Домашно № 2 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Компютърни науки", I курс, II поток, зимен семестър на 2017/2018 уч. г. в СУ, ФМИ

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	**Общо**
получени точки					
максимум точки	*30*	*10*	*30*	*30*	*100*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.*
Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

Задача 1. Даден е изпъкнал многоъгълник с n страни, $n \geq 4$, в който никои три диагонала не минават през една и съща вътрешна точка. Пресметнете:

а) броя на диагоналите; **(5 точки)**

б) броя на пресечните точки на диагоналите; **(10 точки)**

в) броя на областите, на които многоъгълникът се разделя от диагоналите си. **(15 точки)**

Забележка: Под "диагонали" се разбират отсечките, а не правите. С други думи, в задачата се разглеждат само пресечните точки *вътре* в многоъгълника.

Задача 2. В пощата си имате десет писма, които трябва да прочетете и да им отговорите. По колко начина можете да подредите тези двайсет действия? Единственото ограничение е, че не можете да отговорите на писмо, преди да сте го прочели.

Задача 3. Колко са пермутациите $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ на числата $1, 2, 3, \ldots, n$ без повторение, такива, че $a_k - a_{k-1} \neq 1$ за всяко $k \in \left\{ 2, 3, \ldots, n \right\}$?

Изисква се точен отговор. Опростете отговора максимално! Ако и след опростяването отговорът все още има сложен вид, използвайте приближения за допълнително опростяване.

Задача 4. Докажете комбинаторното тъждество

$$\binom{2}{2}\binom{n}{2} + \binom{3}{2}\binom{n-1}{2} + \binom{4}{2}\binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{n}{2}\binom{2}{2} = \binom{n+3}{5}$$

по три различни начина: с индукция, с двукратно броене и с биномната формула на Нютон.

(Всеки от тези начини носи по 10 точки.)

Забележка: Може да има и други начини да се докаже тъждеството.

РЕШЕНИЯ

Задача 1.

а) Отсечките с краища измежду върховете на n-ъгълника могат да бъдат разглеждани като ненаредени двойки от различни върхове, тоест *комбинации без повторение* на n елемента от втори клас. Броят им е равен на $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$, като n от тях са страни на многоъгълника, а другите $\dfrac{n(n-1)}{2} - n = \dfrac{n(n-3)}{2}$ са диагонали.

Отговор: Всеки изпъкнал n-ъгълник има $\dfrac{n(n-3)}{2}$ диагонала.

б) На всяка пресечна точка X на диагонали съответства множество от четири различни върха на многоъгълника — краищата на диагоналите, пресичащи се в X. Обратно, всяко множество от четири върха на многоъгълника определя единствена пресечна точка на диагонали. По-конкретно, ако A, B, C и D са четири различни върха, не непременно последователни, но задължително в една посока на обикаляне на контура (например срещу часовника), то те определят единствена пресечна точка във вътрешността на многоъгълника: $AC \cap BD$. Дори AB, BC, CD и DA да са диагонали, а не страни, все пак другите две пресечни точки $AB \cap CD$ и $AD \cap BC$ лежат извън многоъгълника, защото той е изпъкнал.

И така, има взаимноеднозначно съответствие между пресечните точки на диагоналите и четириелементните множества от върхове на многоъгълника. Тези множества представляват ненаредени четворки от (различни) върхове, тоест *комбинации без повторение* на n елемента от четвърти клас, от което следва, че техният брой е равен на $C_n^4 = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$. Това число е същевременно броят на пресечните точки на диагоналите.

в) Чертаем диагоналите един по един и за всеки от тях проследяваме движението на молива от първия до втория връх. (Няма значение кой от двата върха ще изберем за първи.)

Отначало, когато още не е начертан нито един диагонал, вътрешността на многоъгълника представлява една (неразделена) област. Когато чертаем някой диагонал, всеки път, когато той пресече друг (вече начертан) диагонал, се появява една нова област и една нова пресечна точка. (Пресечната точка е нова всеки път, защото по условие никои три диагонала не минават през една и съща вътрешна точка.) Следователно, за да пресметнем броя на областите, трябва към първоначалната единица да добавим броя на пресечните точки на диагоналите, изчислен в подточка “б”.

