

ДОМАШНО № 2 ПО ДИСЦИПЛИНАТА “ДИСКРЕТНИ СТРУКТУРИ”
ЗА СПЕЦИАЛНОСТ “КОМПЮТЪРНИ НАУКИ”, I КУРС, II ПОТОК,
ЗИМЕН СЕМЕСТЪР НА 2017/2018 УЧ. Г. В СУ, ФМИ

Име: Факултетен № Група:

Задача	1	2	3	4	ОБЩО
получени точки					
максимум точки	30	10	30	30	100

Забележка 1: Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.

Забележка 2: Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!

Задача 1. Даден е изпъкнал многоъгълник с n страни, $n \geq 4$, в който никои три диагонала не минават през една и съща вътрешна точка. Пресметнете:

- а) броя на диагоналите; (5 точки)
б) броя на пресечните точки на диагоналите; (10 точки)
в) броя на областите, на които многоъгълникът се разделя от диагоналите си. (15 точки)

Забележка: Под “диагонали” се разбират отсечките, а не правите. С други думи, в задачата се разглеждат само пресечните точки *вътре* в многоъгълника.

Задача 2. В пощата си имате десет писма, които трябва да прочетете и да им отговорите. По колко начина можете да подредите тези двайсет действия? Единственото ограничение е, че не можете да отговорите на писмо, преди да сте го прочели.

Задача 3. Колко са пермутациите $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ на числата $1, 2, 3, \dots, n$ без повторение, такива, че $a_k - a_{k-1} \neq 1$ за всяко $k \in \{2, 3, \dots, n\}$?

Изисква се точен отговор. Опростете отговора максимално! Ако и след опростяването отговорът все още има сложен вид, използвайте приближения за допълнително опростяване.

Задача 4. Докажете комбинаторното твърдение

$$\binom{2}{2} \binom{n}{2} + \binom{3}{2} \binom{n-1}{2} + \binom{4}{2} \binom{n-2}{2} + \dots + \binom{n}{2} \binom{2}{2} = \binom{n+3}{5}$$

по три различни начина: с индукция, с двукратно броене и с биномната формула на Нютон.

(Всеки от тези начини носи по 10 точки.)

Забележка: Може да има и други начини да се докаже твърдението.

РЕШЕНИЯ

Задача 1.

а) Отсечките с краища измежду върховете на n -ъгълника могат да бъдат разглеждани като ненаредени двойки от различни върхове, тоест *комбинации без повторение* на n елемента от втори клас. Броят им е равен на $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$, като n от тях са страни на многоъгълника, а другите $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$ са диагонали.

Отговор: Всеки изпъкнал n -ъгълник има $\frac{n(n-3)}{2}$ диагонала.

б) На всяка пресечна точка X на диагонали съответства множество от четири различни върха на многоъгълника — краищата на диагоналите, пресичащи се в X . Обратно, всяко множество от четири върха на многоъгълника определя единствена пресечна точка на диагонали. По-конкретно, ако A, B, C и D са четири различни върха, не непременно последователни, но задължително в една посока на обикаляне на контура (например срещу часовника), то те определят единствена пресечна точка във вътрешността на многоъгълника: $AC \cap BD$. Дори AB, BC, CD и DA да са диагонали, а не страни, все пак другите две пресечни точки $AB \cap CD$ и $AD \cap BC$ лежат извън многоъгълника, защото той е изпъкнал.

И така, има взаимноеднозначно съответствие между пресечните точки на диагоналите и четириелементните множества от върхове на многоъгълника. Тези множества представляват ненаредени четворки от (различни) върхове, тоест *комбинации без повторение* на n елемента от четвърти клас, от което следва, че техният брой е равен на $C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$. Това число е същевременно броят на пресечните точки на диагоналите.

в) Чертаем диагоналите един по един и за всеки от тях проследяваме движението на молива от първия до втория връх. (Няма значение кой от двата върха ще изберем за първи.)

