triangle ABM \cong \triangle BAN$ по I признак $\Rightarrow AM = BN$ (като съответни елементи).

ОЗ 12. Да се докаже, че ако в един триъгълник две от височините са равни, то той е равнобедрен.

Дадено:
$\triangle ABC$; $BQ = CH$ (височини).

Да се докаже, че $\triangle ABC$ е равнобедрен.

Доказателство:

Разглеждаме $\triangle AHC$ и $\triangle AQB$:

1. $\sphericalangle QAH$ – общ
2. $\sphericalangle AHC = \sphericalangle AQB = 90^\circ$

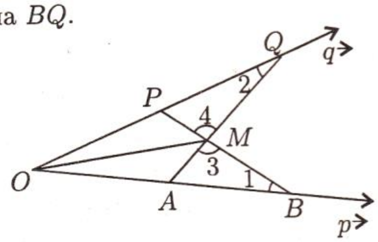
3. $CH = BQ$ (по условие)

$\Rightarrow \triangle AHC \cong \triangle AQB$ по II признак $\Rightarrow AC = AB$ (като съответни елементи)

$\Rightarrow \triangle ABC$ е равнобедрен.

Забележка: Задачата може да бъде решена чрез използване на лице на триъгълник.

ОЗ 13. Даден е произволен $\sphericalangle(\overrightarrow{p}; \overrightarrow{q})$ с връх т. O. Върху лъча $\overrightarrow{p}$ са взети точките A и B, а върху лъча $\overrightarrow{q}$ точките P и Q, така че $OA = OP$ и $OB = OQ$. Ако AQ пресича BP в точка M, да се докаже че правата OM е перпендикулярна на BQ.



Дадено:
$\sphericalangle(\overrightarrow{p}; \overrightarrow{q})$;
т. A и т. $B \in \overrightarrow{p}$;
т. P и т. $Q \in \overrightarrow{q}$;
$OA = OP, OB = OQ$.

Да се докаже, че $OM \perp BQ$.

Доказателство:

Разглеждаме $\triangle AOQ$ и $\triangle POB$:

1. $OA = OP$ (по условие)
2. $\sphericalangle BOQ$ – общ
3. $OQ = OB$ (по условие)

$\Rightarrow \triangle AOQ \cong \triangle POB$ по I признак $\Rightarrow \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, $AQ = BP$ (като съответни елементи).

Разглеждаме $\triangle ABM$ и $\triangle PQM$:

1. $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ (по доказателство)
2. $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$ (връхни)
3. $AB = PQ$ (като разлика от равните по условие отсечки $AB = OB - OA$; $PQ = OQ - OP$)

$\Rightarrow \triangle ABM \cong \triangle PQM$ по II признак $\Rightarrow MB = MQ$ (като съответни елементи).

Разглеждаме $\triangle OBM$ и $\triangle OQM$:

1. OM – обща
2. $OB = OQ$ (по условие)
3. $MB = MQ$ (по доказателство)

$\Rightarrow \triangle OBM \cong \triangle OQM$ по III признак $\Rightarrow \sphericalangle MOB = \sphericalangle MOQ$ (като съответни елементи)

$\Rightarrow OM$ е ъглополовяща на $\sphericalangle BOQ$.

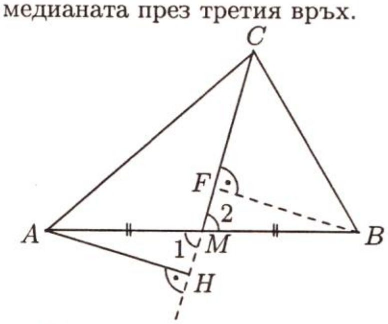
От $OB = OQ$ по условие $\Rightarrow \triangle BOQ$ е равнобедрен и OM е ъглополовяща към основата BQ. По теорема $\Rightarrow$ че OM е и височина към $BQ \Rightarrow$ правата $OM \perp BQ$.

Забележка: Аналогично се доказва, че:

1. Правата OM разполовява отсечката BQ.
2. Правата OM е симетрала на отсечката BQ.

Разстояние от точка до права

ОЗ 14. Да се докаже, че всеки два върха на триъгълника са равноотдалечени от медианата през третия връх.



Дадено:
$\triangle ABC$ – произволен;
CM – медиана;
$BF \perp CM$, $AH \perp CM$.

Да се докаже, че $BF = AH$.

Доказателство:
Разглеждаме $\triangle AMH$ и $\triangle BMF$:
1. $AM = BM$ (т. M среда на AB)
2. $\sphericalangle AHM = \sphericalangle BFM = 90^\circ$
3. $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ (връхни)

$\Rightarrow \triangle AMH \cong \triangle BMF$ по II признак $\Rightarrow AH = BF \Rightarrow$ точките A и B са равноотдалечени от правата CM.

ОЗ 15. Да се докаже, че трите върха на триъгълника са равноотдалечени от правата, минаваща през средите на две негови страни.

Дадено:
$\triangle ABC$ – произволен; т. M и т. N – среди на AC и BC.
$AH \perp MN$; $BQ \perp MN$; $CK \perp MN$.

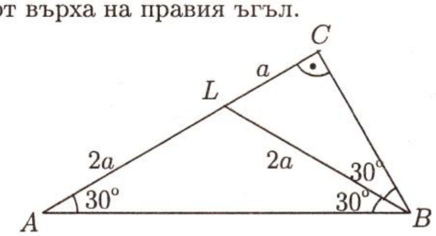
Да се докаже, че $AH = BQ = CK$.