Това не е достатъчно. При чертане на последната част от диагонал, когато моливът стигне до втория (крайния) връх, се получава още една област, но не и нова (вътрешна) пресечна точка. За да бъде сметката правилна, трябва към броя на областите да прибавим по една единица за всеки диагонал, а общо — броя на диагоналите, пресметнат в подточка “а”.

Окончателно, всеки изпъкнал n-ъгълник се разделя от диагоналите си на общо $1+\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}+\dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{n^4-6n^3+23n^2-42n+24}{24}$ области.

П р о в е р к а: Ако заместим $n=4$ или $n=5$, ще получим съответно 4 и 11 области. Наистина, всеки изпъкнал четириъгълник се разделя от диагоналите си на четири триъгълника. Диагоналите на всеки изпъкнал петоъгълник го делят на 11 части — един малък петоъгълник в центъра на фигурата; пет триъгълника, съдържащи по една страна на малкия петоъгълник (това са лъчите на звездата); още пет триъгълника, всеки от които съдържа по една страна на големия петоъгълник.

Задача 2. Номерираме писмата с числата от 1 до 10, например в реда, в който те се намират в пощенската кутия. Всяка подредба на двайсетте действия може да бъде представена чрез редица от двайсет елемента — две единици, две двойки, две тройки, … , две десетки. Първото число k значи прочитане на писмо № k, а второто число k — отговаряне на писмото.

Броят на възможните подредби на двайсетте действия е равен на броя на редиците, съставени от две единици, две двойки, две тройки, … , две деветки, две десетки. Тези редици се различават само по реда на елементите си, затова редиците са *пермутации със повторение*, понеже между техните елементи има равни. Според известната формула от комбинаториката броят на редиците е равен на

$$\widetilde{P}_{20}^{\,2\,;\,2\,;\,\ldots\,;\,2} = \frac{20!}{(2!)^{10}} = 2\ 375\ 880\ 867\ 360\ 000.$$

Отговор: Двайсетте действия могат да се подредят по 2 375 880 867 360 000 начина.

Задача 2 може да се реши и по друг начин. Номерираме позициите на всички действия с числата от 1 до 20. За позициите на двете действия с писмо № 1 има C_{20}^2 възможности. Вариантите за избор са *комбинации без повторение*, защото:

1) редът на двете позиции няма значение (дали ще изберем например седмата и третата, или ще изберем третата и седмата позиция, няма разлика: и в двата случая третото действие ще бъде прочитане на първото писмо, а седмото действие ще бъде отговаряне на писмото);

2) двете действия (прочитането и отговарянето) задължително са на различни позиции.

Аналогично, за позициите на двете действия с второто писмо има C_{18}^2 възможности, за третото писмо възможностите са C_{16}^2 и т.н. По правилото за умножение общият брой е

$$C_{20}^2 \,.\, C_{18}^2 \,.\, C_{16}^2 \,\ldots\, C_2^2 = \frac{20!}{2!\cancel{18!}} \cdot \frac{\cancel{18!}}{2!\cancel{16!}} \cdot \frac{\cancel{16!}}{2!\cancel{14!}} \cdots \frac{\cancel{2!}}{2!\,0!} = \frac{20!}{(2!)^{10}} = 2\ 375\ 880\ 867\ 360\ 000.$$

Задача 3. Всички пермутации без повторение на числата от 1 до n са $P_n = n!$ на брой. От тях трябва да извадим тези, които нарушават изискването от условието на задачата.

Нека A_i е множеството на пермутациите без повторение на числата от 1 до n, в които два последователни члена са равни на i и $i+1$ в този ред. Индексът i се мени от 1 до $n-1$ вкл. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}$ е множеството на пермутациите, нарушаващи изискването на задачата. Техният брой може да бъде намерен с помощта на принципа за включване и изключване:

$$\left| A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1} \right| = \sum_i \left| A_i \right| - \sum_{i<j} \left| A_i \cap A_j \right| + \ldots + (-1)^n \left| A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \right|.$$