Отначало, когато още не е начертан нито един диагонал, вътрешността на многоъгълника представлява една (неразделена) област. Когато чертаем някой диагонал, всеки път, когато той пресече друг (вече начертан) диагонал, се появява една нова област и една нова пресечна точка. (Пресечната точка е нова всеки път, защото по условие никои три диагонала не минават през една и съща вътрешна точка.) Следователно, за да пресметнем броя на областите, трябва към първоначалната единица да добавим броя на пресечните точки на диагоналите, изчислен в подточка “б”.

Това не е достатъчно. При чертане на последната част от диагонал, когато моливът стигне до втория (крайния) връх, се получава още една област, но не и нова (вътрешна) пресечна точка. За да бъде сметката правилна, трябва към броя на областите да прибавим по една единица за всеки диагонал, а общо — броя на диагоналите, пресметнат в подточка “а”.

Окончателно, всеки изпъкнал n -ъгълник се разделя от диагоналите си на общо $1 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + \frac{n(n-3)}{2} = \frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 42n + 24}{24}$ области.

П р о в е р к а: Ако заместим $n = 4$ или $n = 5$, ще получим съответно 4 и 11 области. Наистина, всеки изпъкнал четириъгълник се разделя от диагоналите си на четири триъгълника. Диагоналите на всеки изпъкнал петоъгълник го делят на 11 части — един малък петоъгълник в центъра на фигурата; пет триъгълника, съдържащи по една страна на малкия петоъгълник (това са лъчите на звездата); още пет триъгълника, всеки от които съдържа по една страна на големия петоъгълник.

Задача 2. Номерираме писмата с числата от 1 до 10, например в реда, в който те се намират в пощенската кутия. Всяка подредба на двайсетте действия може да бъде представена чрез редица от двадесет елемента — две единици, две двойки, две тройки, ..., две десетки. Първото число k значи прочитане на писмо № k , а второто число k — отговаряне на писмото.

Броят на възможните подредби на двайсетте действия е равен на броя на редиците, съставени от две единици, две двойки, две тройки, ..., две деветки, две десетки. Тези редици се различават само по реда на елементите си, затова редиците са *пермутации със повторение*, понеже между техните елементи има равни. Според известната формула от комбинаториката броят на редиците е равен на

$$\widetilde{P}_{20}^{2; 2; \dots; 2} = \frac{20!}{(2!)^{10}} = 2\,375\,880\,867\,360\,000.$$

Отговор: Двайсетте действия могат да се подредят по 2 375 880 867 360 000 начина.

Задача 2 може да се реши и по друг начин. Номерираме позициите на всички действия с числата от 1 до 20. За позициите на двете действия с писмо № 1 има C_{20}^2 възможности. Вариантите за избор са *комбинации без повторение*, защото:

- 1) редът на двете позиции няма значение (дали ще изберем например седмата и третата, или ще изберем третата и седмата позиция, няма разлика: и в двата случая третото действие ще бъде прочитане на първото писмо, а седмото действие ще бъде отговаряне на писмото);
- 2) двете действия (прочитането и отговарянето) задължително са на различни позиции.

Аналогично, за позициите на двете действия с второто писмо има C_{18}^2 възможности, за третото писмо възможностите са C_{16}^2 и т.н. По правилото за умножение общият брой е

$$C_{20}^2 \cdot C_{18}^2 \cdot C_{16}^2 \cdots C_2^2 = \frac{20!}{2!18!} \cdot \frac{18!}{2!16!} \cdot \frac{16!}{2!14!} \cdots \frac{2!}{2!0!} = \frac{20!}{(2!)^{10}} = 2\,375\,880\,867\,360\,000.$$

Задача 3. Всички пермутации без повторение на числата от 1 до n са $P_n = n!$ на брой. От тях трябва да извадим тези, които нарушават изискването от условието на задачата.