Доказателство:
Разглеждаме $\triangle AMH$ и $\triangle CMK$:
1. $AM = CM$ (т. M среда на AC)
2. $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ (връхни)
3. $\sphericalangle AHM = \sphericalangle CKM = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle AMH \cong \triangle CMK$ по II признак $\Rightarrow AH = CK$ (като съответни елементи) (1).
Аналогично се доказва, че $\triangle CKN \cong \triangle BQN$
$\Rightarrow CK = BQ$ (като съответни елементи) (2).
От (1) и (2) $\Rightarrow AH = CK = BQ$.

Задачи от правоъгълен триъгълник с остър ъгъл от 30°, симетрала на отсечка, ъглополовяща на ъгъл

ОЗ 16. Да се докаже, че ако $\triangle ABC$ е правоъгълен и един от ъглите му е 60°, то ъглополовящата на този ъгъл дели срещулежащия катет в отношение 1 : 2, считано от върха на правия ъгъл.



Дадено:
$\triangle ABC$ – правоъгълен ($\sphericalangle ACB = 90°$);
$\sphericalangle ABC = 60°$; BL – ъглополовяща.

Да се докаже, че $CL : LA = 1 : 2$.

Доказателство:

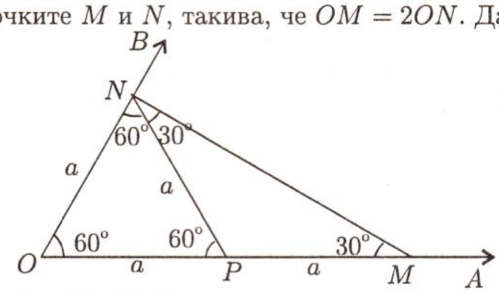
$\sphericalangle LBC = \sphericalangle LBA = \frac{1}{2} \sphericalangle ABC = 30°$.

Нека $LC = a$. От $\triangle LBC$: $\sphericalangle LCB = 90°$, $\sphericalangle LBC = 30°$

$\Rightarrow LC = \frac{1}{2}LB \Rightarrow LB = 2a$, но $\sphericalangle LAB = \sphericalangle LBA = 30°$

$\Rightarrow \triangle ALB$ е равнобедрен $\Rightarrow AL = LB = 2a \Rightarrow LC : LA = a : 2a = 1 : 2$.

ОЗ 17. Даден е $\sphericalangle AOB = 60°$. Върху лъчите $OA^{\rightarrow}$ и $OB^{\rightarrow}$ са построени съответно точките M и N, такива, че $OM = 2ON$. Да се намерят ъглите на $\triangle OMN$.



Дадено:
$\sphericalangle AOB = 60°$;
т. $M \in OA^{\rightarrow}$,
т. $N \in OB^{\rightarrow}$; $OM = 2ON$.

Да се намерят ъглите на $\triangle OMN$.

Доказателство:

Нека $ON = a \Rightarrow OM = 2a$. Построяваме т. P среда на $OM \Rightarrow OP = PM = a$.

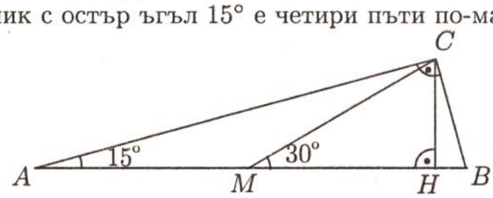
$\triangle ONP$ е равнобедрен ($ON = OP = a$) и $\sphericalangle NOP = 60° \Rightarrow \triangle ONP$ е равностранен $\Rightarrow \sphericalangle ONP = \sphericalangle OPN = 60°$.

$NP = PM = a \Rightarrow \triangle NPM$ е равнобедрен $\Rightarrow \sphericalangle PNM = \sphericalangle PMN$.

$\sphericalangle OPN = 60°$ е външен за $\triangle NPM \Rightarrow \sphericalangle PNM = \sphericalangle PMN = \frac{1}{2} \sphericalangle OPN = 30°$.

За ъглите на $\triangle OMN$ получихме: $\sphericalangle ONM = 90°$; $\sphericalangle OMN = 30°$; $\sphericalangle NOP = 60°$ (по условие).

ОЗ 18. Да се докаже, че височината към хипотенузата в правоъгълен триъгълник с остър ъгъл 15° е четири пъти по-малка от хипотенузата.



Дадено:
$\triangle ABC$ – правоъгълен ($\sphericalangle ACB = 90°$);
$\sphericalangle CAB = 15°$; CH – височина.

Да се докаже, че $CH = \frac{1}{4}AB$.

Доказателство:

Нека $CH = a$ (1). Построяваме медианата CM към хипотенузата. По теорема $\Rightarrow CM = \frac{1}{2}AB \Rightarrow AM = MC = MB$

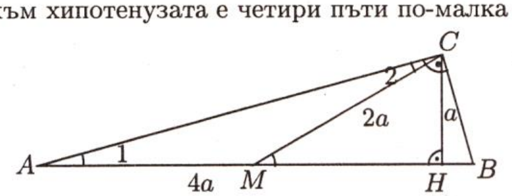
$\Rightarrow \triangle AMC$ е равнобедрен $\Rightarrow \sphericalangle CAM = \sphericalangle ACM = 15°$.