В първата сума $\left| A_i \right|$ е броят на пермутациите без повторение на числата от 1 до n, съдържащи два последователни члена, равни на i и $i+1$ (в този ред). Разглеждаме двата члена като един пакет, който се размества сред останалите $n-2$ числа. Тези размествания са пермутации без повторение на $n-1$ елемента (непакетираните $n-2$ числа плюс пакета). Броят на тези пермутации е равен на $P_{n-1} = (n-1)! = \left| A_i \right|$. Следователно

$$\sum_i \left| A_i \right| = \left| A_1 \right| + \left| A_2 \right| + \ldots + \left| A_{n-1} \right| = (n-1)!\,(n-1) = (n-1)! \binom{n-1}{1}.$$

Събираемите $\left| A_i \cap A_j \right|$ на втората сума са от два вида. В първия вид $j > i+1$. Тогава $A_i \cap A_j$ е множеството на пермутациите без повторение на числата от 1 до n, съдържащи два последователни члена, равни на i и $i+1$ (в този ред), и още два последователни члена, равни на j и $j+1$ (в този ред). Двете двойки членове са два пакета, които се разместват сред другите $n-4$ числа. Тези размествания са пермутации без повторение на $n-2$ елемента (непакетираните $n-4$ числа плюс двата пакета) и броят им е $P_{n-2} = (n-2)! = \left| A_i \cap A_j \right|$.

Вторият вид събираеми $\left| A_i \cap A_j \right|$ са тези, за които $j = i+1$. Тогава $A_i \cap A_j = A_i \cap A_{i+1}$ е множеството на пермутациите без повторение на числата от 1 до n, които съдържат три последователни члена, равни на i, $i+1$ и $i+2$ (в този ред). Трите члена образуват пакет, който се размества сред другите $n-3$ числа. Тези размествания са пермутации без повторение на $n-2$ елемента (непакетираните $n-3$ числа плюс пакета). Броят на тези пермутации е равен на $P_{n-2} = (n-2)! = \left| A_i \cap A_j \right|$.

Стигаме до извода, че всички събираеми $\left| A_i \cap A_j \right|$ на втората сума са равни на $(n-2)!$, независимо от кой вид са. Броят на събираемите е точно броят на наредените двойки $(i\,,\,j)$, за които $i<j$. Тези двойки се различават само по избора на елементите i и j от числата $1\,,\,2\,,\,3\,,\,\ldots\,,\,n-1$, но не и по реда на i и j, защото редът им е фиксиран: $i<j$. Тогава двойките $(i\,,\,j)$ са комбинации, и то без повторения, защото от $i<j$ следва, че $i \neq j$. Броят им е равен на $C_{n-1}^2 = \binom{n-1}{2}$, следователно $\displaystyle\sum_{i<j} \left| A_i \cap A_j \right| = (n-2)! \binom{n-1}{2}$.

Аналогично, $\displaystyle\sum_{i<j<k} \left| A_i \cap A_j \cap A_k \right| = (n-3)! \binom{n-1}{3}$ и тъй нататък.

Последното събираемо $\left| A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \right| = 1! \binom{n-1}{n-1} = 1$, защото множеството $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}$ съдържа само една пермутация — идентитета.

Заместваме в принципа за включване и изключване:

$$\left| A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1} \right| =$$

$$= (n-1)! \binom{n-1}{1} - (n-2)! \binom{n-1}{2} + (n-3)! \binom{n-1}{3} - \ldots + (-1)^n \, 1! \binom{n-1}{n-1}, \text{ т.е.}$$

$$\left| A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1} \right| = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} (n-k)! \binom{n-1}{k}.$$

Стойността на тази сума е броят на пермутациите, нарушаващи изискването на задачата. Останалите пермутации удовлетворяват изискването от условието; броят им е равен на

$$n! - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} (n-k)! \binom{n-1}{k} = n! + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (n-k)! \binom{n-1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n-k)! \binom{n-1}{k}.$$