Нека A_i е множеството на пермутациите без повторение на числата от 1 до n , в които два последователни члена са равни на i и $i + 1$ в този ред. Индексът i се мени от 1 до $n - 1$ вкл. $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}$ е множеството на пермутациите, нарушаващи изискването на задачата. Техният брой може да бъде намерен с помощта на принципа за включване и изключване:

$$\left| A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1} \right| = \sum_i |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^n \left| A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \right|.$$

В първата сума $|A_i|$ е броят на пермутациите без повторение на числата от 1 до n , съдържащи два последователни члена, равни на i и $i + 1$ (в този ред). Разглеждаме двата члена като един пакет, който се размества сред останалите $n - 2$ числа. Тези размествания са пермутации без повторение на $n - 1$ елемента (непакетираните $n - 2$ числа плюс пакета). Броят на тези пермутации е равен на $P_{n-1} = (n - 1)! = |A_i|$. Следователно

$$\sum_i |A_i| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_{n-1}| = (n - 1)!(n - 1) = (n - 1)! \binom{n - 1}{1}.$$

Събираемите $|A_i \cap A_j|$ на втората сума са от два вида. В първия вид $j > i + 1$. Тогава $A_i \cap A_j$ е множеството на пермутациите без повторение на числата от 1 до n , съдържащи два последователни члена, равни на i и $i + 1$ (в този ред), и още два последователни члена, равни на j и $j + 1$ (в този ред). Двете двойки членове са два пакета, които се разместват сред другите $n - 4$ числа. Тези размествания са пермутации без повторение на $n - 2$ елемента (непакетираните $n - 4$ числа плюс двата пакета) и броят им е $P_{n-2} = (n - 2)! = |A_i \cap A_j|$.

Вторият вид събираеми $|A_i \cap A_j|$ са тези, за които $j = i + 1$. Тогава $A_i \cap A_j = A_i \cap A_{i+1}$ е множеството на пермутациите без повторение на числата от 1 до n , които съдържат три последователни члена, равни на i , $i + 1$ и $i + 2$ (в този ред). Трите члена образуват пакет, който се размества сред другите $n - 3$ числа. Тези размествания са пермутации без повторение на $n - 2$ елемента (непакетираните $n - 3$ числа плюс пакета). Броят на тези пермутации е равен на $P_{n-2} = (n - 2)! = |A_i \cap A_j|$.

Стигаме до извода, че всички събираеми $|A_i \cap A_j|$ на втората сума са равни на $(n - 2)!$, независимо от кой вид са. Броят на събираемите е точно броят на наредените двойки (i, j) , за които $i < j$. Тези двойки се различават само по избора на елементите i и j от числата $1, 2, 3, \dots, n - 1$, но не и по реда на i и j , защото редът им е фиксиран: $i < j$. Тогава двойките (i, j) са комбинации, и то без повторения, защото от $i < j$ следва, че $i \neq j$.

Броят им е равен на $C_{n-1}^2 = \binom{n - 1}{2}$, следователно $\sum_{i < j} |A_i \cap A_j| = (n - 2)! \binom{n - 1}{2}$.

Аналогично, $\sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| = (n - 3)! \binom{n - 1}{3}$ и тъй нататък.

Последното събираемо $|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}| = 1! \binom{n - 1}{n - 1} = 1$, защото множеството $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}$ съдържа само една пермутация — идентитета.

Заместваме в принципа за включване и изключване:

$$\begin{aligned} & \left| A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1} \right| = \\ & = (n-1)! \binom{n-1}{1} - (n-2)! \binom{n-1}{2} + (n-3)! \binom{n-1}{3} - \dots + (-1)^n 1! \binom{n-1}{n-1}, \text{ т.е.} \\ & \left| A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1} \right| = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} (n-k)! \binom{n-1}{k}. \end{aligned}$$

Стойността на тази сума е броят на пермутациите, нарушаващи изискването на задачата. Останалите пермутации удовлетворяват изискването от условието; броят им е равен на

$$n! - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} (n-k)! \binom{n-1}{k} = n! + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (n-k)! \binom{n-1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n-k)! \binom{n-1}{k}.$$