$\sphericalangle CMB$ външен за $\triangle AMC \Rightarrow \sphericalangle CMB = \sphericalangle CAM + \sphericalangle ACM = 30°$.

Разглеждаме $\triangle MCH$: $\sphericalangle MHC = 90°, \sphericalangle CMH = 30° \Rightarrow CH = \frac{1}{2}CM$, но $CH = a$ $\Rightarrow MC = 2a$, но $AM = MC = MB = 2a \Rightarrow AB = 4a$ (2).

От (1) и (2) $\Rightarrow CH = \frac{1}{4}AB$.

ОЗ 19. Да се намерят острите ъгли на правоъгълен триъгълник, ако височината към хипотенузата е четири пъти по-малка от хипотенузата.



Дадено:
$\triangle ABC$ – правоъгълен ($\sphericalangle ACB = 90°$);
CH – височина; $CH = \frac{1}{4}AB$.

Да се намерят $\sphericalangle CAB$ и $\sphericalangle ABC$.

Доказателство:

Нека $CH = a$. Щом $CH = \frac{1}{4}AB \Rightarrow AB = 4a$. Построяваме медианата CM към хипотенузата AB. По теорема $CM = \frac{1}{2}AB \Rightarrow CM = AM = MB = 2a$.

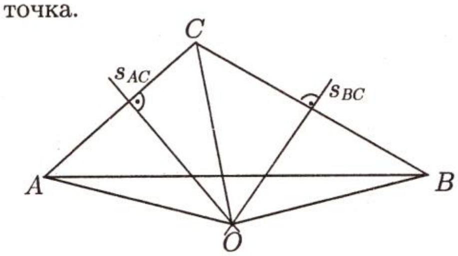
Разглеждаме $\triangle MCH$: $\sphericalangle MHC = 90°$, $CH = a, MC = 2a$, т.е. $CH = \frac{1}{2}MC \Rightarrow$ $\sphericalangle CMH = 30°$, но $\sphericalangle CMH$ е външен за $\triangle AMC$.

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ (ъгли при основата на равнобедрения $\triangle AMC$)

$\Rightarrow \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 = \frac{1}{2} \sphericalangle CMB = 15°$.

Щом $\sphericalangle CAB = 15°$, то $\sphericalangle ABC = 90° - 15° = 75°$ (от теоремата за острите ъгли в правоъгълен триъгълник).

ОЗ 20. Да се докаже, че трите симетрали на триъгълника се пресичат в една точка.



Дадено:
$\triangle ABC$ – произволен.

Да се докаже, че симетралите на AB, BC и AC се пресичат в една точка.

Доказателство:

Построяваме s_{AC} и s_{BC}, които се пресичат в т. O (ако допуснем, че $s_{AC} \| s_{BC} \Rightarrow$ $AC \| BC$, което противоречи на условието). Ще докажем, че и третата симетрала, на отсечката AB, минава през точка O.

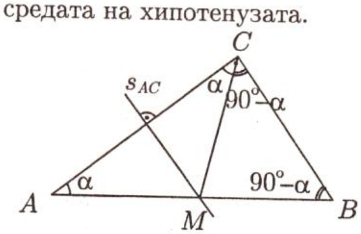
Ако една точка лежи на симетралата на дадена отсечка, то тя се намира на равни разстояния от краищата на тази отсечка.

$$\left.\begin{array}{l}\text{От т. } O \in s_{AC} \Rightarrow OA = OC \\ \text{От т. } O \in s_{BC} \Rightarrow OB = OC\end{array}\right\} \Rightarrow OA = OB.$$

Сега използваме обратната теорема: Ако една точка се намира на равни разстояния от краищата на дадена отсечка, то тази точка принадлежи на нейната симетрала.

Тогава от $OA = OB \Rightarrow$ т. $O \in s_{AB} \Rightarrow$ трите симетрали се пресичат в една точка – т. O.

ОЗ 21. Да се докаже, че симетралите в правоъгълен триъгълник се пресичат в средата на хипотенузата.

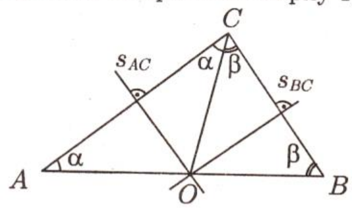


Дадено:
$\triangle ABC$ – правоъгълен ($\sphericalangle ACB = 90°$).

Да се докаже, че трите симетрали на $\triangle ABC$ се пресичат в точка, която е среда на AB.

Доказателство:
Построяваме s_{AC}. Нека $s_{AC} \cap AB = M$. Щом т. $M \in s_{AC} \Rightarrow MA = MC$
$\Rightarrow AMC$ е равнобедрен $\Rightarrow \sphericalangle CAM = \sphericalangle ACM = \alpha$. Тогава
$\sphericalangle MCB = 90° - \sphericalangle ACM = 90° - \alpha$ (1).
Сборът от острите ъгли в правоъгълен триъгълник е 90°.
Щом $\sphericalangle CAB = \alpha \Rightarrow \sphericalangle ABC = 90° - \alpha$ (2).
От (1) и (2) $\Rightarrow \sphericalangle MCB = \sphericalangle MBC = 90° - \alpha$
$\Rightarrow \triangle MCB$ е равнобедрен $\Rightarrow MC = MB \Rightarrow$ т. $M \in s_{BC}$
$\Rightarrow s_{AC} \cap s_{BC} =$ т. M, но $AM = MC = MB$
$\Rightarrow AM = MB \Rightarrow$ т. M е среда на AB.
С което доказахме, че симетралите на правоъгълния $\triangle ABC$ се пресичат в средата на хипотенузата AB.