И така, броят на пермутациите, изпълняващи изискването на задачата, е равен на

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n-k)! \binom{n-1}{k}.$$

Този израз може да бъде опростен по следния начин:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n-k)! \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!\, k!} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n-k) \frac{(n-1)!}{k!} = (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot \frac{n-k}{k!} =$$

$$= (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot \frac{n-k}{k!} = (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot \frac{n}{k!} - (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot \frac{k}{k!} =$$

$$= n! \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot \frac{1}{k!} - (n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \cdot \frac{1}{(k-1)!} = n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + (n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + (n-1)! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!} = n! \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + n! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!} + (n-1)! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!} =$$

$$= n (-1)^{n-1} + \Big(n! + (n-1)!\Big) \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!} = n (-1)^{n-1} + (n-1)!\,(n+1) \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!} =$$

$$= (-1)^n + (n-1)!\,(n+1) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!}\,.$$

Този израз е опростеният отговор на задачата. Той може да се опрости още чрез приближения. Ако във формулата $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ заместим $x = -1$, получаваме $e^{-1} = \frac{1}{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$.

При големи n частичната сума в отговора е приблизително равна на пълната сума $\frac{1}{e} \approx 0,37$, а събираемото $(-1)^n$ е много малко и може да се пренебрегне. Максимално опростеният, но приблизителен отговор е числото $\frac{(n-1)!\,(n+1)}{e}$.

Задача 4. *Първи начин: с двукратно броене.* Да разгледаме следната комбинаторна задача: По колко начина можем да изберем пет числа от множеството $\left\{ 1 , 2 , 3 , \ldots , n+2 , n+3 \right\}$? Трябва да изберем пет различни числа без определен ред, т.е. имаме комбинации без повторение. Броят им е $C_{n+3}^{5} = \dbinom{n+3}{5}$, което е точно дясната страна на тъждеството.

От друга страна, можем първо да изберем средното по големина число. Да го означим с k. Очевидно $k \in \left\{ 3 , 4 , 5 , \ldots , n , n+1 \right\}$. Тъй като k е третото по големина от петте числа, трябва да изберем още две числа, по-малки от него. Тоест двете най-малки числа от петте се избират от множеството $\left\{ 1 , 2 , 3 , \ldots , k-2 , k-1 \right\}$. Това може да бъде направено по $C_{k-1}^{2} = \dbinom{k-1}{2}$ начина. Аналогично, двете най-големи числа от петте трябва да бъдат от множеството $\left\{ k+1 , k+2 , \ldots , n+3 \right\}$; за този избор има $C_{n+3-k}^{2} = \dbinom{n+3-k}{2}$ начина. Всеки избор на двете малки числа може да се комплектова с всеки избор на двете големи числа. От правилото за умножение намираме, че след като сме избрали средното по големина число k, останалите четири числа можем да изберем по $\dbinom{k-1}{2}\dbinom{n+3-k}{2}$ начина.

Задачата се разбива на непресичащи се случаи: $k = 3$ или $k = 4$, $\ldots$, или $k = n+1$. Затова броят на всички решения се намира по правилото за събиране:

$$\sum_{k=3}^{n+1} \binom{k-1}{2}\binom{n+3-k}{2} \ = \ \binom{2}{2}\binom{n}{2} + \binom{3}{2}\binom{n-1}{2} + \binom{4}{2}\binom{n-2}{2} + \ \cdots \ + \binom{n}{2}\binom{2}{2},$$

което е точно лявата страна на тъждеството.

Желаното равенство следва от факта, че лявата и дясната страна са две различни формули за едно и също количество — броя на начините, по които можем да изберем (без определен ред) пет различни числа измежду числата $1, \ 2, \ 3, \ \ldots \ , \ n+3$.

Втори начин: с биномната формула на Нютон. Полагаме

$f(x , y) \ = \ (1+x)^2(1+y)^n + (1+x)^3(1+y)^{n-1} + (1+x)^4(1+y)^{n-2} + \ \cdots \ + (1+x)^n(1+y)^2.$

Следователно функцията f е полином на x и y:

$$f(x , y) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \ \sum_{p=0}^{n} a_{kp} \, x^k \, y^p, \ \text{ като } \ a_{kp} \ = \ 0 \ \text{ при } \ k+p > n+2.$$

От биномната формула на Нютон следва, че

$\dbinom{2}{2}\dbinom{n}{2}$ е коефициентът пред x^2y^2 в полинома $(1+x)^2(1+y)^n$;

$\dbinom{3}{2}\dbinom{n-1}{2}$ е коефициентът пред x^2y^2 в полинома $(1+x)^3(1+y)^{n-1}$;

$\dbinom{4}{2}\dbinom{n-2}{2}$ е коефициентът пред x^2y^2 в полинома $(1+x)^4(1+y)^{n-2}$; и тъй нататък.