И така, броят на пермутациите, изпълняващи изискването на задачата, е равен на

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n-k)! \binom{n-1}{k}.$$

Този израз може да бъде опростен по следния начин:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n-k)! \frac{(n-1)!}{(n-k-1)! k!} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n-k) \frac{(n-1)!}{k!} = (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot \frac{n-k}{k!} = \\ & = (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot \frac{n-k}{k!} = (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot \frac{n}{k!} - (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot \frac{k}{k!} = \\ & = n! \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot \frac{1}{k!} - (n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \cdot \frac{1}{(k-1)!} = n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + (n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} = \\ & = n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + (n-1)! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!} = n! \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + n! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!} + (n-1)! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!} = \\ & = n(-1)^{n-1} + (n! + (n-1)!) \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!} = n(-1)^{n-1} + (n-1)!(n+1) \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!} = \\ & = (-1)^n + (n-1)!(n+1) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Този израз е опростеният отговор на задачата. Той може да се опрости още чрез приближения.

Ако във формулата $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ заместим $x = -1$, получаваме $e^{-1} = \frac{1}{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$.

При големи n частичната сума в отговора е приблизително равна на пълната сума $\frac{1}{e} \approx 0,37$,

а събираемото $(-1)^n$ е много малко и може да се пренебрегне. Максимално опростеният,

но приблизителен отговор е числото $\frac{(n-1)!(n+1)}{e}$.

Задача 4. *Първи начин: с двукратно броене.* Да разгледаме следната комбинаторна задача:

По колко начина можем да изберем пет числа от множеството $\{1, 2, 3, \dots, n+2, n+3\}$?

Трябва да изберем пет различни числа без определен ред, т.е. имаме комбинации без повторение.

Броят им е $C_{n+3}^5 = \binom{n+3}{5}$, което е точно дясната страна на твърдението.

От друга страна, можем първо да изберем средното по големина число. Да го означим с k . Очевидно $k \in \{3, 4, 5, \dots, n, n+1\}$. Тъй като k е третото по големина от петте числа,

трябва да изберем още две числа, по-малки от него. Тоест двете най-малки числа от петте

се избират от множеството $\{1, 2, 3, \dots, k-2, k-1\}$. Това може да бъде направено по

$C_{k-1}^2 = \binom{k-1}{2}$ начина. Аналогично, двете най-големи числа от петте трябва да бъдат от

множеството $\{k+1, k+2, \dots, n+3\}$; за този избор има $C_{n+3-k}^2 = \binom{n+3-k}{2}$ начина.

Всеки избор на двете малки числа може да се комплектова с всеки избор на двете големи числа.

От правилото за умножение намираме, че след като сме избрали средното по големина число k ,

останалите четири числа можем да изберем по $\binom{k-1}{2} \binom{n+3-k}{2}$.

Задачата се разбива на непресичащи се случаи: $k = 3$ или $k = 4, \dots$, или $k = n+1$.

Затова броят на всички решения се намира по правилото за събиране:

$$\sum_{k=3}^{n+1} \binom{k-1}{2} \binom{n+3-k}{2} = \binom{2}{2} \binom{n}{2} + \binom{3}{2} \binom{n-1}{2} + \binom{4}{2} \binom{n-2}{2} + \dots + \binom{n}{2} \binom{2}{2},$$

което е точно лявата страна на твърдението.

Желаното равенство следва от факта, че лявата и дясната страна са две различни формули за едно и също количество — броя на начините, по които можем да изберем (без определен ред) пет различни числа измежду числата $1, 2, 3, \dots, n+3$.

