Решение на една задача от областта на булевите функции

22 януари 2010 г.

Задача 1. *Нека* $f \in \mathcal{F}_2^n$. *Нека* $f \neq const$ *и* $f \vee f^* = const$. *Да се докаже, че* $f \notin M \cup S$.

Решение: Да допуснем, че $f \vee f^* = \widetilde{0}$. Тогава и f, и f^* имат стойност 0 върху всеки набор, следователно $f = \widetilde{0}$, което противоречи на условието, че $f \neq \text{const}$. Следователно,

$$f \vee f^* = \widetilde{1} \tag{1}$$

Очевидно е, че:

$$f \notin M \cup S \;\Leftrightarrow\; f \in \overline{M \cup S} \;\Leftrightarrow\; f \in \overline{M} \cap \overline{S} \;\Leftrightarrow\; f \in \overline{M} \text{ и } f \in \overline{S}$$

Първо ще докажем, че $f \notin S$. Да допуснем противното. Тогава $f = f^*$, тоест стойността на f и f^* върху всеки набор е една и съща. Имайки предвид (1) заключаваме, че и двете функции са константа единица; в частност, $f = \widetilde{1}$. Но това противоречи на условието, че $f \neq \text{const}$.

Сега ще докажем, че $f \notin M$. За целта първо ще докажем едно помощно твърдение.

Лема 1. $\forall n \in \mathbb{N}^+, \forall g \in \mathcal{F}_2^n : \; g \in M \Rightarrow g^* \in M$.

Доказателство: *Да разгледаме кои да е два набора* $\alpha, \beta \in J_2^n$, *такива че:*

$$\alpha \preccurlyeq \beta \tag{2}$$

От (2) тривиално следва, че:

$$\overline{\beta} \preccurlyeq \overline{\alpha} \tag{3}$$

По условие, g *е монотонна. Прилагайки определението за монотонност върху (3), получаваме:*

$$\mathsf{g}(\overline{\beta}) \le \mathsf{g}(\overline{\alpha}) \tag{4}$$

От (4) тривиално следва, че:

$$\overline{\mathsf{g}}(\overline{\alpha}) \le \overline{\mathsf{g}}(\overline{\beta}) \tag{5}$$

По определението на двойнствена функция:

$$\mathsf{g}^*(\alpha) = \overline{\mathsf{g}}\big(\overline{\alpha}\big) \tag{6}$$

$$\mathsf{g}^*(\beta) = \overline{\mathsf{g}}\big(\overline{\beta}\big) \tag{7}$$

От (5), (6) и (7) извеждаме:

$$\mathsf{g}^*(\alpha) \le \mathsf{g}^*(\beta) \tag{8}$$

От (2) и (8) следва, че $\mathsf{g}^* \in \mathsf{M}$. □

Допускаме, че $\mathsf{f} \in \mathsf{M}$. Правим второ допускане, че $\mathsf{f}(0, 0, \dots, 0) = 1$. Но ако f е монотонна и $\mathsf{f}(0, 0, \dots, 0) = 1$, то $\mathsf{f} = 1$ и върху всеки друг набор, тоест $\mathsf{f} = \widetilde{1}$. По условие, $\mathsf{f} \neq \mathrm{const}$. Следователно второто допускане е невярно и

$$\mathsf{f}(0, 0, \dots, 0) = 0 \tag{9}$$

От (1) и (9) следва, че $\mathsf{f}^*(0, 0, \dots 0) = 1$. Но съгласно Лема 1, $\mathsf{f}^* \in \mathsf{M}$. Щом f^* е монотонна и $\mathsf{f}^*(0, 0, \dots 0) = 1$, следва, че $\mathsf{f}^* = 1$ и върху всеки друг набор. Тоест, $\mathsf{f}^* = \widetilde{1}$. Но тогава $\mathsf{f} = \widetilde{0}$. Това противоречи на условието, че $\mathsf{f} \neq \mathrm{const}$. Следователно първото допускане е невярно. Доказахме, че $\mathsf{f} \notin \mathsf{M}$. □