Решения на две задачи от теорията на формалните езици

11 януари 2010 г.

Задача 1. *Да се конструира контекстно свободна граматика за езика*

$$L = \{\alpha \in \{a, b\} \mid \#_a(\alpha) \neq \#_b(\alpha)\}.$$

Решение: Очевидно, $L = L_1 \cup L_2$, където:

$$L_1 = \{\alpha \in \{a, b\} \mid \#_a(\alpha) > \#_b(\alpha)\}$$
$$L_2 = \{\alpha \in \{a, b\} \mid \#_a(\alpha) < \#_b(\alpha)\}$$

Ако конструираме контекстно свободни граматики $\Gamma_1 = (N_1, \{a, b\}, S_1, P_1)$ и $\Gamma_2 = (N_2, \{a, b\}, S_2, P_2)$ за L_1 и L_2 съответно, такива че $N_1 \cap N_2 = \emptyset$, то, съгласно добре известен резултат за КС граматика на обединение на КС езици, търсената граматика е:

$$\Gamma = \big(N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, \{a, b\}, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\}\big).$$

Ще конструираме и верифицираме само Γ_1, за Γ_2 конструкцията и верификацията са аналогични.

Първо забелязваме, че $a \in L_1$. Освен това, ако $\beta \in L_1$, то $a\beta \in L_1$ и $\beta a \in L_1$. Поради тези съображения, следните продукции са в P_1:

$$S_1 \to a \mid aS_1 \mid S_1a \tag{1}$$

Тези продукции генерират само a-та измежду терминалите. За да може граматиката да генерира и b-та, добавяме и продукциите:

$$S_1 \to S_1S_1b \mid S_1bS_1 \mid bS_1S_1 \tag{2}$$

За тях ползваме следните съображения. Ако $\beta \in L_1$, то $b\beta\beta \in L_1$, $\beta b\beta \in L_1$ и $\beta\beta b \in L_1$. Обединявайки (1) и (2), получаваме:

$$S_1 \to a \mid aS_1 \mid S_1a \mid S_1S_1b \mid S_1bS_1 \mid bS_1S_1 \tag{3}$$

Една от продукциите $S_1 \to aS_1$ и $S_1 \to S_1a$ е излишна, както ще стане ясно надолу. Нека:

$$S_1 \to a \,|\, aS_1 \,|\, S_1S_1b \,|\, S_1bS_1 \,|\, bS_1S_1 \tag{4}$$

Да наречем тази граматика Γ_1. Ще докажем формално, че $L(\Gamma_1) = L_1$. Доказателството е от две части.

Част I: $L(\Gamma_1) \subseteq L_1$. Тоест, $\forall \beta \in \{a, b\}^* : \beta \in L(\Gamma_1) \Rightarrow \beta \in L_1$. Доказателството е по индукция по $|\beta|$.

База: Най-късият стринг в $L(\Gamma_1)$ е a. За $\beta = a$ импликацията очевидно е в сила.

Индуктивна хипотеза: Допускаме, че импликацията е в сила за всеки стринг от $L(\Gamma_1)$ с дължина $\leq n$.

Индуктивна стъпка: Разглеждаме произволен $\beta \in L(\Gamma_1)$, такъв че $|\beta| = n + 1$. Щом $\beta \in L(\Gamma_1)$, то β има деривация в Γ_1:

$$S_1 \vdash x_1 \vdash x_2 \vdash \ldots \vdash x_t \vdash \beta$$

Съгласно (4), съществуват следните четири възможности за x_1[†].