Втори начин: с биномната формула на Нютон. Полагаме

$$f(x, y) = (1+x)^2(1+y)^n + (1+x)^3(1+y)^{n-1} + (1+x)^4(1+y)^{n-2} + \dots + (1+x)^n(1+y)^2.$$

Следователно функцията f е полином на x и y :

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^n a_{kp} x^k y^p, \text{ като } a_{kp} = 0 \text{ при } k+p > n+2.$$

От биномната формула на Нютон следва, че

$\binom{2}{2} \binom{n}{2}$ е коефициентът пред $x^2 y^2$ в полинома $(1+x)^2(1+y)^n$;

$\binom{3}{2} \binom{n-1}{2}$ е коефициентът пред $x^2 y^2$ в полинома $(1+x)^3(1+y)^{n-1}$;

$\binom{4}{2} \binom{n-2}{2}$ е коефициентът пред $x^2 y^2$ в полинома $(1+x)^4(1+y)^{n-2}$; и тъй нататък.

Следователно

$$\binom{2}{2}\binom{n}{2} + \binom{3}{2}\binom{n-1}{2} + \binom{4}{2}\binom{n-2}{2} + \dots + \binom{n}{2}\binom{2}{2} = a_{22}$$

е коефициентът пред x^2y^2 в полинома $f(x, y)$. Остава да докажем, че $a_{22} = \binom{n+3}{5}$.

Това, че знаем отговора $\binom{n+3}{5}$, не ни помага много в тази задача. Ще опишем метод, който работи и тогава, когато не знаем отговора. По същество търсим неизвестен коефициент на полином. Задачата естествено се разбива на две подзадачи:

- 1) Ако знаем явна формула за полинома $f(x, y)$, как да намерим коефициента a_{22} ?
- 2) Как да намерим явна формула за полинома $f(x, y)$?

Първата подзадача се решава така: Диференцираме полинома по x два пъти. Така отпадат всички коефициенти a_{kp} , за които $k < 2$:

$$f''_{xx}(x, y) = \sum_{k=2}^n \sum_{p=0}^n k(k-1) a_{kp} x^{k-2} y^p.$$

Полагаме $x = 0$ и всички степени x^{k-2} с $k > 2$ изчезват. Остават само събираемите с $k = 2$, защото те всъщност не съдържат x . (При работа с полиноми се смята, че $0^0 = 1$.)

$$f''_{xx}(0, y) = \sum_{p=0}^n 2a_{2p} y^p.$$

Същите действия извършваме и с променливата y . Диференцираме по y два пъти, за да махнем коефициентите a_{2p} с $p < 2$:

$$f^{IV}_{xyxy}(0, y) = \sum_{p=2}^n 2p(p-1) a_{2p} y^{p-2}.$$

Полагаме $y = 0$, за да изчезнат събираемите с $p > 2$. Остава само събираемите с $p = 2$:

$$f^{IV}_{xyxy}(0, 0) = 4a_{22}, \quad \text{тоест} \quad a_{22} = \frac{1}{4} f^{IV}_{xyxy}(0, 0).$$

По тази формула можем да намерим неизвестния коефициент a_{22} , ако знаем полинома $f(x, y)$ в явен вид.

Как да намерим явна формула за f ? По определение

$$f(x, y) = (1+x)^2(1+y)^n + (1+x)^3(1+y)^{n-1} + (1+x)^4(1+y)^{n-2} + \dots + (1+x)^n(1+y)^2.$$

Това не е явна формула, тъй като съдържа многоточие, т.е. сбор с променлив брой събираеми.

Обаче те образуват геометрична прогресия с първи член $(1+x)^2(1+y)^n$ и частно $\frac{1+x}{1+y}$.

Чрез известната формула за сбор на геометрична прогресия f може да се намери в явен вид:

$$f(x, y) = \frac{(1+x)^2(1+y)^{n+1} - (1+x)^{n+1}(1+y)^2}{y-x}.$$

Вече няма пречки да намерим a_{22} по формулата

$$a_{22} = \frac{1}{4} f^{IV}_{xyxy}(0, 0).$$

Следваме схемата, описана по-горе. Диференцираме по x два пъти. Вместо формулата за производна на частно е по-удобно да използваме формулата за производна на произведение:

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

където u е числителят на f , а v е реципрочната стойност на знаменателя, т.е. $v(x, y) = \frac{1}{y-x}$.