Следователно

$$\binom{2}{2}\binom{n}{2} + \binom{3}{2}\binom{n-1}{2} + \binom{4}{2}\binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{n}{2}\binom{2}{2} \;=\; a_{22}$$

е коефициентът пред x^2y^2 в полинома $f(x\,,\,y)$. Остава да докажем, че $a_{22} = \dbinom{n+3}{5}$.

Това, че знаем отговора $\dbinom{n+3}{5}$, не ни помага много в тази задача. Ще опишем метод, който работи и тогава, когато не знаем отговора. По същество търсим неизвестен коефициент на полином. Задачата естествено се разбива на две подзадачи:

1) Ако знаем явна формула за полинома $f(x\,,\,y)$, как да намерим коефициента a_{22} ?

2) Как да намерим явна формула за полинома $f(x\,,\,y)$?

Първата подзадача се решава така: Диференцираме полинома по x два пъти. Така отпадат всички коефициенти a_{kp}, за които $k < 2$:

$$f''_{xx}(x\,,\,y) \;=\; \sum_{k\,=\,2}^{n}\;\sum_{p\,=\,0}^{n}\; k\,(k-1)\,a_{kp}\,x^{k-2}\,y^{p}.$$

Полагаме $x = 0$ и всички степени x^{k-2} с $k > 2$ изчезват. Остават само събираемите с $k = 2$, защото те всъщност не съдържат x. (При работа с полиноми се смята, че $0^0 = 1$.)

$$f''_{xx}(0\,,\,y) \;=\; \sum_{p\,=\,0}^{n}\; 2a_{2p}\,y^{p}.$$

Същите действия извършваме и с променливата y. Диференцираме по y два пъти, за да махнем коефициентите a_{2p} с $p < 2$:

$$f^{IV}_{xxyy}(0\,,\,y) \;=\; \sum_{p\,=\,2}^{n}\; 2p\,(p-1)\,a_{2p}\,y^{p-2}.$$

Полагаме $y = 0$, за да изчезнат събираемите с $p > 2$. Остава само събираемото с $p = 2$:

$$f^{IV}_{xxyy}(0\,,\,0) \;=\; 4a_{22}\,, \quad \text{тоест} \quad a_{22} = \frac{1}{4}\,f^{IV}_{xxyy}(0\,,\,0).$$

По тази формула можем да намерим неизвестния коефициент a_{22}, ако знаем полинома $f(x\,,\,y)$ в явен вид.

Как да намерим явна формула за f ? По определение

$$f(x\,,\,y) \;=\; (1+x)^2(1+y)^n + (1+x)^3(1+y)^{n-1} + (1+x)^4(1+y)^{n-2} + \;\cdots\; + (1+x)^n(1+y)^2.$$

Това не е явна формула, тъй като съдържа многоточие, т.е. сбор с променлив брой събираеми. Обаче те образуват геометрична прогресия с първи член $(1+x)^2(1+y)^n$ и частно $\dfrac{1+x}{1+y}$. Чрез известната формула за сбор на геометрична прогресия f може да се намери в явен вид:

$$f(x\,,\,y) \;=\; \frac{(1+x)^2(1+y)^{n+1} - (1+x)^{n+1}(1+y)^2}{y-x}\,.$$

Вече няма пречки да намерим a_{22} по формулата

$$a_{22} = \frac{1}{4}\,f^{IV}_{xxyy}(0\,,\,0)\,.$$

Следваме схемата, описана по-горе. Диференцираме по x два пъти. Вместо формулата за производна на частно е по-удобно да използваме формулата за производна на произведение:

$$(uv)'' \;=\; u''v + 2u'v' + uv'',$$

където u е числителят на f, а v е реципрочната стойност на знаменателя, т.е. $v(x\,,\,y) \;=\; \dfrac{1}{y-x}\,\cdot$ С помощта на тази формула намираме