ОЗ 22. Да се определи видът на триъгълника, на който симетралите на две от страните се пресичат върху третата му страна.



Дадено:
$\triangle ABC$ – произволен;
$s_{AC} \cap s_{BC} = O$, т. $O \in AB$.

Да се определи видът на $\triangle ABC$.

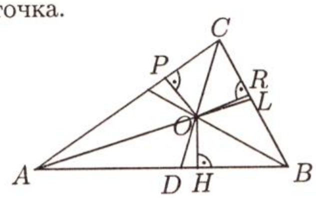
Доказателство:

Нека $s_{AB} \cap s_{BC} = O$ (т. $O \in AB$). Щом т. $O \in s_{AC} \Rightarrow OA = OC \Rightarrow \triangle AOC$ е равнобедрен $\Rightarrow \sphericalangle CAO = \sphericalangle ACO = \alpha$.

Щом т. $O \in s_{BC} \Rightarrow OB = OC \Rightarrow \triangle OBC$ е равнобедрен $\Rightarrow \sphericalangle OBC = \sphericalangle OCB = \beta$.

Разглеждаме $\triangle ABC$: $\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB = 180°$, $\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180°$, $2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$, но $\sphericalangle ACB = \alpha + \beta \Rightarrow \sphericalangle ACB = 90° \Rightarrow \triangle ABC$ е правоъгълен.

ОЗ 23. Да се докаже, че трите ъглополовящи в триъгълника се пресичат в една точка.



Дадено:
$\triangle ABC$ – произволен.

Да се докаже, че трите ъглополовящи в $\triangle ABC$ се пресичат в една точка.

Доказателство:

Пресичаме ъглополовящите AL и CD в т. O. (Какво следва, ако допуснем, че $AL \| CD$?) Ще докажем, че и третата ъглополовяща минава през т. O.

От т. $O \in l_{\sphericalangle CAB} \Rightarrow OH = OP$ (от теоремата, че всяка точка от ъглополовящата на даден ъгъл се намира на равни разстояния от раменете на ъгъла).

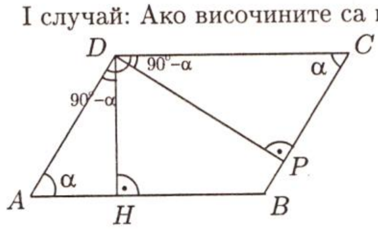
От т. $O \in l_{\sphericalangle ACB} \Rightarrow OP = OR \Rightarrow OH = OP = OR$.

От $OH = OR \Rightarrow$ т. $O \in l_{\sphericalangle ABC}$ (от теоремата, че ако една точка се намира на равни разстояния от раменете на даден ъгъл, то тя принадлежи на ъглополовящата на този ъгъл) $\Rightarrow$ т. O е пресечна точка на трите ъглополовящи на $\triangle ABC$.

Успоредник и видове успоредници

ОЗ 24. Да се докаже, че ъгълът между височините на успоредника, построени през един и същи връх, е равен на един от ъглите на успоредника.

I случай: Ако височините са построени през върха на тъп ъгъл.



Дадено:
$ABCD$ – успоредник;
DH, DP – височини.

Да се докаже, че
$\sphericalangle HDP = \sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD$.

Доказателство:

Нека $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD = \alpha \Rightarrow \sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC = 180° - \alpha$ $((AB \| DC) \cap AD)$.

От $\triangle ADH$: $\sphericalangle DAH + \sphericalangle ADH = 90° \Rightarrow \sphericalangle ADH = 90° - \alpha$.

От $\triangle DPC$: $\sphericalangle PDC + \sphericalangle DCP = 90° \Rightarrow \sphericalangle PDC = 90° - \alpha$

$\sphericalangle HDP = \sphericalangle ADC - (\sphericalangle ADH + \sphericalangle PDC) = 180° - \alpha - (90° - \alpha + 90° - \alpha) = \alpha \Rightarrow \sphericalangle HDP = \alpha = \sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD$.

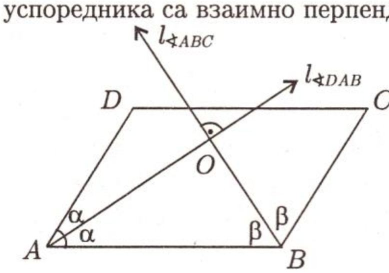
II случай: Ако височините са построени през върха на остър ъгъл.

Дадено:
$ABCD$ – успоредник;
AH, AM – височини.

Да се докаже, че
$\sphericalangle HAM = \sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC$.

Нека $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD = \alpha \Rightarrow \sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC = 180^\circ - \alpha$.
$(AB \| DC) \cap AD \Rightarrow \sphericalangle BAD = \sphericalangle ADH = \alpha$ (кръстни).
От $\triangle HAD : \sphericalangle HAD + \sphericalangle HDA = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle HAD = 90^\circ - \alpha$
$\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABM = \alpha$ (кръстни) $(AD \| BC) \cap AB$
От $\triangle AMB$ – правоъгълен $\Rightarrow \sphericalangle BAM = 90^\circ - \alpha$
$\sphericalangle HAM = \sphericalangle HAD + \sphericalangle DAB + \sphericalangle BAM = 180^\circ - \alpha$
$\Rightarrow \sphericalangle HAM = \sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC = 180^\circ - \alpha$.

