Решения задачите от **Част II** на писмения изпит по ДМ, Информатика, 11.02.2010 г.

Задача 1. Даден е недетерминиран краен автомат $M = \big(\{1,2,3,4,5\}, \{a,b\}, 1, \delta, \{4\}\big)$, където δ е:

q	$\delta(q,a)$	$\delta(q,b)$
1	$\{1,2,3\}$	$\emptyset$
2	$\{2\}$	$\{4\}$
3	$\{4,5\}$	$\{3\}$
4	$\{4\}$	$\emptyset$
5	$\{4\}$	$\{5\}$

Да се конструира детерминиран краен автомат M_1, който е еквивалентен на M.

Решение: Нека $M_1 = \big(Q_1, \{a,b\}, q', \delta_1, F_1\big)$. Първо ще определим δ_1, използвайки правилата за детерминиране, и после ще включим в Q_1 тези и само тези състояния от 2^Q, които се окажат необходими. Въвеждайки нови състояния, ще ги преименуваме, използвайки римски цифри. Таблицата за δ_1 е:

q	$\delta_1(q,a)$	$\delta_1(q,b)$
$\{1\} = \mathbf{I}$	$\delta(1,a) = \{1,2,3\} = \mathbf{II}$	$\delta(1,b) = \emptyset = \mathbf{III}$
$\{1,2,3\} = \mathbf{II}$	$\delta(1,a) \cup \delta(2,a) \cup \delta(3,a) = \{1,2,3\} \cup \{2\} \cup \{4,5\} = \{1,2,3,4,5\} = \mathbf{IV}$	$\delta(1,b) \cup \delta(2,b) \cup \delta(3,b) = \emptyset \cup \{4\} \cup \{3\} = \{3,4\} = \mathbf{V}$
$\emptyset = \mathbf{III}$	$\emptyset = \mathbf{III}$	$\emptyset = \mathbf{III}$
$\{1,2,3,4,5\} = \mathbf{IV}$	$\delta(1,a) \cup \delta(2,a) \cup \delta(3,a) \cup \delta(4,a) \cup \delta(5,a) = \{1,2,3\} \cup \{2\} \cup \{4,5\} \cup \{4\} \cup \{4\} = \{1,2,3,4,5\} = \mathbf{IV}$	$\delta(1,b) \cup \delta(2,b) \cup \delta(3,b) \cup \delta(4,b) \cup \delta(5,b) = \emptyset \cup \{4\} \cup \{3\} \cup \emptyset \cup \{5\} = \{3,4,5\} = \mathbf{VI}$
$\{3,4\} = \mathbf{V}$	$\delta(3,a) \cup \delta(4,a) = \{4,5\} \cup \{4\} = \{4,5\} = \mathbf{VII}$	$\delta(3,b) \cup \delta(4,b) = \{3\} \cup \emptyset = \{3\} = \mathbf{VIII}$
$\{3,4,5\} = \mathbf{VI}$	$\delta(3,a) \cup \delta(4,a) \cup \delta(5,a) = \{4,5\} \cup \{4\} \cup \{4\} = \{4,5\} = \mathbf{VII}$	$\delta(3,b) \cup \delta(4,b) \cup \delta(5,b) = \{3\} \cup \emptyset \cup \{5\} = \{3,5\} = \mathbf{IX}$
$\{4,5\} = \mathbf{VII}$	$\delta(4,a) \cup \delta(5,a) = \{4\} \cup \{4\} = \{4\} = \mathbf{X}$	$\delta(4,b) \cup \delta(5,b) = \emptyset \cup \{5\} = \{5\} = \mathbf{XI}$
$\{3\} = \mathbf{VIII}$	$\delta(3,a) = \{4,5\} = \mathbf{VII}$	$\delta(3,b) = \{3\} = \mathbf{VIII}$
$\{3,5\} = \mathbf{IX}$	$\delta(3,a) \cup \delta(5,a) = \{4,5\} \cup \{4\} = \{4,5\} = \mathbf{VII}$	$\delta(3,b) \cup \delta(5,b) = \{3\} \cup \{5\} = \{3,5\} = \mathbf{IX}$
$\{4\} = \mathbf{X}$	$\delta(4,a) = \{4\} = \mathbf{X}$	$\delta(4,b) = \emptyset = \mathbf{III}$
$\{5\} = \mathbf{XI}$	$\delta(5,a) = \{4\} = \mathbf{X}$	$\delta(5,b) = \{5\} = \mathbf{XI}$