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x\,,\,y) \;=\;& \frac{2(1+y)^{n+1} - (n+1)\,n\,(1+x)^{n-1}(1+y)^2}{y-x} \;+ \\ &+\; 2\;\cdot\;\frac{2(1+x)(1+y)^{n+1} - (n+1)(1+x)^n(1+y)^2}{(y-x)^2} \;+ \\ &+\; 2\;\cdot\;\frac{(1+x)^2(1+y)^{n+1} - (1+x)^{n+1}(1+y)^2}{(y-x)^3}\,. \end{aligned}$$

Полагаме $x = 0$:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(0\,,\,y) \;=\;& \frac{2(1+y)^{n+1} - (n+1)\,n\,(1+y)^2}{y} \;+ \\ &+\; 2\;\cdot\;\frac{2(1+y)^{n+1} - (n+1)(1+y)^2}{y^{\,2}} \;+ \\ &+\; 2\;\cdot\;\frac{(1+y)^{n+1} - (1+y)^2}{y^{\,3}}\,. \end{aligned}$$

Привеждаме под общ знаменател:

$$f''_{xx}(0\,,\,y) \;=\; \frac{(2y^{\,2}+4y+2)(1+y)^{n+1} - \Big((n+1)\,ny^{\,2} + 2(n+1)\,y + 2\Big)(1+y)^2}{y^{\,3}}\,.$$

Заместваме $2y^{\,2}+4y+2 = 2(1+y)^2$ и изнасяме множителя $(1+y)^2$:

$$f''_{xx}(0\,,\,y) \;=\; \frac{2(1+y)^{n+1} - \Big((n+1)\,ny^{\,2} + 2(n+1)\,y + 2\Big)}{y^{\,3}}\,(1+y)^2.$$

Предстои да диференцираме два пъти по y и да положим $y = 0$. Полагането ще създаде проблем: знаменателят ще се анулира и ще се получи неопределеността $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Проблемът е отстраним. Тъй като f е полином, такива са и всички производни на f. Следователно знаменателят трябва да се съкрати. За целта в числителя трябва да останат само степени на y с показатели от 3 нагоре, а $y^{\,2}$, $y^{\,1}$ и свободният член трябва да се унищожат. Това става, като разкрием скобите. Използваме биномната формула на Нютон, след което отделяме събираемите с показатели 0, 1 и 2.

$$2(1+y)^{n+1} \;=\; 2\sum_{p\,=\,0}^{n+1}\binom{n+1}{p}\,y^{\,p} \;=\; \Big(2 + 2(n+1)y + (n+1)\,ny^{\,2}\Big) + 2\sum_{p\,=\,3}^{n+1}\binom{n+1}{p}\,y^{\,p}.$$

Трите отделени събираеми се унищожават с умалителя от числителя на $f''_{xx}(0\,,\,y)$. В числителя остават само степени на y с показатели от 3 нагоре.

В опростен вид втората производна изглежда така:

$$f''_{xx}(0\,,\,y) \;=\; \frac{2\displaystyle\sum_{p\,=\,3}^{n+1}\binom{n+1}{p}\,y^{p}}{y^{3}}\,(1+y)^2.$$

Знаменателят се съкращава, както беше предвидено:

$$f''_{xx}(0\,,\,y) \;=\; 2\,(1+y)^2\,\sum_{p\,=\,3}^{n+1}\binom{n+1}{p}\,y^{p-3}.$$

Получената сума не съдържа y в знаменател, тъй като всички степенни показатели на y са неотрицателни: $p-3 \geq 0$, защото $p \geq 3$.

Удобно е да сменим сумационния индекс. Нека новото p да е равно на старото p минус 3:

$$f''_{xx}(0\,,\,y) \;=\; 2\,(1+y)^2\,\sum_{p\,=\,0}^{n-2}\binom{n+1}{p+3}\,y^{p}.$$