ОЗ 25. Да се докаже, че ъглополовящите на всеки два прилежащи ъгъла на успоредника са взаимно перпендикулярни.

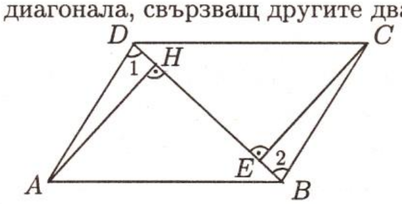


Дадено:
$ABCD$ – успоредник;
$l_{\sphericalangle DAB}$ – ъглополовяща на $\sphericalangle DAB$;
$l_{\sphericalangle ABC}$ – ъглополовяща на $\sphericalangle ABC$.

Да се докаже, че $l_{\sphericalangle DAB} \perp l_{\sphericalangle ABC}$.

Доказателство:
Нека $l_{\sphericalangle DAB} \cap l_{\sphericalangle ABC} = O$. От $(AD \| BC) \cap AB \Rightarrow \sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = 180^\circ$ (прилежащи).
Нека $\sphericalangle DAO = \sphericalangle OAB = \alpha$ и $\sphericalangle ABO = \sphericalangle OBC = \beta \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180^\circ$
$\Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$.
Разглеждаме $\triangle AOB$: $\sphericalangle OAB + \sphericalangle ABO + \sphericalangle AOB = 180^\circ$
$\alpha + \beta + \sphericalangle AOB = 180^\circ$
$90^\circ + \sphericalangle AOB = 180^\circ$
$\Rightarrow \sphericalangle AOB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow l_{\sphericalangle DAB} \perp l_{\sphericalangle ABC}$.

ОЗ 26. Да се докаже, че всеки два върха на успоредника са равноотдалечени от диагонала, свързващ другите два върха.



Дадено:
$ABCD$ – успоредник; BD – диагонал;
$AH \perp BD, CE \perp BD$.

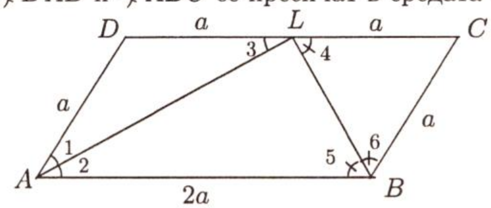
Да се докаже, че $AH = CE$.

Доказателство:

Разглеждаме $\triangle ADH$ и $\triangle CBE$:

1. $AD = BC$ (срещулежащи страни в успоредник)
2. $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ (кръстни при $(AD \| BC) \cap BD$)
3. $\sphericalangle AHD = \sphericalangle CEB = 90^\circ \Rightarrow \triangle ADH \cong \triangle CBE$ по II признак $\Rightarrow AH = CE$ (като съответни елементи).

ОЗ 27. В успоредника $ABCD$ $AB = 2AD$. Да се докаже, че ъглополовящите на $\sphericalangle DAB$ и $\sphericalangle ABC$ се пресичат в средата на CD.



Дадено:
$ABCD$ – успоредник, $AB = 2AD$;
AL – ъглополовяща на $\sphericalangle DAB$;
BL – ъглополовяща на $\sphericalangle ABC$.

Да се докаже, че $L \in CD$ и $DL = LC$.

Доказателство:

Нека $AD = a \Rightarrow AB = 2a$. Построяваме AL – ъглополовящата на $\sphericalangle DAB$ $\Rightarrow \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ (свойство на ъглополовящата). Но от $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$ (кръстни при $(AB \| DC) \cap AL$) $\Rightarrow \sphericalangle 1 = \sphericalangle 3 \Rightarrow \triangle ADL$ е равнобедрен

$\Rightarrow AD = DL = a$, но $DC = AB = 2a \Rightarrow LC = DC - DL = 2a - a = a$.

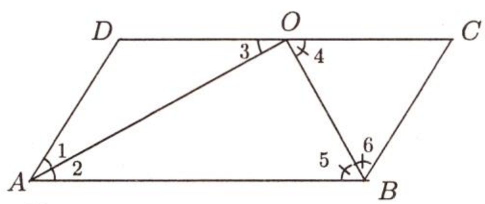
Разглеждаме $\triangle LBC$: $LC = CB = a \Rightarrow \triangle LBC$ е равнобедрен

$\Rightarrow \sphericalangle 4 = \sphericalangle 6$, но $\sphericalangle 5 = \sphericalangle 4$ (кръстни при $(AB \| DC) \cap BL$)

$\Rightarrow \sphericalangle 5 = \sphericalangle 6 \Rightarrow BL$ е ъглополовяща на $\sphericalangle ABC$

$\Rightarrow$ т. L е пресечна точка на ъглополовящите на $\sphericalangle DAB$ и $\sphericalangle ABC$ и по доказателство $DL = LC = a \Rightarrow$ т. L е среда на CD.

ОЗ 28. В успоредника $ABCD$ ъглополовящите на два прилежащи ъгъла се пресичат върху срещуположната страна на успоредника. Да се докаже, че едната страна на успоредника е два пъти по-голяма от другата страна.



Дадено:
$ABCD$ – успоредник;
AO – ъглополовяща на $\sphericalangle DAB$;
BO – ъглополовяща на $\sphericalangle ABC$;
т. $O \in CD$.

