Решения на контролна работа № 1
Дискретна Математика
Информатика, ФМИ, СУ

14.XII.2009

1 т. **Задача 1:** Дадени са множествата:

$$\begin{aligned} U &= \{a, 1, b, 2, c, 3, d, 4\} \\ A &= \{a, c, 1, d\} \\ B &= \{2, b, c, 1\} \end{aligned}$$

Да се намери броят на елементите, принадлежащи на всяко от множествата:

$$X = 2^{(\overline{A \cap B}^{U}) \setminus (\overline{A \cup B}^{U})}$$

$$Y = 2^{(\overline{A \cap B}^{U})} \times 2^{(\overline{A \cup B}^{U})}$$

Решение:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{1, c\} \\ A \cup B &= \{1, 2, a, b, c, d\} \\ \overline{A \cap B}^{U} &= \{2, 3, 4, a, b, d\} \\ \overline{A \cup B}^{U} &= \{3, 4\} \\ (\overline{A \cap B}^{U}) \setminus (\overline{A \cup B}^{U}) &= \{2, a, b, d\} \\ |X| = \left| 2^{(\overline{A \cap B}^{U}) \setminus (\overline{A \cup B}^{U})} \right| &= 2^4 = 16 \\ |Y| = \left| 2^{(\overline{A \cap B}^{U})} \times 2^{(\overline{A \cup B}^{U})} \right| &= \left| 2^{(\overline{A \cap B}^{U})} \right| . \left| 2^{(\overline{A \cup B}^{U})} \right| = 2^6 . 2^2 = 2^8 = 256 \end{aligned}$$

2 т. **Задача 2:** По колко начина може да се оцветят квадратчетата на правоъгълна мрежа $m \times n$ (m реда и n колони) в k цвята

0.5 т. а) без ограничения;

0.75 т. б) с единственото ограничение, че във всеки ред няма съседни квадратчета с еднакъв цвят;

0.75 т. в) с единственото ограничение, че във всеки ред е използван всеки от цветовете.

Решение:

а) k^{mn}, понеже има общо mn квадратчета, а всяко от тях може да бъде оцветено по k начина независимо от другите квадратчета.

б) Оцветяването на произволен ред е независимо от оцветяванията на другите редове. Следователно, ако N е броят на начините да бъде оцветен произволен ред, отговорът N^m.

Да разгледаме оцветяването на ред i, където i е произволно число, такова че $1 \leq i \leq m$. Да разгледаме кое да е квадратче в ред i, примерно квадратче $(i, 1)$. За него имаме k възможности за оцветяване заради наличието на k възможни цвята. За съседното му квадратче $(i, 2)$ имаме $k - 1$ възможности поради ограничението да не се използват еднакви цветове на съседни квадратчета. Аналогично, за квадратчета $(i, 3)$, $(i, 4)$, $\ldots$, (i, n) имаме $k-1$ възможности. Като цяло, за ред i възможните различни оцветявания са $k(k-1)^{n-1}$. Следователно, $N = k(k-1)^{n-1}$ и отговорът е $k^m(k-1)^{m(n-1)}$.

в) Оцветяването на произволен ред е независимо от оцветяванията на другите редове. Следователно, ако $N(k, n)$ е броят на начините да бъде оцветен произволен ред, отговорът $N(k, n)^m$.

Да разгледаме оцветяването на ред i, където i е произволно число, такова че $1 \leq i \leq m$. Нека U е множеството на всички възможни оцветявания на ред i с k цвята без ограничения. $|U| = k^n$. Нека S_j е множеството от възможните оцветяванията на ред i, в които цвят j не се използва, за всички j, такива че$1 \leq j \leq k$. Нека S_{j_1, j_2} е множеството от възможните оцветяванията на ред i, в които цветове j_1 и j_2 не се използват, за всички j_1 и j_2, такива че $1 \leq j_1 < j_2 \leq k$. Да направим следната дефиниция, която се явява обобщение на предните две дефиниции за произволен брой цветове.

Определение 1. *За всички цели положителни j_1, j_2, $\ldots$, j_t, такива че $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_t \leq k$, множеството от възможните оцветявания на ред i, в които цветове j_1, j_2, $\ldots$, j_t не се използват, е $S_{j_1, j_2, \ldots, j_t}$.* □

По принципа на включването и изключването,

$$\begin{aligned}
N(k,n) = |U| \\
&- \underbrace{\sum_{1 \le j_1 \le k} |S_{j_1}|}_{\text{поне един цвят не се използва}} \\
&+ \underbrace{\sum_{1 \le j_1 < j_2 \le k} |S_{j_1} \cap S_{j_2}|}_{\text{поне два цвята не се използват}} \\
&- \underbrace{\sum_{1 \le j_1 < j_2 < j_3 \le k} |S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap S_{j_3}|}_{\text{поне три цвята не се използват}} \\
&\dots \\
&+ (-1)^t \underbrace{\sum_{1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_t \le k} |S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap \dots \cap S_{j_t}|}_{\text{поне } t \text{ цвята не се използват}} \\
&\dots \\
&+ (-1)^{k-1} \underbrace{\sum_{1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_{k-1} \le k} |S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap \dots \cap S_{j_{k-1}}|}_{\text{поне } k-1 \text{ цвята не се използват, тоест използва се само } 1 \text{ цвят}} \\
&+ (-1)^k \underbrace{|S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap \dots \cap S_{j_k}|}_{k \text{ цвята не се използват, тоест няма оцветяване изобщо; това трябва да е } 0.}
\end{aligned}$$