Съгласно правилата за детерминиране, $q' = \{1\} = \mathbf{I}$, а F_1 е множеството от всички състояния, съдържащи състояние 4 на M.

И така, $M_1 = \big(\{\mathbf{I}, \mathbf{II}, \ldots, \mathbf{XI}\}, \{a, b\}, \mathbf{I}, \delta_1, \{\mathbf{IV}, \mathbf{V}, \mathbf{VI}, \mathbf{VII}, \mathbf{X}\}\big)$, където δ_1 се определя от следната таблица:

q	$\delta_1(q, a)$	$\delta_1(q, b)$
I	**II**	**III**
II	**IV**	**V**
III	**III**	**III**
IV	**IV**	**VI**
V	**VII**	**VIII**
VI	**VII**	**IX**
VII	**X**	**XI**
VIII	**VII**	**VIII**
IX	**VII**	**IX**
X	**X**	**III**
XI	**X**	**XI**

□

Задача 2. Нека L_b е езикът над азбуката $\{0, 1\}$ от точно тези думи, всяка от които е валидно представяне на някое естествено число в двоична позиционна бройна система. За всяка дума $\alpha \in L_b$, с $n(\alpha)$ означаваме естественото число, чието представяне в двоична позиционна бройна система е α. Нека L е следният език над азбуката $\{0, 1\}$:

$$L = \{\alpha \in \{0,1\}^* \mid \alpha \in L_b \text{ и } n(\alpha) = 5k + 3, \text{ където } k \geq 0\}$$

Да се конструира детерминиран краен автомат, който разпознава L. Обосновете отговора си.

Решение: С $\mathbb{N}$ означаваме множеството на естествените числа (това включва и нулата). Нека за всяко $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$,

$$\mathbb{N}_i = \{x \in \mathbb{N} \mid x \equiv i \pmod 5\}$$
$$A_i = \{\alpha \in \{0,1\}^* \mid \alpha \in L_b \text{ и } n(\alpha) \in \mathbb{N}_i\}$$

Ясно е, че $L = A_3$.

Следните твърдения са очевидни:

$$x \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow 2x \in \mathbb{N}_0 \tag{1}$$
$$x \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow 2x+1 \in \mathbb{N}_1 \tag{2}$$
$$x \in \mathbb{N}_1 \Rightarrow 2x \in \mathbb{N}_2 \tag{3}$$
$$x \in \mathbb{N}_1 \Rightarrow 2x+1 \in \mathbb{N}_3 \tag{4}$$
$$x \in \mathbb{N}_2 \Rightarrow 2x \in \mathbb{N}_4 \tag{5}$$
$$x \in \mathbb{N}_2 \Rightarrow 2x+1 \in \mathbb{N}_0 \tag{6}$$
$$x \in \mathbb{N}_3 \Rightarrow 2x \in \mathbb{N}_1 \tag{7}$$
$$x \in \mathbb{N}_3 \Rightarrow 2x+1 \in \mathbb{N}_2 \tag{8}$$
$$x \in \mathbb{N}_4 \Rightarrow 2x \in \mathbb{N}_3 \tag{9}$$
$$x \in \mathbb{N}_4 \Rightarrow 2x+1 \in \mathbb{N}_4 \tag{10}$$

Имайки предвид, че

$$\forall \alpha \in \{0,1\}^+ :\ n(\alpha 0) = 2n(\alpha) \ \text{ и } \ n(\alpha 1) = 2n(\alpha)+1$$