С помощта на тази формула намираме

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x, y) &= \frac{2(1+y)^{n+1} - (n+1)n(1+x)^{n-1}(1+y)^2}{y-x} + \\ &+ 2 \cdot \frac{2(1+x)(1+y)^{n+1} - (n+1)(1+x)^n(1+y)^2}{(y-x)^2} + \\ &+ 2 \cdot \frac{(1+x)^2(1+y)^{n+1} - (1+x)^{n+1}(1+y)^2}{(y-x)^3}. \end{aligned}$$

Полагаме $x = 0$:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(0, y) &= \frac{2(1+y)^{n+1} - (n+1)n(1+y)^2}{y} + \\ &+ 2 \cdot \frac{2(1+y)^{n+1} - (n+1)(1+y)^2}{y^2} + \\ &+ 2 \cdot \frac{(1+y)^{n+1} - (1+y)^2}{y^3}. \end{aligned}$$

Привеждаме под общ знаменател:

$$f''_{xx}(0, y) = \frac{(2y^2 + 4y + 2)(1+y)^{n+1} - \left((n+1)ny^2 + 2(n+1)y + 2\right)(1+y)^2}{y^3}.$$

Заместваваме $2y^2 + 4y + 2 = 2(1+y)^2$ и изнасяме множителя $(1+y)^2$:

$$f''_{xx}(0, y) = \frac{2(1+y)^{n+1} - \left((n+1)ny^2 + 2(n+1)y + 2\right)}{y^3} (1+y)^2.$$

Предстои да диференцираме два пъти по y и да положим $y = 0$. Полагането ще създаде проблем:

знаменателят ще се анулира и ще се получи неопределеността $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Проблемът е отстраним. Тъй като f е полином, такива са и всички производни на f . Следователно знаменателят трябва да се съкрати. За целта в числителя трябва да останат само степени на y с показатели от 3 нагоре, а y^2 , y^1 и свободният член трябва да се унищожат. Това става, като разкрием скобите. Използваме биномната формула на Нютон, след което отделяме събираемите с показатели 0, 1 и 2.

$$2(1+y)^{n+1} = 2 \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} y^p = \left(2 + 2(n+1)y + (n+1)ny^2\right) + 2 \sum_{p=3}^{n+1} \binom{n+1}{p} y^p.$$

Трите отделени събираеми се унищожават с умалителя от числителя на $f''_{xx}(0, y)$. В числителя остават само степени на y с показатели от 3 нагоре.

В опростен вид втората производна изглежда така:

$$f''_{xx}(0, y) = \frac{2 \sum_{p=3}^{n+1} \binom{n+1}{p} y^p}{y^3} (1+y)^2.$$

Знаменателят се съкращава, както беше предвидено:

$$f''_{xx}(0, y) = 2(1+y)^2 \sum_{p=3}^{n+1} \binom{n+1}{p} y^{p-3}.$$

Получената сума не съдържа y в знаменател, тъй като всички степенни показатели на y са неотрицателни: $p-3 \geq 0$, защото $p \geq 3$.

Удобно е да сменим сумационния индекс. Нека новото p да е равно на старото p минус 3:

$$f''_{xx}(0, y) = 2(1+y)^2 \sum_{p=0}^{n-2} \binom{n+1}{p+3} y^p.$$

Този израз вече е достатъчно прост, така че можем да продължим изпълнението на плана, без да се боим от сериозни технически пречки. Диференцираме по y два пъти, като отново използваме формулата

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

където $u(y) = 2(1+y)^2$, а $v(y)$ е сумата. С помощта на тази формула намираме

$$f''''_{xxyy}(0, y) = 4 \sum_{p=0}^{n-2} \binom{n+1}{p+3} y^p + 8(1+y) \sum_{p=1}^{n-2} \binom{n+1}{p+3} p y^{p-1} + 2(1+y)^2 \sum_{p=2}^{n-2} \binom{n+1}{p+3} p(p-1) y^{p-2}.$$