Твърдим, че за всяко t, такова че $1 \le t \le k$,

$$|S_{j_1} \cap S_{j_2} \cap \dots \cap S_{j_t}| = \binom{k}{t}(k-t)^n \tag{1}$$

Това е така, защото за да определим начините да се оцвети ред i, така че t цвята да не се ползват, е достатъчно да намерим броя на начините да се подберат t цвята от k—този брой е $\binom{k}{t}$—и броят начини да се оцвети реда с останалите $k-t$ цвята—този брой е $(k-t)^n$. Израз (1) следва веднага по принципа на умножението. Тогава

$$\begin{aligned}
N(k,n) &= k^n - \sum_{t=1}^{k} (-1)^t \binom{k}{t}(k-t)^n = \sum_{t=0}^{k} (-1)^t \binom{k}{t}(k-t)^n \\
&= \sum_{t=0}^{k-1} (-1)^t \binom{k}{t}(k-t)^n, \text{ тъй като } (-1)^k \binom{k}{k}(k-k)^n = 0
\end{aligned}$$

1 т. **Задача 3:** Нека Γ е множеството от крайните неориентирани графи, чиито върхове са поне 3 и всеки от върховете е с четна степен. Да се докаже или опровергае, че всеки граф $G \in \Gamma$ има поне три върха с равни степени.

Решение: Твърдението е вярно. Ще използваме следната нотация.

Нотация 1. *Нека $G(V,E)$ е произволен неориентиран граф. За всеки връх $u \in V$, с „$d(u)$“ означаваме степента на u в G. С „$D(G)$“ означаваме множеството от всички степени на върхове в G:*

$$D(G) = \{d(u) \mid u \in V\}$$

За всяко $k \in D(G)$, използваме „$\#_k(G)$“, за да означим броя на върховете от степен k в G. И накрая,

$$\#_{max}(G) = \max\{\#_k(G) \mid k \in D(G)\} \qquad \square$$

Очевидно е, че $|D(G)|$ и $\#_{\max}(G)$ налагат известно ограничение отгоре върху броя на върховете, а именно,

$$|V| \leq |D(G)|.(\#_{\max}(G)) \tag{2}$$

Известно е, че за произволен неориентиран граф $G(V,E)$,

$$D(G) \subseteq \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}, \text{ където } n = |V|.$$

Но за произволен $G(V,E) \in \Gamma$, ако $n = |V|$, то

$$D(G) \subseteq \{0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ n-2\} \qquad \text{при } n \text{ четно}$$
$$D(G) \subseteq \{0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ n-1\} \qquad \text{при } n \text{ нечетно}$$

Очевидно е, че $|\{0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ n-2\}| = \frac{n}{2}$ и $|\{0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ n-1\}| = \frac{n+1}{2}$. Следователно,

$$|D(G)| \leq \frac{n}{2} \qquad \text{при } n \text{ четно}$$
$$|D(G)| \leq \frac{n+1}{2} \qquad \text{при } n \text{ нечетно}$$

Лема 1. *За произволен граф $G(V,E) \in \Gamma$, ако G няма изолирани върхове, то G има поне три върха от една и съща степен.*

Доказателство:
Нека $n = |V|$. Тъй като G няма изолирани върхове, то $0 \notin D(G)$, следователно:

$$|D(G)| \leq \frac{n}{2} - 1 \qquad \text{при } n \text{ четно}$$
$$|D(G)| \leq \frac{n+1}{2} - 1 \qquad \text{при } n \text{ нечетно}$$

Да допуснем, че $\#_{\max}(G) \leq 2$. Тогава, съгласно (2),

$$|V| \leq 2\left(\frac{n}{2} - 1\right) = n - 2 \qquad \text{при } n \text{ четно}$$
$$|V| \leq 2\left(\frac{n+1}{2} - 1\right) = n - 1 \qquad \text{при } n \text{ нечетно}$$

И в двата случая—когато n е четно и когато n е нечетно—достигаме до противоречие. $\square$

За да довършим доказателството, остава да разгледаме случаите, в които графът от Γ има изолирани върхове. Ако тези изолирани върхове са три или повече, доказателството е готово, в такъв случай графът има поне три върха от една и съща степен по построение. Остава да разгледаме случаите, в които графът има един или два изолирани върха.

Първо да разгледаме произволен граф $G(V, E) \in \Gamma$, който има точно един изолиран връх u. Разглеждаме графа $G'(V \setminus \{u\}, E)$. Ако допуснем, че $|V| \leq 3$, то G' има най-много два върха. Те трябва да имат степени поне 2 заради принадлежността на G към Γ. Това обаче е невъзможно, тъй като в обикновен граф (не мултиграф) с най-много два върха, максималната възможна степен на връх е 1. Следователно $|V| > 3$. Но това означава, че G' има поне три върха. Очевидно е, че G' има върхове само от четни степени, тъй като G има върхове само от четни степени по построение. Тогава $G' \in \Gamma$ и можем да приложим Лема 1 към G'. Съгласно Лема 1, G' има поне три върха от една и съща степен. Тогава и G има поне три върха от една и съща степен.

Накрая разглеждаме произволен граф $G(V, E) \in \Gamma$, който има точно два изолирани върха u и w. Разглеждаме графа $G'(V \setminus \{u, w\}, E)$. Ако допуснем, че $|V| \leq 4$, то G' има най-много два върха. Те трябва да имат степени поне 2 заради принадлежността на G към Γ. Това обаче е невъзможно, тъй като в обикновен граф (не мултиграф) с най-много два върха, максималната степен е 1. Следователно $|V| > 4$. Но това означава, че G' има поне три върха. Очевидно е, че G' има върхове само от четни степени, тъй като G има върхове само от четни степени по построение. Тогава $\mathsf{G}' \in \Gamma$ и можем да приложим Лема 1 към G'. Съгласно Лема 1, G' има поне три върха от една и съща степен. Тогава и G има поне три върха от една и съща степен.