Домашно № 1 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Компютърни науки", I курс, II поток, зимен семестър на 2017/2018 уч. г. в СУ, ФМИ

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	1	2	3	4	Общо
получени точки					
максимум точки	*30*	*20*	*30*	*20*	*100*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

Задача 1. Постройте безкрайно множество, всички елементи на което са негови строги подмножества. Първо опишете идеята неформално. После дайте строго (формално) описание, несъдържащо многоточия и фрази от рода на "аналогично", "и тъй нататък". Докажете строго, че построеното множество има желаните свойства.

Задача 2. Функция $f : S \rightarrow S$ (със съвпадащи дефиниционно и функционално множество) се нарича инволюция точно когато удовлетворява равенството $f\big(f(x)\big) = x$ за всяко $x \in S$. Един елемент $x_0 \in S$ се нарича неподвижна точка за функцията f точно когато $f\left(x_0\right) = x_0$. Докажете, че:

а) всяка инволюция е биекция; **(3 точки)**

б) ако f е инволюция, то $f^{-1} = f$; **(3 точки)**

в) ако функция от вида $f : S \rightarrow S$ съвпада със своята обратна функция f^{-1}, то f е инволюция; **(3 точки)**

г) ако S е крайно множество и $f : S \rightarrow S$ е инволюция, то броят на елементите на S и броят на неподвижните точки на f имат една и съща четност, т.е. и двете числа са четни или и двете са нечетни; **(3 точки)**

д) ако S е крайно множество, а $f_1 : S \rightarrow S$ и $f_2 : S \rightarrow S$ са две инволюции, то броят на неподвижните точки на f_1 и броят на неподвижните точки на f_2 са числа с еднаква четност; **(3 точки)**

е) уравнението $x^{2017} - 517x^{289} + 24x = 0$ има нечетен брой реални корени. **(5 точки)**

В последната подточка се иска решение чрез инволюция. (Не се приемат други решения!) Първо опишете идеята неформално (с две-три изречения). После дайте формално описание: дефинирайте множеството S и функцията f; докажете, че f е от вида $f : S \rightarrow S$; докажете, че f е инволюция; намерете броя на неподвижните точки на f; позовете се на твърдението от подточка "г".

Задача 3. Съществува ли множество от точки в тримерното пространство, което има:

а) поне една, но не повече от краен брой общи точки с всяка равнина? **(15 точки)**

б) изброимо безкрайно много общи точки с всяка равнина? **(15 точки)**

Упътване: Ако поне едно от числата A, B и C е различно от нула, то множеството от точки $\left\{(x\,,\,y\,,\,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; Ax + By + Cz + D = 0\right\}$ е равнина. Всяка равнина има уравнение от този вид.

Задача 4. Постройте строга линейна наредба в множеството $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Идеята на решението е да строим множеството стъпка по стъпка. Тъй като празното множество е подмножество на всяко множество, удобно е да го вземем за елемент на нашето множество. След като вече сме взели $\varnothing$ в качеството на елемент, $\{\varnothing\}$ също ще бъде подмножество на нашето множество, затова можем да го добавим като следващ елемент и т.н. Тоест търсеното безкрайно множество ще изглежда така:

$$M = \Big\{ \varnothing\,,\ \{\varnothing\}\,,\ \{\{\varnothing\}\}\,,\ \{\{\{\varnothing\}\}\}\,,\ \dots \Big\}.$$

Формално описание:

Щом имаме безкрайна редица от еднотипни стъпки, удобно е да използваме принципа на математическата индукция. Той служи не само за доказване, но и за определяне.

С помощта на следната *индуктивна дефиниция* определяме една безкрайна редица от множества.

База: Полагаме $M_1 = \{\varnothing\}$.

Индуктивна стъпка: За всяко цяло положително число n полагаме $M_{n+1} = \{M_n\}$.

Продължаваме с неиндуктивна дефиниция: полагаме

$$M = \bigcup_n M_n$$

(където индексът n пробягва множеството на целите положителни числа).

По такъв начин търсеното множество M е определено напълно строго (формално). Остава да докажем, че то има желаните свойства.

Доказателство: Нека $X \in M$. Трябва да докажем, че $X \subset M$. От $X \in M = \bigcup\limits_n M_n$ следва, че $X \in M_n$ за някое цяло положително n.

Първи случай: $n = 1$. Тогава $X \in M_1$. От базата на индуктивната дефиниция знаем, че $M_1 = \{\varnothing\}$. Следователно $X = \varnothing$. Понеже празното множество е подмножество на всяко множество, то $X \subseteq M$. Включването е строго: $X \subset M$, защото множеството M е непразно (негов елемент е поне празното множество; това следва от базата на индуктивната дефиниция).