1. $x_1 = aS_1$, което означава, че $\beta = ay$ за някой стринг $y \in L(G_1)$. Тъй като $|y| = |\beta| - 1$, то $|y| = n$. Щом $|y| = n$ и $y \in L(G_1)$, индуктивната хипотеза е приложима спрямо y и съгласно нея в Γ_1 има деривация $S_1 \vDash y$. Тогава в Γ_1 има следната деривация на β:

   $$S_1 \vdash aS_1 \vDash ay$$

2. $x_1 = bS_1S_1$, което означава, че $\beta = ayz$ за някои стрингове $y, z \in L(G_1)$. Тъй като $|y| < |\beta|$ и $|z| < |\beta|$, то $|y| \leq n$ и $|z| \leq n$. Щом $|y| \leq n$ и $|z| \leq n$ и $y \in L(G_1)$ и $z \in L(G_1)$, индуктивната хипотеза е приложима спрямо y и z и съгласно нея в Γ_1 има деривации $S_1 \vDash y$ и $S_1 \vDash z$. Тогава в Γ_1 има следната деривация на β:

   $$S_1 \vdash aS_1S_1 \vDash ayS_1 \vDash ayz$$

3. $x_1 = S_1bS_1$. Доказателството е аналогично на 2.
4. $x_1 = S_1S_1b$. Доказателството е аналогично на 2.

[†]Не може x_1 да е a, понеже се предполага, че $|\beta|$ не е фиксирано число.

Част II: $L_1 \subseteq L(\Gamma_1)$. Тоест, $\forall \beta \in \{a, b\}^* : \beta \in L_1 \Rightarrow \beta \in L(\Gamma_1)$. Доказателството е по индукция по $|\beta|$.

База: Най-късият стринг в L_1 е a. Очевидно, a има деривация в Γ_1.

Индуктивна хипотеза: Допускаме, че импликацията е в сила за всеки стринг от L_1 с дължина $\leq n$.

Индуктивна стъпка: Разглеждаме произволен $\beta \in L_1$, такъв че $|\beta| = n + 1$. Въвеждаме следната дефиниция.

Определение 1. $\forall \alpha \in \{a, b\}^*,\ d(\alpha) \stackrel{def}{=} \#_a(\alpha) - \#_b(\alpha)$. □

Очевидно е, че използвайки функцията $d()$, L_1 може да бъде дефиниран алтернативно така:

$$L_1 = \{\alpha \in \{a, b\}^* \mid d(\alpha) > 0\}.$$

Разглеждаме следните три възможности за β, които не са взаимно изключващи се, но са изчерпателни.

1. $\beta = bx$ за някой стринг $x \in L_1$. Щом $\beta \in L_1$, то $d(\beta) > 0$. От това следва, че $d(x) > 1$. Ще покажем, че x е конкатенация от два непразни стринга y_1 и y_2:

   $$x = y_1 y_2,$$

   такива че $d(y_1) > 0$ и $d(y_2) > 0$. Да разгледаме всички префикси на x, започвайки с ϵ и завършвайки със самия x. Очевидно, $d(\epsilon) = 0$. Както вече установихме, $d(x) > 1$. Тъй като d се мени точно с единица нагоре или надолу за всеки следващ символ на x, когато сканираме x отляво надясно, то съществува префикс на x, за който е вярно, че разликата между броя на нулите и на единиците в него е точно 1. Нещо повече, този префикс не е празен и не съвпада с x. Дефинираме, че този префикс е y_1, а останалата част от x е y_2. Очевидно $d(y_1) = 1$. Но $d(x) > 1$, следователно $d(y_2) > 0$.

   Конструирахме търсените y_1 и y_2. Щом $d(y_1) > 0$, то $y_1 \in L_1$. Аналогично, $y_2 \in L_1$. От това, че y_1 е непразен, несъвпадащ с x, префикс на x следва, че $|y_1| \leq n$ и $|y_2| \leq n$. А от това следва, че индуктивната хипотеза е приложима за y_1 и y_2 и съгласно нея, в Γ_1 има деривации $S_1 \vDash y_1$ и $S_1 \vDash y_2$. Тогава за β има деривация:

   $$S_1 \vdash bS_1S_1 \vDash by_1S_1 \vDash by_1y_2$$

2. $\beta = xb$. Доказателството е аналогично на доказателството в предния случай. Лесно се вижда, че $d(x) > 1$ и оттам следва, че x е конкатенация от два стринга, всеки от които е от L_1 и има дължина $\leq n$. Деривацията в този случай е:

$$S_1 \vdash S_1 S_1 b \vDash \beta$$

3. $\beta = axa$. Ако β няма символи b, очевидно деривацията е:

$$S_1 \vdash aS_1 \vdash aaS_1 \vdash \ldots \vdash \underbrace{aa\ldots a}_{|\beta|-1 \text{ пъти}} S_1 \vdash \underbrace{aa\ldots a}_{|\beta| \text{ пъти}}$$