Този израз вече е достатъчно прост, така че можем да продължим изпълнението на плана, без да се боим от сериозни технически пречки. Диференцираме по y два пъти, като отново използваме формулата

$$(uv)'' \;=\; u''v + 2u'v' + uv'',$$

където $u(y) \;=\; 2\,(1+y)^2$, а $v(y)$ е сумата. С помощта на тази формула намираме

$$f^{IV}_{xxyy}(0\,,\,y) \;=\; 4\,\sum_{p\,=\,0}^{n-2}\binom{n+1}{p+3}\,y^{p} + 8\,(1{+}y)\,\sum_{p\,=\,1}^{n-2}\binom{n+1}{p+3}\,p\,y^{p-1} + 2\,(1{+}y)^2\,\sum_{p\,=\,2}^{n-2}\binom{n+1}{p+3}\,p\,(p{-}1)\,y^{p-2}.$$

Полагаме $y=0$, при което отпадат всички степени на y с положителен степенен показател. Остават само степените с нулев показател, тъй като те всъщност не съдържат y. Тоест от всяка сума остава само първото събираемо: от първата сума остава събираемото с $p=0$, от втората — събираемото с $p=1$, от третата — събираемото с $p=2$.

$$f^{IV}_{xxyy}(0\,,\,0) \;=\; 4\binom{n+1}{3} \;+\; 8\binom{n+1}{4} \;+\; 4\binom{n+1}{5}.$$

Следователно

$$a_{22} = \;\frac{1}{4}\,f^{IV}_{xxyy}(0\,,\,0) \;=\; \binom{n+1}{3} \;+\; 2\binom{n+1}{4} \;+\; \binom{n+1}{5}.$$

По същество задачата е решена. Остава да опростим получения израз.

$$a_{22} = \;\frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{3!} \;+\; 2\cdot\frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)}{4!} \;+\; \frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{5!}\,.$$

Привеждаме под общ знаменател:

$$a_{22} = \;\frac{20\,(n+1)\,n\,(n-1) \;+\; 10\,(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2) \;+\; (n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{5!}\,.$$

Разлагаме числителя на множители:

$$a_{22} = \;\frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,\Big(20 \;+\; 10\,(n-2) \;+\; (n-2)\,(n-3)\Big)}{5!}\,.$$

Опростяваме израза в големите скоби:

$$a_{22} = \frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,(\cancel{20} + 10n - \cancel{20} + n^2 - 5n + 6)}{5!},$$

$$a_{22} = \frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n^2 + 5n + 6)}{5!} = \frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n+2)\,(n+3)}{5!}.$$

Тоест

$$a_{22} = \frac{(n+3)\,(n+2)\,(n+1)\,n\,(n-1)}{5!} = \binom{n+3}{5},$$

което трябваше да се докаже.

Трети начин: с математическа индукция. Тъждеството има смисъл за целите $n \geq 2$. Прилагаме индуктивна стъпка от n към $n+1$.

База: $n = 2$. В този случай се получава равенството $\binom{2}{2}\binom{2}{2} = \binom{5}{5}$, тоест $1\,.\,1 = 1$, което е вярно.

Индуктивна стъпка: Да предположим, че за някое цяло $n \geq 2$ е в сила равенството

$$\binom{2}{2}\binom{n}{2} + \binom{3}{2}\binom{n-1}{2} + \binom{4}{2}\binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{n}{2}\binom{2}{2} = \binom{n+3}{5},$$

тоест

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2}\binom{n+2-k}{2} = \binom{n+3}{5},$$

Ще докажем, че същото равенство е вярно и за $n+1$, тоест

$$\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2}\binom{n+3-k}{2} = \binom{n+4}{5}.$$

Опростяваме лявата страна, докато получим дясната. За целта използваме известното тъждество

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b} + \binom{a-1}{b-1} \text{ за всички цели } a \text{ и } b, \text{ за които } a > b > 0.$$

Следователно

$$\binom{n+3-k}{2} = \binom{n+2-k}{2} + \binom{n+2-k}{1} \text{ за всички цели } n \text{ и } k, \text{ за които } n+3-k > 2.$$

Последното неравенство е равносилно на $k < n+1$, тоест $k \leq n$. Затова в последната сума отделяме събираемото с $k = n+1$, а другите членове преработваме чрез цитираното тъждество.