Втори случай: $n > 1$. Тогава $X \in M_n$. От индуктивната стъпка на дефиницията имаме $M_n = \{M_{n-1}\}$. Следователно $X = M_{n-1}$, което е подмножество на M като един от членовете на обединението. Включването е строго, защото M има поне два елемента: $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$, докато M_{n-1} има само един елемент (той е M_{n-2}, ако $n > 2$, и $\varnothing$, ако $n = 2$).

Трябва да докажем още едно свойство на множеството M — че то е безкрайно. Това следва от факта, че M е обединение на безброй много множества, които са непразни и две по две нямат общи елементи. Че членовете на обединението са непразни множества, е ясно от индуктивната дефиниция: всяко от тях има точно един елемент. А две по две нямат общи елементи, защото, ако допуснем противното — че някои от тях имат общи елементи, — ще излезе, че те съвпадат. (Множествата M_n имат по един елемент, поради което не могат да се припокриват частично: те или съвпадат, или не се пресичат.) Допускането води до противоречие със следното твърдение: членовете на обединението са две по две различни множества, тоест

$$M_n \neq M_p \text{ за всяко цяло } n > 1 \text{ и за всяко цяло } p > n.$$

Това твърдение може да се докаже с индукция по n.

База: $n = 1$. Да допуснем противното — че $M_1 = M_p$ за някое цяло $p > 1$. Понеже $M_1 = \{\varnothing\}$ и $M_p = \{M_{p-1}\}$, то равенството $M_1 = M_p$ се превръща във $\{\varnothing\} = \{M_{p-1}\}$, т.е. $M_{p-1} = \varnothing$, което противоречи на факта, че множествата са непразни.

Индуктивна стъпка: $n > 1$. Нека $M_{n-1} \neq M_q$ за всяко цяло $q > n-1$. Ще докажем, че $M_n \neq M_p$ за всяко цяло $p > n$. Допускаме противното: $M_n = M_p$ за някое цяло $p > n$, Понеже $M_n = \{M_{n-1}\}$ и $M_p = \{M_{p-1}\}$, то равенството $M_n = M_p$ води до $\{M_{n-1}\} = \{M_{p-1}\}$, т.е. $M_{n-1} = M_{p-1}$ (и $p-1 > n-1$, защото $p > n$) — противоречие с индуктивното предположение.

Задача 2.

а) Нека функцията $f : S \to S$ е инволюция. Ще докажем, че f е биекция.

Първо, нека $f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right)$. Тогава $f\left(f\left(x_1\right)\right) = f\left(f\left(x_2\right)\right)$. Понеже f е инволюция, то лявата и дясната страна са съответно равни на x_1 и x_2. Следователно $x_1 = x_2$. Доказахме, че ако $f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right)$, то $x_1 = x_2$. Значи, f е инекция.

Второ, ще докажем, че функцията f е сюрекция, т.е. за всяко $y \in S$ съществува $x \in S$, за което $f(x) = y$. Такова x е елементът $f(y)$, защото, ако $x = f(y)$, то $f(x) = f(f(y)) = y$.

Щом функцията f е едновременно инекция и сюрекция, то тя е биекция.

б) Нека $x = f^{-1}(y)$ е обратната функция на f. По определение $y = f(x)$. Следователно $f(y) = f(f(x)) = x = f^{-1}(y)$, тоест $f(y) = f^{-1}(y)$ за $\forall y \in S$. Значи, f и f^{-1} съвпадат.

в) Ако f и f^{-1} съвпадат, то $f(f(x)) = f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ за $\forall x \in S$, като последното равенство е вярно по определение. А щом $f(f(x)) = x$ за $\forall x \in S$, то f е инволюция.

г) Нека f има m неподвижни точки $x \in S$ — такива, за които $f(x) = x$. Останалите елементи на множеството S се разделят на n двойки $\left\{x\,,\,y\right\}$, като $x \neq y = f(x)$. Елементите x и y си съответстват взаимно: щом $y = f(x)$, то $f(y) = f(f(x)) = x$. Тоест инволюцията f разделя множеството S на n двойки и m единични елемента. Следователно $|S| = m + 2n$. Понеже числото $2n$ е четно, то $|S|$ и m са с еднаква четност.

д) От "г" следва, че броят на неподвижните точки на f_1 и броят на неподвижните точки на f_2 са числа с еднаква четност — четността на $|S|$.