Да се докаже, че $AB = 2AD$.

Доказателство:

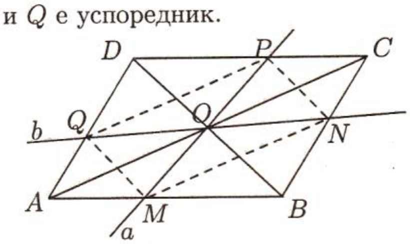
AO е ъглополовяща на $\sphericalangle DAB \Rightarrow \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, но $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$ (кръстни при $(AB \| DC) \cap AO$) $\Rightarrow \sphericalangle 1 = \sphericalangle 3 \Rightarrow \triangle ADO$ е равнобедрен, $AD = DO$ (1).

BO – ъглополовяща на $\sphericalangle ABC \Rightarrow \sphericalangle 5 = \sphericalangle 6$, но $\sphericalangle 5 = \sphericalangle 4$ (кръстни при $(AB \| DC) \cap BO$) $\Rightarrow \sphericalangle 4 = \sphericalangle 6 \Rightarrow \triangle BCO$ е равнобедрен, $\Rightarrow BC = CO$ (2).

По условие $AD = BC$ (срещулежащи страни в успоредник) (3).

От (1), (2) и (3) $\Rightarrow DO = OC = AD = BC$, но $DC = 2DO \Rightarrow DC = 2AD \Rightarrow$ страните AB и DC на успоредника са 2 пъти по-големи от страните AD и BC.

ОЗ 29. В успоредника $ABCD$ диагоналите AC и BD се пресичат в точка O. През точка O са построени прави a и b, които пресичат страните на успоредника в точките M, N, P, и Q. Да се докаже, че четириъгълникът с върхове точките M, N, P и Q е успоредник.



Дадено:
$ABCD$ – успоредник; $AC \cap BD = O$;
a, b – прави през т. O;
$a \cap (AB \| CD) = \{M, P\}$,
$b \cap (BC \| AD) = \{N, Q\}$.

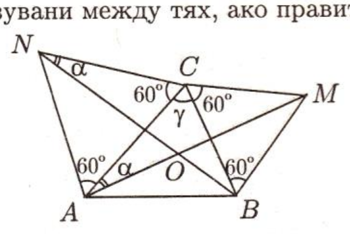
Да се докаже, че $MNPQ$ е успоредник.

Доказателство:
Разглеждаме $\triangle OAM$ и $\triangle OCP$:
1. $\sphericalangle AOM = \sphericalangle COP$ (връхни)
2. $\sphericalangle OAM = \sphericalangle OCP$ (кръстни при $(AB \| DC) \cap AC$)
3. $AO = OC$ (свойство на диагоналите на успоредника)
$\Rightarrow \triangle OAM \cong \triangle OCP$ по II признак $\Rightarrow OM = OP$ (като съответни елементи) (1).
Разглеждаме $\triangle ODQ$ и $\triangle OBN$:
1. $OD = OB$ (свойство на диагоналите на успоредника)
2. $\sphericalangle QOD = \sphericalangle NOB$ (връхни)
3. $\sphericalangle QDO = \sphericalangle NBO$ (кръстни при $(AD \| BC) \cap BD$)
$\Rightarrow \triangle ODQ \cong \triangle OBN$ по II признак $\Rightarrow OQ = ON$ (като съответни елементи) (2).
От (1) и (2) $\Rightarrow MNPQ$ е успоредник (диагоналите взаимно се разполовяват).

Обобщителни задачи

ОЗ 30. Даден е $\triangle ABC$. Външно за триъгълника са построени равностранните триъгълници $\triangle BCM$ и $\triangle ACN$. Да се докаже, че $AM = BN$. Да се намери ъгълът между правите AM и BN.

Забележка: Под ъгъл между две прави се разбира един от острите ъгли, образувани между тях, ако правите не са перпендикулярни.



Дадено:
$\triangle ABC$ – произволен;
$\triangle BCM, \triangle ACN$ – равностранни;
$AM \cap BN = O$.

Да се докаже, че $AM = BN$ и да се намери $\sphericalangle AON$.

Доказателство:
Разглеждаме $\triangle NBC$ и $\triangle AMC$:
1. $NC = AC$ (страни в равностранен $\triangle ACN$)
2. $BC = MC$ (страни в равностранен $\triangle BCM$)
3. $\sphericalangle NCB = 60° + \gamma = \sphericalangle ACM (\sphericalangle ACB = \gamma)$
$\Rightarrow \triangle NBC \cong \triangle AMC$ по I признак $\Rightarrow NB = AM$ (като съответни елементи).

От еднаквостта $\sphericalangle CNB = \sphericalangle CAM = \alpha$.

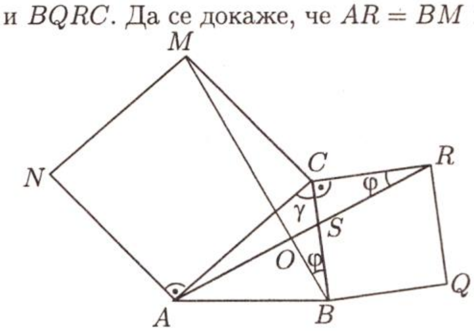
$\Rightarrow \sphericalangle ANB = 60^\circ - \alpha$; $\sphericalangle NAM = 60 + \alpha$.