$$\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2}\binom{n+3-k}{2} = \binom{n+1}{2}\binom{2}{2} + \sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2}\binom{n+3-k}{2},$$

$$\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2}\binom{n+3-k}{2} = \binom{n+1}{2}\binom{2}{2} + \sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2}\left[\binom{n+2-k}{2} + \binom{n+2-k}{1}\right],$$

$$\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2}\binom{n+3-k}{2} = \binom{n+1}{2}\binom{2}{2} + \sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2}\binom{n+2-k}{2} + \sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2}\binom{n+2-k}{1}.$$

За да опростим израза, заместваме $\binom{2}{2} = 1$ и $\binom{n+2-k}{1} = n+2-k$. Освен това, първата сума в дясната страна съвпада със сумата от индуктивното предположение. Ето защо

$$\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2}\binom{n+3-k}{2} = \binom{n+1}{2} + \binom{n+3}{5} + \sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2}(n+2-k). \qquad (*)$$

Остава да пресметнем сумата вдясно:

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2}(n+2-k) = \sum_{k=2}^{n} \frac{k\,(k-1)\,(n+2-k)}{2}\,.$$

Разкриваме скобите в дясната страна и подреждаме събираемите по степените на k:

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2}(n+2-k) = \sum_{k=2}^{n} \frac{-\,k^3 + (n+3)k^2 - (n+2)k}{2}\,.$$

Разбиваме сумата на три суми:

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2}(n+2-k) = -\,\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} k^3 + \frac{n+3}{2}\sum_{k=2}^{n} k^2 - \frac{n+2}{2}\sum_{k=2}^{n} k\,.$$

Използваме известните формули за степенните сборове:

$$1+2+3+\ \ldots\ +n = \frac{n\,(n+1)}{2}\,,$$

$$1^2+2^2+3^2+\ \ldots\ +n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}\,,$$

$$1^3+2^3+3^3+\ \ldots\ +n^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}\,.$$

Сумата приема следния вид:

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2}(n+2-k) = -\,\frac{1}{2}\left(\frac{n^2\,(n+1)^2}{4} - 1\right) + \frac{n+3}{2}\left(\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} - 1\right) - \frac{n+2}{2}\left(\frac{n\,(n+1)}{2} - 1\right).$$

Като разкрием големите скоби, събираемите с -1 се унищожават:

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2}(n+2-k) = -\,\frac{n^2\,(n+1)^2}{8} + \frac{n\,(n+1)\,(n+3)\,(2n+1)}{12} - \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{4}\,.$$

Заместваме в равенството $(*)$ и намираме

$$\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2}\binom{n+3-k}{2} = \binom{n+1}{2} + \binom{n+3}{5} - \frac{n^2\,(n+1)^2}{8} + \frac{n\,(n+1)\,(n+3)\,(2n+1)}{12} - \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{4}\,.$$

В дясната страна привеждаме под общ знаменател и разкриваме скобите във всички събираеми с изключение на събираемото $\binom{n+3}{5}$:

$$\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2}\binom{n+3-k}{2} = \binom{n+3}{5} + \frac{n^3+6n^2+11n+6}{24}\,n\,.$$

Разлагаме числителя на множители:

$$\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2}\binom{n+3-k}{2} = \binom{n+3}{5} + \frac{(n+3)\,(n+2)\,(n+1)\,n}{4!} = \binom{n+3}{5} + \binom{n+3}{4}.$$

Отново използваме комбинаторното тъждество

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b} + \binom{a-1}{b-1}.$$

От него следва, че

$$\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2}\binom{n+3-k}{2} = \binom{n+3}{5} + \binom{n+3}{4} = \binom{n+4}{5},$$

тоест

$$\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2}\binom{n+3-k}{2} = \binom{n+4}{5},$$

което е тъкмо желаното равенство. С това индуктивното доказателство е завършено.

Четвърти начин: с формулите за степенните сборове. Тъждеството

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2}\binom{n+2-k}{2} = \binom{n+3}{5}$$

може да се докаже, като разкрием скобите вляво и сумираме степените на k поотделно. Подобен подход използвахме в третото решение, но там индукцията ни помогна, като намали степенните показатели. Сега си спестяваме индукцията, но за сметка на това ще се появят събираеми, съдържащи k^4, тоест ще ни потрябва и формула за израза $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4$. Този начин е верен и също носи 10 точки.