е) Числото $x = 0$ е корен на уравнението $x^{2017} - 517x^{289} + 24x = 0$. При това, ако уравнението има корен $x \neq 0$, то и числото $-x$ е негов корен, защото $(-x)^{2017} - 517(-x)^{289} + 24(-x) = -x^{2017} + 517x^{289} - 24x = -\left(x^{2017} - 517x^{289} + 24x\right) = -0 = 0$. С други думи, всички ненулеви корени на уравнението (ако има такива) се разделят на двойки $\left\{x\,,\,-x\right\}$. Само коренът $x = 0$ не участва в такава двойка (защото $-0 = 0$). Ако n е броят на двойките, то броят на корените е $2n + 1$, което е нечетно число.

Формално описание на решението с помощта на инволюция:

Нека S е множеството от реалните корени на уравнението. Лесно се проверява, че $0 \in S$. Уравнение от степен 2017 има не повече от 2017 реални корена, тоест множеството S е крайно. Разглеждаме функцията $f(x) = -x$ с дефиниционно множество S. Щом уравнението съдържа степени на x с еднаква четност на показателите, то за всеки корен x числото $-x$ също е корен. Иначе казано, ако $x \in S$, то и $f(x) = -x \in S$. Следователно функцията f е от вида $f : S \to S$. Тя е инволюция, защото $f\big(f(x)\big) = f(-x) = -(-x) = x$, тоест $f\big(f(x)\big) = x$ за всяко $x \in S$. За да намерим неподвижните точки на f, решаваме уравнението $f(x) = x$:

$$f(x) = x \iff -x = x \iff 2x = 0 \iff x = 0.$$

Числото $x = 0$ е допустима стойност за f, защото $0 \in S$. Инволюцията f има нечетен брой неподвижни точки — само една: числото $x = 0$. Следователно множеството S има нечетен брой елементи, тоест уравнението $x^{2017} - 517x^{289} + 24x = 0$ има нечетен брой реални корени.

Извод: Инволюциите са мощно средство за установяване на четност и нечетност.

Задача 3.

а) Съществува множество от точки в тримерното пространство, имащо поне една, но не повече от краен брой общи точки с всяка равнина. Такова е например множеството

$$M \;=\; \Big\{ \, \big(\, t^5 \,,\; t^3 \,,\; t \,\big) \;\Big|\; t \in \mathbb{R} \,\Big\}.$$

Доказателство: Да вземем произволна равнина α. Тя има уравнение

$$\alpha: \quad Ax + By + Cz + D = 0,$$

където поне един от коефициентите A, B и C е различен от нула. В равнината α лежат онези точки от множеството M, чийто параметър t удовлетворява уравнението

$$M \cap \alpha: \quad At^5 + Bt^3 + Ct + D = 0.$$

Остава да докажем, че това уравнение има поне един, но най-много краен брой реални корени t, каквито и да бъдат реалните параметри A, B, C и D (стига поне едно от числата A, B и C да е различно от нула).

Тъй като степента на уравнението $At^5 + Bt^3 + Ct + D = 0$ не надвишава пет, то има не повече от пет реални корена, т.е. реалните му корени са краен брой. (Уравнението би могло да има безкраен брой реални корени единствено при $A = B = C = D = 0$, което представлява недопустима комбинация от стойности на параметрите.)

От друга страна, който и от коефициентите A, B и C да е различен от нула, уравнението е от нечетна степен. А всяко уравнение от нечетна степен има поне един реален корен, защото лявата страна си сменя знака поне веднъж. Причината е, че когато t е достатъчно голямо по абсолютна стойност, определящ за стойността на полинома е старшият член. Така например, ако $A \neq 0$, то при $t \to +\infty$ полиномът има знака на A, а при $t \to -\infty$ има знака на $-A$. Ако $A = 0$, но $B \neq 0$, полиномът има съответно знака на B и на $-B$. Ако $A = B = 0$, но $C \neq 0$, полиномът има съответно знака на C и на $-C$.

И така, уравнението $At^5 + Bt^3 + Ct + D = 0$ има поне един реален корен, но не повече от краен брой, което трябваше да се докаже.

б) Разглеждаме семейството от множества

$$M_k \;=\; \Big\{ \, \big(\, t^5,\; t^3,\; t + k \,\big) \;\Big|\; t \in \mathbb{R} \,\Big\}, \quad k \;=\; 0,\; 1,\; 2,\; 3\,\ldots$$

Тяхното обединение

$$L \;=\; \bigcup_{k\,\geq\,0} M_k$$

има изброимо безкрайно сечение с всяка равнина.