Нека $AM \cap NB = O$.

За $\triangle AON$: $\sphericalangle ANO + \sphericalangle NAO + \sphericalangle AON = 180^\circ$ (теорема за сбор от ъглите в триъгълник), $60 - \alpha + 60 + \alpha + \sphericalangle AON = 180^\circ \Rightarrow \sphericalangle AON = 60^\circ$

$\Rightarrow$ ъгълът между правите AM и BN е равен на 60°.

ОЗ 31. Даден е $\triangle ABC$. Външно за триъгълника са построени квадратите $ACMN$ и $BQRC$. Да се докаже, че $AR = BM$ и да се намери ъгълът между тях.



Дадено:
$\triangle ABC$ – произволен;
$ACMN, BQRC$ – квадрати;
$AR \cap BM = O$.

Да се докаже, че $AR = BM$ и да се намери $\sphericalangle AOB$.

Доказателство:

Нека $\sphericalangle ACB = \gamma$. Тогава $\sphericalangle ACR = 90^\circ + \gamma$, $\sphericalangle BCM = 90^\circ + \gamma$

$\Rightarrow \sphericalangle ACR = \sphericalangle BCM = 90^\circ + \gamma$.

Разглеждаме $\triangle ARC$ и $\triangle MBC$:

1. $AC = MC$ (страни на квадрат $ACMN$)
2. $CR = CB$ (страни на квадрат $BQRC$)
3. $\sphericalangle ACR = \sphericalangle MCB = 90^\circ + \gamma$ (по доказателство)

$\Rightarrow \triangle ARC \cong \triangle MBC$ (по I признак) $\Rightarrow AR = BM$.

От еднаквостта $\sphericalangle CRA = \sphericalangle CBM = \varphi$ (като съответни елементи).

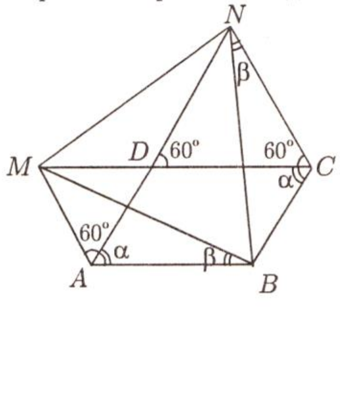
Нека $AR \cap BC = S$, $AR \cap MB = O$.

От $\triangle CSR$: $\sphericalangle SCR = 90^\circ$, $\sphericalangle CRS = \varphi \Rightarrow \sphericalangle CSR = 90^\circ - \varphi$.

$\sphericalangle CSR = \sphericalangle OSB = 90 - \varphi$ (връхни), но $\sphericalangle OBS = \varphi$ (следствие от еднаквите триъгълници) $\Rightarrow \sphericalangle SOB = 180^\circ - (\sphericalangle OSB + \sphericalangle OBS)$ (сбор от ъглите на $\triangle OBS$)

$\Rightarrow \sphericalangle SOB = 180^\circ - (90^\circ - \varphi + \varphi) = 90^\circ \Rightarrow AR \perp BM$, т.е. ъгълът между AR и BM е 90°.

ОЗ 32. Даден е успоредник $ABCD$. Външно за успоредника са построени равностранните триъгълници ADM и CND. Да се докаже, че $\triangle MBN$ е равностранен.



Дадено:
$ABCD$ – успоредник;
$\triangle ADM, \triangle CND$ – равностранни.

Да се докаже, че $\triangle MBN$ е равностранен.

Доказателство:

Нека $\sphericalangle DAB = \alpha \Rightarrow \sphericalangle BCD = \alpha$ (срещулежащи ъгли в успоредник)

$\Rightarrow \sphericalangle MAB = 60° + \alpha$ и $\sphericalangle BCN = 60 + \alpha \Rightarrow \sphericalangle MAB = \sphericalangle BCN = 60° + \alpha$.

Разглеждаме $\triangle ABM$ и $\triangle CNB$:

1. $MA = BC$ ($MA = AD$ – страни в равностранен $\triangle ADM$, но $AD = BC$ – срещулежащи страни в успоредник)

2. $AB = CN$ ($AB = DC$ – срещулежащи страни в успоредник, но $DC = CN$ – страни в равностранен $\triangle DCN$)

3. $\sphericalangle MAB = \sphericalangle BCN$ (по доказателство)

$\Rightarrow \triangle ABM \cong \triangle CNB$ (по I признак)

$\Rightarrow MB = BN, \sphericalangle ABM = \sphericalangle CNB = \beta$ (като съответни елементи).

От $MB = NB \Rightarrow \triangle MBN$ е равнобедрен. От $\triangle BCN : \sphericalangle BNC = \beta$,
$\sphericalangle BCN = 60° + \alpha \Rightarrow \sphericalangle NBC = 180° - (\beta + 60° + \alpha) = 120° - \alpha - \beta$ (1),
а $\sphericalangle ABM = \beta$ (2).

$\sphericalangle DAB = \alpha \Rightarrow \sphericalangle ABC = 180° - \alpha$ (прилежащи ъгли в успоредника $ABCD$)

$\sphericalangle MBN = 180° - \alpha - (\sphericalangle ABM + \sphericalangle NBC)$ (3).