Полагаме $y = 0$, при което отпадат всички степени на y с положителен степенен показател. Остават само степените с нулев показател, тъй като те всъщност не съдържат y . Тоест от всяка сума остава само първото събираемо: от първата сума остава събираемото с $p = 0$, от втората — събираемото с $p = 1$, от третата — събираемото с $p = 2$.

$$f''''_{xxyy}(0, 0) = 4 \binom{n+1}{3} + 8 \binom{n+1}{4} + 4 \binom{n+1}{5}.$$

Следователно

$$a_{22} = \frac{1}{4} f''''_{xxyy}(0, 0) = \binom{n+1}{3} + 2 \binom{n+1}{4} + \binom{n+1}{5}.$$

По същество задачата е решена. Остава да опростим получения израз.

$$a_{22} = \frac{(n+1)n(n-1)}{3!} + 2 \cdot \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4!} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{5!}.$$

Привеждаме под общ знаменател:

$$a_{22} = \frac{20(n+1)n(n-1) + 10(n+1)n(n-1)(n-2) + (n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{5!}.$$

Разлагаме числителя на множители:

$$a_{22} = \frac{(n+1)n(n-1)(20 + 10(n-2) + (n-2)(n-3))}{5!}.$$

Опрости́ваме израза в големите скоби:

$$a_{22} = \frac{(n+1)n(n-1)(2n^2 + 10n - 2n^2 - 5n + 6)}{5!},$$

$$a_{22} = \frac{(n+1)n(n-1)(n^2 + 5n + 6)}{5!} = \frac{(n+1)n(n-1)(n+2)(n+3)}{5!}.$$

Тоест

$$a_{22} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)}{5!} = \binom{n+3}{5},$$

което трябваше да се докаже.

Трети начин: с математическа индукция. Тъждеството има смисъл за целите $n \geq 2$.

Прилагаме индуктивна стъпка от n към $n+1$.

База: $n = 2$. В този случай се получава равенството $\binom{2}{2}\binom{2}{2} = \binom{5}{5}$, тоест $1 \cdot 1 = 1$, което е вярно.

Индуктивна стъпка: Да предположим, че за някое цяло $n \geq 2$ е в сила равенството

$$\binom{2}{2}\binom{n}{2} + \binom{3}{2}\binom{n-1}{2} + \binom{4}{2}\binom{n-2}{2} + \dots + \binom{n}{2}\binom{2}{2} = \binom{n+3}{5},$$

тоест

$$\sum_{k=2}^n \binom{k}{2}\binom{n+2-k}{2} = \binom{n+3}{5},$$

Ще докажем, че същото равенство е вярно и за $n+1$, тоест

$$\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2}\binom{n+3-k}{2} = \binom{n+4}{5}.$$

Опрости́ваме лявата страна, докато получим дясната. За целта използваме известното тъждество

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b} + \binom{a-1}{b-1} \text{ за всички цели } a \text{ и } b, \text{ за които } a > b > 0.$$

Следователно

$$\binom{n+3-k}{2} = \binom{n+2-k}{2} + \binom{n+2-k}{1} \text{ за всички цели } n \text{ и } k, \text{ за които } n+3-k > 2.$$

Последното неравенство е равносилно на $k < n+1$, тоест $k \leq n$. Затова в последната сума отделяме събираемото с $k = n+1$, а другите членове преработваме чрез цитираното тъждество.

$$\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2}\binom{n+3-k}{2} = \binom{n+1}{2}\binom{2}{2} + \sum_{k=2}^n \binom{k}{2}\binom{n+3-k}{2},$$

$$\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2}\binom{n+3-k}{2} = \binom{n+1}{2}\binom{2}{2} + \sum_{k=2}^n \binom{k}{2} \left[\binom{n+2-k}{2} + \binom{n+2-k}{1} \right],$$

$$\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2}\binom{n+3-k}{2} = \binom{n+1}{2}\binom{2}{2} + \sum_{k=2}^n \binom{k}{2}\binom{n+2-k}{2} + \sum_{k=2}^n \binom{k}{2}\binom{n+2-k}{1}.$$