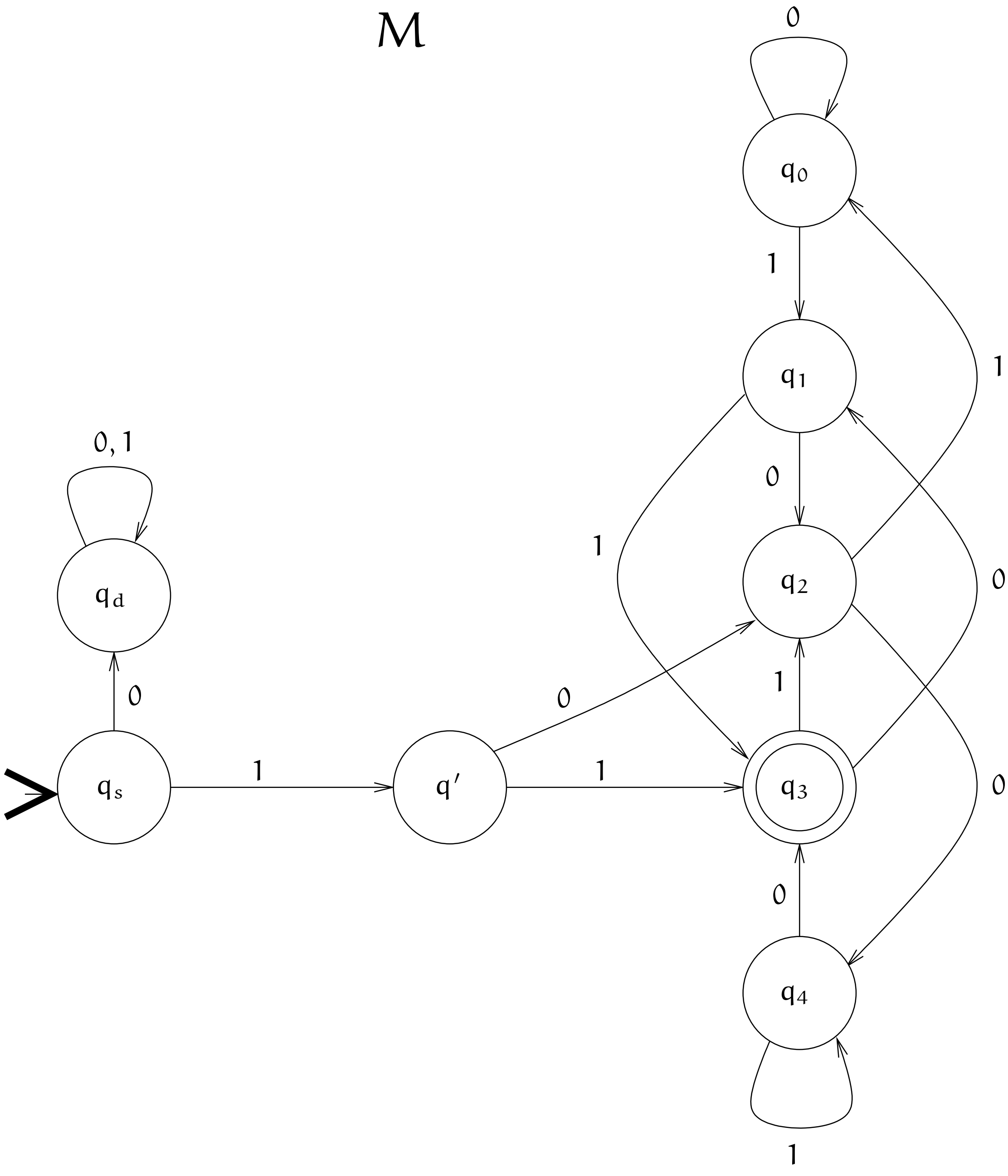
всяко от следните твърдения:

$$\alpha \in A_0 \Rightarrow \alpha 0 \in A_0 \tag{11}$$
$$\alpha \in A_0 \Rightarrow \alpha 1 \in A_1 \tag{12}$$
$$\alpha \in A_1 \Rightarrow \alpha 0 \in A_2 \tag{13}$$
$$\alpha \in A_1 \Rightarrow \alpha 1 \in A_3 \tag{14}$$
$$\alpha \in A_2 \Rightarrow \alpha 0 \in A_4 \tag{15}$$
$$\alpha \in A_2 \Rightarrow \alpha 1 \in A_1 \tag{16}$$
$$\alpha \in A_3 \Rightarrow \alpha 0 \in A_2 \tag{17}$$
$$\alpha \in A_3 \Rightarrow \alpha 1 \in A_0 \tag{18}$$
$$\alpha \in A_4 \Rightarrow \alpha 0 \in A_3 \tag{19}$$
$$\alpha \in A_4 \Rightarrow \alpha 1 \in A_4 \tag{20}$$

следва тривиално, примерно (11) следва от (1), (12) следва от (2), ..., (20) следва от (10).

Автоматът M, показан на Фигура 1, е такъв, че $L(M) = L$. Всяко от състоянията q_i отговаря точно на A_i, за $i \in \{0,1,2,3,4\}$, и всеки от десетте прехода $q_i \to q_j$, където $i, j \in \{0,1,2,3,4\}$, се обосновава чрез точно едно от твърдения (11), (12), ..., (20). Примерно, $q_0 \xrightarrow{0} q_0$ се обосновава с (11), $q_1 \xrightarrow{1} q_3$ се обосновава с (14), и т. н.

q_3 е финално (приемащо) състояние, понеже $A_3 = L$. Освен това, водещи нули не са разрешени, поради което от стартовото състояние q_s преходът с нула е към мъртвото състояние q_d. Думите 11 и 10 са валидни префикси за L, като $11 \in A_3$, а $10 \in A_2$. Поради това имаме преходи $q_s \xrightarrow{1} q'$, $q' \xrightarrow{0} q_2$ и $q' \xrightarrow{1} q_3$. $\square$



Фиг. 1: Решението на **Задача 2**.

Задача 3. Нека f е следната булевата функция на три променливи:

$$f(x, y, z) = ((x \oplus y) \to (y \oplus z)) \wedge (\overline{(z \to (x \equiv z)) \oplus 1})$$

а) Попълнете таблицата на функцията.

Решение: Формулата на функцията може да се опрости с еквивалентни преобразувания до:

$$f(x, y, z) = ((x \oplus y) \to (y \oplus z)) \wedge (z \to (x \equiv z))$$

Таблицата, включително междинните етапи на извеждането, е:

x	y	z	$x \oplus y$	$y \oplus z$	$(x \oplus y) \to (y \oplus z)$	$x \equiv z$	$z \to (x \equiv z)$	f
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1

б) Напишете СвДНФ (съвършената дизюнктивна нормална форма) на f.

Решение: $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{x}\,y\,\bar{z} \vee x\,\bar{y}\,z \vee x\,y\,\bar{z} \vee x\,y\,z$

в) Напишете полинома на Жегалкин на f.

Решение: От СвДНФ получаваме

$$\begin{aligned}
&(1 + x)(1 + y)(1 + z) + (1 + x)y(1 + z) + x(1 + y)z + xy(1 + z) + xyz = \\
&1 + x + y + z + xy + xz + yz + xyz + y + xy + yz + xyz + xz + xyz + xy + xyz + xyz = \\
&1 + x + z + xy + xyz
\end{aligned}$$

д) Изследвайте f за принадлежност към всяко от множествата T_0, T_1, S, M, L.

Решение:

- $f \notin T_0$, защото $f(0, 0, 0) = 1$.
- $f \in T_1$, защото $f(1, 1, 1) = 1$.
- $f \notin S$, защото $f(0, 0, 0) \neq \bar{f}(1, 1, 1)$.
- $f \notin M$, защото $f(0, 0, 0) \not\leq f(0, 0, 1)$.
- $f \notin L$, защото ПЖ съдържа членове xy и xyz.

$\square$