За всяко от множествата M_k се доказва (както по-горе), че има поне една, но не повече от краен брой общи точки с всяка равнина. С други думи, уравнението

$$M_k \cap \alpha: \quad At^5 + Bt^3 + C\big(t + k\big) + D = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad At^5 + Bt^3 + Ct + (Ck + D) = 0$$

има поне един, но не повече от краен брой реални корени t за всяко цяло $k \geq 0$ и за всички реални A, B, C и D, където поне един от коефициентите A, B и C е различен от нула. Това следва от факта, че уравнението е от нечетна степен, не по-висока от пета.

Нека α е произволна равнина. Тъй като тя има не повече от пет общи точки с всяко от множествата M_k, то следва, че α има изброимо много общи точки с тяхното обединение L. Наистина, сечението $L \cap \alpha$ е изброимо, защото елементите му могат да се наредят в редица: първо елементите на $M_0 \cap \alpha$ (те са краен брой — най-много пет), след това елементите на $M_1 \cap \alpha$, на $M_2 \cap \alpha$, на $M_3 \cap \alpha$ (също краен брой) и т.н.

От друга страна, равнината α има безброй много общи точки с L, защото:
— има поне една обща точка с всяко от множествата M_k ;
— множествата M_k са безброй много (тъй като $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$);
— общите точки на равнината α с всяко множество M_k са различни от общите ѝ точки с другите множества от семейството.

Последното твърдение следва от това, че никои две множества от разглежданото семейство нямат общи точки, тоест $M_k \cap M_p = \varnothing$ при $k \neq p$.

Да допуснем противното: че при $k \neq p$ множествата M_k и M_p имат обща точка. Тогава

$$\left(t^5 , t^3 , t+k\right) = \left(u^5 , u^3 , u+p\right) \quad \text{за някои реални числа } u \text{ и } t.$$

Тоест

$$\left|\begin{array}{l} t^5 = u^5 \\ t^3 = u^3 \\ t+k = p+u \end{array}\right\} \iff \left|\begin{array}{l} t = u \\ t+k = p+u \end{array}\right\} \iff \left|\begin{array}{l} t = u \\ k = p, \end{array}\right.$$

което противоречи на неравенството $k \neq p$.

Задача 4. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ е множеството на всички функции от вида $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, т.е. множеството на всички безкрайни редици от естествени числа. Най-лесно е да ги наредим по азбучен ред (т. нар. лексикографска наредба). Нека $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ са две различни безкрайни редици от естествени числа. Понеже $a \neq b$, следва, че множеството $X = \left\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq b_n\right\}$ е непразно подмножество на $\mathbb{N}$. Едно следствие от принципа на математическата индукция е, че всяко непразно подмножество на $\mathbb{N}$ има най-малък елемент. Нека k е най-малкото число в X, тоест индексът на първата позиция, в която двете безкрайни редици a и b се различават. Щом $a_k \neq b_k$, то или $a_k < b_k$, или $b_k < a_k$. Ако $a_k < b_k$, приемаме по определение, че $a \prec b$. Обратно: ако $b_k < a_k$, приемаме, че $b \prec a$. Релацията $\prec$ е строга линейна наредба в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Доказателството се състои в проверка на свойствата на релацията:

1) Антирефлексивност: $\forall a \left(a \not\prec a\right)$, т.е. никоя редица не предхожда себе си. Това свойство е изпълнено по определение: дефинирахме $a \prec b$ или $b \prec a$ само за различни редици a и b.

2) Силна антисиметричност: $\forall a, \forall b \left(a \neq b \;\; \longrightarrow \;\; a \prec b \bigoplus b \prec a\right)$, тоест от всеки две различни редици точно едната предхожда другата. И това свойство следва непосредствено от определението: ако k е индексът на първата позиция, в която се различават редиците a и b, то е изпълнено точно едно от неравенствата $a_k < b_k$ и $b_k < a_k$.

3) Транзитивност: $\forall a, \forall b, \forall c \left(a \prec b \bigwedge b \prec c \;\; \longrightarrow \;\; a \prec c\right)$.

Доказателство: Нека k е най-малкият индекс, в който се различават редиците a и b, а пък p е най-малкият индекс, в който се различават редиците b и c. От минималността следва, че $a_n = b_n$ за всяко естествено $n < k$ и $b_n = c_n$ за всяко естествено $n < p$. Освен това, тъй като $a \prec b$ и $b \prec c$, то $a_k < b_k$ и $b_p < c_p$.

Без ограничение, $k \leq p$. Щом $a_n = b_n$ и $b_n = c_n$, то $a_n = c_n$ за всяко естествено $n < k$. Тоест k е най-малкият индекс, в който се различават редиците a и c. От $a_k < b_k$ и $b_k \leq c_k$ следва, че $a_k < c_k$. Ето защо $a \prec c$.