Да разгледаме подслучая, в който β съдържа b. Целта ни е да докажем, че съществуват префикс y и суфикс z на β, такива че $y \in L_1$, $z \in L_1$ и $\beta = ybz$. Докажем ли това, можем да използваме индуктивната хипотеза за y и z и да конструираме деривация на β, която започва с $S_1 \vdash S_1 b S_1$[‡]. Нека $t = \#_b(\beta)$. Нека u_i е префиксът на β вляво от (без да включва) i-тото отляво надясно b, за $1 \leq i \leq t$. Нека v_i е суфиксът на β вдясно от (без да включва) i-тото отляво надясно b $1 \leq i \leq t$. Примерно, ако $\beta = aaaababaabaaaa$, то $t = 3$, а $u_1, v_1, \ldots, u_3, v_3$ са:

$$\underbrace{aaaa}_{u_1} b \underbrace{abaabaaaa}_{v_1}$$

$$\underbrace{aaaaba}_{u_2} b \underbrace{aabaaaa}_{v_2}$$

$$\underbrace{aaaababaa}_{u_3} b \underbrace{aaaa}_{v_3}.$$

Забележете, че $d(u_1) > 0$, понеже u_1 се състои от едно или повече a-та. Също така, $d(v_t) > 0$.

Ако $d(u_t) > 0$, то може да положим $y = u_t$ и $z = v_t$; щом $d(u_t) > 0$ и $d(v_t) > 0$, то $u_t \in L_1$ и $v_t \in L_1$. Да допуснем, че $d(u_t) \leq 0$. Нека m е минималното число-индекс, такова че $d(u_m) \leq 0$. Такова m очевидно съществува. Нещо повече, $m \geq 2$, понеже, както отбелязахме, $d(u_1) > 0$. Ключовото наблюдение е, че

$$\forall i, 2 \leq i \leq t: \ d(u_i) \geq d(u_{i-1}) + 1 \tag{5}$$

[‡]Забележете, че твърдението, че има такива y и z, не е тривиално. Тези y и z се определят еднозначно от това, кой символ b, измежду всички b в β, е между тях. Примерно, би било грешка да кажем, че въпросното b е най-лявото b в β: тогава може декомпозицията спрямо него да няма желаните свойства; разгледайте $\beta = aaaabbb$.

понеже $\#_b(u_i) = \#_b(u_{i-1}) + 1$. От (5) и това, че $d(u_m) \leq 0$ следва, че $d(u_{m-1}) = 1$. Но тогава $d(v_{m-1}) > 0$, защото съгласно конструкцията ни, $\beta = u_{m-1} b v_{m-1}$.

Полагаме $y = u_{m-1}$ и $z = v_{m-1}$. Както вече казахме, с това доказателството е почти готово. Остава да забележим, че щом $d(y) > 0$, $d(z) > 0$, $|y| < |\beta|$ и $|z| < |\beta|$, то индуктивната хипотеза е приложима спрямо y и z и съществуват деривации $S_1 \models y$ и $S_1 \models z$, откъдето има следната деривация за β:

$$S_1 \vdash S_1 b S_1 \models y b S_1 \models y b z. \qquad \square$$

Задача 2. *Да се конструира контекстно свободна граматика* Γ *за езика*

$$L = \{\alpha \in \{a, b\} \,|\, \#_a(\alpha) = 2\#_b(\alpha)\}.$$

Решение: Нека $\Gamma = (N, \{a, b\}, S, P)$. Първо въвеждаме функция $d()$.