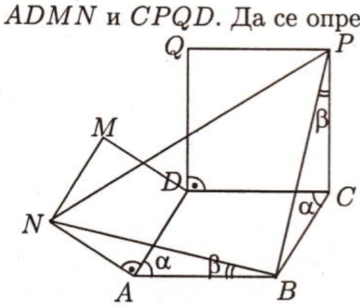
Заместваме (1) и (2) в (3):

$\Rightarrow \sphericalangle MBN = 180° - \alpha - (120 - \alpha - \beta + \beta) = 180° - \alpha - 120° + \alpha = 60°$

$\Rightarrow \triangle MBN$ е равнобедрен с $\sphericalangle MBN = 60°$

$\Rightarrow \triangle MBN$ е равностранен.

ОЗ 33. Даден е успоредник $ABCD$. Външно за него са построени квадратите $ADMN$ и $CPQD$. Да се определи видът на $\triangle NBP$ и да се намерят ъглите му.



Дадено:
$ABCD$ – успоредник;
$ADMN, CPQD$ – квадрати.

Да се определи видът на $\triangle NBP$ и да се намерят ъглите му.

Доказателство:

Нека $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD = \alpha$ (срещулежащи ъгли в успоредника).

$\sphericalangle NAB = 90° + \alpha, \sphericalangle BCP = 90° + \alpha \Rightarrow \sphericalangle NAB = \sphericalangle BCP = 90° + \alpha$:

Разглеждаме $\triangle NAB$ и $\triangle BCP$:

1. $AN = BC$ ($AN = AD$ – страни на квадрата $ADMN$ и $AD = BC$ – срещулежащи страни в успоредник)

2. $AB = CP$ ($AB = DC$ – срещулежащи страни в успоредник и $DC = CP$ – страни на квадрат $DCPQ$)

3. $\sphericalangle NAB = \sphericalangle BCP = 90° + \alpha$ (по доказателство)

$\Rightarrow \triangle NAB \cong \triangle BCP$ (по I признак) $\Rightarrow NB = BP, \sphericalangle ABN = \sphericalangle CPB = \beta$ (като съответни елементи).

От $BN = BP \Rightarrow \triangle NBP$ е равнобедрен.

От $\triangle BPC : \sphericalangle BPC = \beta, \sphericalangle BCP = 90^\circ + \alpha$

$\Rightarrow \sphericalangle PBC = 180^\circ - (\beta + 90^\circ + \alpha) = 180^\circ - \beta - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha - \beta$ (1),

$\sphericalangle ABN = \beta$ (2) (следствие от еднаквите триъгълници).

$\sphericalangle DAB = \alpha \Rightarrow \sphericalangle ABC = 180^\circ - \alpha$ (прилежащи ъгли в успоредника) (3).

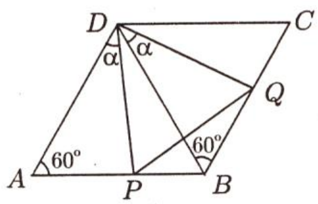
От (1), (2) и (3)

$\Rightarrow \sphericalangle NBP = \sphericalangle ABC - (\sphericalangle ABN + \sphericalangle PBC) = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha - \beta + \beta) = 180^\circ - \alpha - 90^\circ + \alpha = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle NBP$ е равнобедрен и правоъгълен

$\Rightarrow \sphericalangle BNP = \sphericalangle BPN = 45^\circ$.

ОЗ 34. Даден е ромб $ABCD$ с $\sphericalangle DAB = 60^\circ$. Точките P и Q лежат съответно върху страните AB и BC, така че $AP = BQ$. Да се докаже, че $\triangle DPQ$ е равностранен.



Дадено:
$ABCD$ – ромб, $\sphericalangle DAB = 60^\circ$;
$P \in AB, Q \in BC$ и $AP = BQ$.

Да се докаже, че $\triangle DPQ$ е равностранен.

Доказателство:

Построяваме диагонала BD. Щом $AD = AB$ и $\sphericalangle DAB = 60^\circ$, $\triangle ABD$ е равностранен $\Rightarrow AD = BD$.

Разглеждаме $\triangle APD$ и $\triangle BQD$:

1. $AD = BD$ (по доказателство)
2. $\sphericalangle DAP = \sphericalangle DBQ = 60^\circ$ (От $\sphericalangle DAB = 60^\circ \Rightarrow \sphericalangle ABC = 120^\circ$ – прилежащи ъгли, но BD е ъглополовяща на $\sphericalangle ABC \Rightarrow \sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC = \frac{1}{2} \sphericalangle ABC = 60^\circ$)
3. $AP = BQ$ (по условие)

$\Rightarrow \triangle APD \cong \triangle BQD$ (по I признак) $\Rightarrow DP = DQ \Rightarrow \triangle DPQ$ е равнобедрен и $\sphericalangle ADP = \sphericalangle BDQ$.

Нека $\sphericalangle ADP = \sphericalangle BDQ = \alpha$.

$\sphericalangle PDB = \sphericalangle ADB - \sphericalangle ADP = 60^\circ - \alpha$ ($\sphericalangle ADB = 60^\circ$, защото $\triangle ABD$ е равностранен), но $\sphericalangle BDQ = \alpha$

$\Rightarrow \sphericalangle PDQ = \sphericalangle PDB + \sphericalangle BDQ = 60^\circ - \alpha + \alpha = 60^\circ \Rightarrow \triangle PQD$ е равнобедрен с $\sphericalangle PDQ = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle PQD$ е равностранен.