За да опростим израза, заместваме $\binom{2}{2} = 1$ и $\binom{n+2-k}{1} = n+2-k$. Освен това, първата сума в дясната страна съвпада със сумата от индуктивното предположение. Ето защо

$$\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} \binom{n+3-k}{2} = \binom{n+1}{2} + \binom{n+3}{5} + \sum_{k=2}^n \binom{k}{2} (n+2-k). \quad (*)$$

Остава да пресметнем сумата вдясно:

$$\sum_{k=2}^n \binom{k}{2} (n+2-k) = \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)(n+2-k)}{2}.$$

Разкриваме скобите в дясната страна и подреждаме събираемите по степените на k :

$$\sum_{k=2}^n \binom{k}{2} (n+2-k) = \sum_{k=2}^n \frac{-k^3 + (n+3)k^2 - (n+2)k}{2}.$$

Разбиваме сумата на три суми:

$$\sum_{k=2}^n \binom{k}{2} (n+2-k) = -\frac{1}{2} \sum_{k=2}^n k^3 + \frac{n+3}{2} \sum_{k=2}^n k^2 - \frac{n+2}{2} \sum_{k=2}^n k.$$

Използваме известните формули за степенните сборове:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n &= \frac{n(n+1)}{2}, \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \end{aligned}$$

Сумата приема следния вид:

$$\sum_{k=2}^n \binom{k}{2} (n+2-k) = -\frac{1}{2} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 1 \right) + \frac{n+3}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 \right) - \frac{n+2}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right).$$

Като разкрием големите скоби, събираемите с -1 се унищожават:

$$\sum_{k=2}^n \binom{k}{2} (n+2-k) = -\frac{n^2(n+1)^2}{8} + \frac{n(n+1)(n+3)(2n+1)}{12} - \frac{n(n+1)(n+2)}{4}.$$

Заместваме в равенството $(*)$ и намираме

$$\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} \binom{n+3-k}{2} = \binom{n+1}{2} + \binom{n+3}{5} - \frac{n^2(n+1)^2}{8} + \frac{n(n+1)(n+3)(2n+1)}{12} - \frac{n(n+1)(n+2)}{4}.$$

В дясната страна привеждаме под общ знаменател и разкриваме скобите във всички събираеми

с изключение на събираемото $\binom{n+3}{5}$:

$$\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} \binom{n+3-k}{2} = \binom{n+3}{5} + \frac{n^3 + 6n^2 + 11n + 6}{24} n.$$

Разлагаме числителя на множители:

$$\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} \binom{n+3-k}{2} = \binom{n+3}{5} + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4!} = \binom{n+3}{5} + \binom{n+3}{4}.$$

Отново използваме комбинаторното твърдение

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b} + \binom{a-1}{b-1}.$$

От него следва, че

$$\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} \binom{n+3-k}{2} = \binom{n+3}{5} + \binom{n+3}{4} = \binom{n+4}{5},$$

тоест

$$\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} \binom{n+3-k}{2} = \binom{n+4}{5},$$

което е тъкмо желаното равенство. С това индуктивното доказателство е завършено.

Четвърти начин: с формулите за степенните сборове. Твърдението

$$\sum_{k=2}^n \binom{k}{2} \binom{n+2-k}{2} = \binom{n+3}{5}$$

може да се докаже, като разкрием скобите вляво и сумираме степените на k поотделно.

Подобен подход използвахме в третото решение, но там индукцията ни помогна, като намали степенните показатели. Сега си спестяваме индукцията, но за сметка на това ще се появят събираеми, съдържащи k^4 , тоест ще ни трябва и формула за израза $1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4$.

Този начин е верен и също носи 10 точки.