Определение 2. $\forall \alpha \in \{a, b\}^*,\ d(\alpha) \stackrel{def}{=} 2\#_b(\alpha) - \#_a(\alpha)$. $\square$

Имайки предвид Определение 2, можем да предефинираме L така:

$$L = \{\alpha \in \{a, b\}^* \,|\, d(\alpha) = 0\}.$$

Ако сканираме кой да е стринг от $\{a, b\}^*$ отляво надясно, то функцията $d()$ или нараства с 2, при прочит на b, или намалява с 1, при прочит на a.

Да дефинираме следните езици:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \{\alpha \in \{a, b\}^* \,|\, d(\alpha) = 1\}\\
L_2 &= \{\alpha \in \{a, b\}^* \,|\, d(\alpha) = -1\}\\
L_3 &= \{\alpha \in \{a, b\}^* \,|\, d(\alpha) = -2\}\\
L_4 &= \{\alpha \in \{a, b\}^* \,|\, d(\alpha) = 2\}
\end{aligned}$$

Ако дефинираме допълнително, че „балансиран стринг“ е такъв, в който броят на b-тата е равен на два пъти броя на a-тата, то нито един от L_1, L_2, L_3, L_4 не съдържа балансирани стрингове и освен това:

- на всеки стринг от L_1 му липсва едно a, за да стане балансиран,
- всеки стринг от L_2 има излишък от едно a, за да бъде балансиран,
- на всеки стринг от L_3 му липсва едно b, за да бъде балансиран; алтернативно казано, има излишък от две a-та,

- всеки стринг от L_4 има излишък от едно b, за да бъде балансиран; алтернативно казано, липсват му две a-та.

Идеята е всеки от тези пет езика да бъде изразен чрез някои от останалите четири, тоест да се намери взаимна рекурсия, като тази рекурсия има и необходимото гранично условие („спирачка“). След като постигнем това, на всеки от петте езика съпоставяме по един нетерминал и „превеждаме“ директно рекурсивните зависимости в продукции с тези нетерминали. А именно, конструираме $N = \{S, S_1, S_2, S_3, S_4\}$, като на L съпоставяме стартовия нетерминал S, а на L_i съпоставяме S_i, за $1 \leq i \leq 4$.

Забележете, че при КС граматики, всеки нетерминал съответства на някакъв език. Стартовият нетерминал очевидно съответства на езика на граматиката, но всеки друг нетерминал също така съответства на някакъв език (който език е нетривиален при условие, че въпросният нетерминал се среща в лявата страна на поне една продукция, което е нормалната ситуация; ако даден нетерминал не се среща в лявата страна на никоя продукция, то той е безсмислен). По отношение на дадена граматика, езикът, съответстващ на кой да е неин нетерминал A, е езикът, който е генериран от тази граматика, ако стартовият нетерминал е A.

Твърдим, че:

$$L = \epsilon \cup aL_1 \cup bL_3 \tag{6}$$

Това твърдение е очевидно, ако съобразим, че всеки непразен стринг в L започва или с a, или с b. От (6) имаме следните продукции в Γ:

$$S \rightarrow \epsilon \mid aS_1 \mid bS_3 \tag{7}$$

Твърдим, че:

$$L_1 = aL_4 \cup bL_2 \tag{8}$$

Това твърдение е очевидно, ако съобразим, че празният стринг не принадлежи на L_1, а всеки стринг $\alpha \in L_1$ започва или с a, или с b. В първия случай в останалата част на α има недостиг на две a-та, в смисъл че броят на a-тата в нея е равен на удвоения брой на b-тата минус две. Във втория случай в останалата част на α има излишък от едно a в смисъл, че броят на a-тата е равен на удвоения брой на b-тата плюс едно. От (8) имаме следните продукции в Γ:

$$S_1 \rightarrow aS_4 \mid bS_2 \tag{9}$$

Твърдим, че:

$$L_2 = aL \cup bL_2L_2L_2 \tag{10}$$

Това твърдение е очевидно, ако съобразим, че празният стринг не принадлежи на L_2, а всеки стринг $\alpha \in L_2$ започва или с a, или с b. В първия случай останалата част на α е балансирана. Във втория случай в останалата част на α има излишък от три a-та в смисъл, че броят на a-тата е равен на удвоения брой на b-тата плюс три. Всеки стринг с такъв излишък от три a-та може да се представи като конкатенация на три стринга от L_2. От (10) имаме следните продукции в Γ:

$$S_2 \rightarrow aS \mid bS_2S_2S_2 \tag{11}$$

Твърдим, че:

$$L_3 = L_2L_2 \tag{12}$$

За да се убедим, че е така, да разгледаме кой да е стринг $\alpha \in L_3$ и всички негови префикси, започвайки от ϵ и достигайки до самия α. Да разгледаме функцията $d()$ върху тези префикси: $d(\epsilon) = 0, \ldots, d(\alpha) = -2$. Както отбелязахме, при сканиране от ляво надясно, ако $d()$ намалява, тя намалява с единица. Следователно съществува префикс β' на α, такъв че $d(\beta') = -1$. Нещо повече, ако останалата част на α е β'', тоест $\alpha = \beta'\beta''$, то $d(\beta'') = -1$. От (12) имаме следната продукции в Γ:

$$S_3 \rightarrow S_2S_2 \tag{13}$$

Що се отнася до L_4, решението **<u>не е</u>** аналогично на решението за L_3, тъй като при сканиране отляво надясно функцията $d()$ когато нараства, нараства с две. Така че решението **<u>не е</u>** просто $L_4 = L_1L_1$: примерно, $b \in L_4$, но $b \notin L_1L_1$. За да изразим L_4 чрез други езици, да започнем с елементарното съображение, че празният стринг не принадлежи на L_4, а всеки стринг $\alpha \in L_4$ започва или с a, или с b. Във втория случай останалата част на α е балансирана, а в първия случай тя има недостиг от три a-та.

$$L_4 = aL' \cup bL, \tag{14}$$

където

$$L' = \{\alpha \in \{a, b\}^* \mid d(\alpha) = 3\}$$

Но езикът L' не е измежду петте вече въведени езика и следва да го изразим чрез някои от тях, за да не въвеждаме нетерминал и за него. Освен това, изразяването на L' **не е** просто $L' = L_1L_1L_1$: примерно, $bba \in L'$, но $bba \notin L_1L_1L_1$.

Да разгледаме кой да е стринг $\beta \in L'$ и всички негови префикси, започвайки от ϵ и достигайки до самия β. Да разгледаме функцията $d()$ върху тези префикси: $d(\epsilon) = 0, \ldots, d(\beta) = 3$. Ясно е, че β е конкатенация на два непразни стринга $\beta = \beta'\beta''$, за които поне едно от следните две твърдения е вярно:

- $d(\beta') = 1$ и $d(\beta'') = 2$,
- $d(\beta') = 2$ и $d(\beta'') = 1$.

Тогава

$$L' = L_1L_4 \cup L_4L_1 \tag{15}$$

От (14) и (15) имаме следните продукции в Γ:

$$S_4 \rightarrow aS_1S_4 \,|\, aS_4S_1 \,|\, bS \tag{16}$$

Окончателното решение се получава, когато комбинираме (7), (9), (11), (13) и (16):

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow \epsilon \,|\, aS_1 \,|\, bS_3 \\
S_1 &\rightarrow aS_4 \,|\, bS_2 \\
S_2 &\rightarrow aS \,|\, bS_2S_2S_2 \\
S_3 &\rightarrow S_2S_2 \\
S_4 &\rightarrow aS_1S_4 \,|\, aS_4S_1 \,|\, bS
\end{aligned}$$

□