Примерно решение на изпита-задачи по Дискретни структури, специалност Информатика, първи курс, проведен на 11 юни 2018 г.

Зад. 1 Две от следните твърдения са еквивалентни. Намерете кои те и обяснете защо не са еквивалентни на другото твърдение. Обосновете формално и подборно отговорите си, използвайки съждителна логика.

Твърдение 1: Ако грее слънце, то уча и тренирам.

Твърдение 2: Не грее слънце или уча и тренирам.

Твърдение 3: Ако уча, то тренирам и грее слънце.

Решение: Еквивалентните твърдения са 1 и 2. Твърденията могат да бъдат записани по следния начин:
Твърдение 1 : $p \to q \wedge t$
Твърдение 2 : $\neg p \vee (q \wedge t)$

Тогава, съграсно свойството на импликацията, $p \to q \wedge t \equiv \neg p \vee (q \wedge t)$. Следователно твърдения 1 и 2 са еквивалентни.
Лесно се съобразява, че ако p е лъжа, то твърдение 1 е истина, но ако p е лъжа и q е истина, твърдение 3 е лъжа. От тука следва, че твърдение 3 не е еквивалентно на твърдения 1 и 2.

Зад. 2 Разгледайте следното твърдение:

$$\forall n \geqslant 0 \;:\; 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + \ldots + n \cdot 2n = \frac{1}{3} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

а) Докажете твърдението по индукция (**10 т.**).

б) Докажете твърдението като съставите рекурентно уравнение (**5 т.**), намерите общо решение на уравнението (**10 т.**) и след това намерите решението на уравнението (**5 т.**).

Решение:

а) По индукция
Базата е за $n = 0$. Лявата страна е 0, защото сумираме върху празен интервал. Дясната е $\frac{1}{3} \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0.\checkmark$
Индуктивното предположение е, че твърдението е вярно за стойност на аргумента n. В индуктивната стъпка разглеждаме твърдението за стойност на аргумента $n+1$. Тогава твърдението, което трябва да докажем, е:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + \ldots + n \cdot 2n + (n+1) \cdot (2n+2) = \frac{1}{3} \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (2n+3)$$

Ще преобразуваме лявата му страна до дясната чрез еквивалентни преобразувания:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + \ldots + n \cdot 2n + (n+1) \cdot (2n+2) = \qquad \text{(* от индуктивното предположение *)}$$

$$\frac{1}{3} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) + (n+1) \cdot (2n+2) =$$

$$(n+1) \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot n \cdot (2n+1) + (2n+2) \right) =$$

$$(n+1) \cdot \frac{1}{3} \cdot (2n^2 + 7n + 6) =$$

$$(n+1) \cdot \frac{1}{3} \cdot (n+2) \cdot (2n+3)\checkmark$$

б) Нека

$$f(n) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + \ldots + n \cdot 2n$$

Очевидно $f(n) - f(n-1) = n \cdot 2n = 2n^2$. Тогава $f(n) = f(n-1) + 2n^2$. За това рекурентно уравнение е необходимо само едно начално условие, а именно $f(1) = 2$.

Разглеждаме хомогенната част. Характеристичното уравнение е $x - 1 = 0$ с мултимножество от корени $\{1\}_M$.

Сега разглеждаме нехомогенната част. Можем да я запишем като $1^n \cdot n^2$. Полиномът е от втора степен, така че към мултимножеството добавяме три единици и получаваме мултимножеството $\{1, 1, 1, 1\}_M$. Тогава общото решение е:

$$f(n) = A + B \cdot n + C \cdot n^2 + D \cdot n^3$$

за някакви константи A, B, C, D.

Решението на уравнението е

$$f(n) = (2/3) * n^3 + n^2 + (1/3) * n$$

Зад. 3 Разглеждаме ориентирани графи, които не са мултиграфи и в които примки не са разрешени. За всеки такъв граф G казваме, че G *е граф-турнир*, ако за всеки два различни върха u и v е вярно точно едно от двете:

- (u, v) е ребро в графа;
- (v, u) е ребро в графа.

Докажете, че за всеки граф-турнир с поне един връх в графа съществува маршрут, който съдържа всеки връх точно веднъж.

Решение: С индукция по броя на върховете. Ако графът има точно един връх, твърдението е тривиално вярно. ✓

Нека твърдението е вярно за всеки граф-турнир с не повече от n върха, за някое $n \geqslant 1$. Да разгледаме произволен граф-турнир $G = (V, E)$ с $n+1$ върха. Да фиксираме произволен връх u. По дефиниция, за всеки друг връх v, или има ребро (v, u), или има ребро (u, v). Тогава V се "разбива" на подмножества V_o и V_i, където V_o се състои от точно тези върхове, от които има ребро към u, а V_i са останалите. Това "разбиване" може да не отговаря на формалната дефиниция за разбиване, понеже тя иска всеки от дяловете да е непразен, а в случая е възможно всяко от V_o и V_i да е празно (но не и двете), но това не е съществено.

Да допуснем, че V_i е празно, което влече, че V_o е непразно. Разглеждаме графа $G' = G - u$. Очевидно G' е граф-турнир с n върха и съгласно индуктивното предположение, в него има маршрут p, съдържащ всеки негов връх точно веднъж. Нека първият връх от p е връх a, а последният е връх z. С други думи, $p = a \cdots z$. Но в G има ребро $e = (z, u)$ по дефиницията на V_o. Тогава p, e, u е маршрут в G, съдържащ всеки връх точно веднъж.

Напълно аналогично доказваме съществуването на такъв маршрут и когато V_o е празно.

Остава да разгледаме случая $V_i \neq \emptyset$, $V_o \neq \emptyset$. Нека G' и G'' съответно са подграфите, индуцирани от V_o и V_i. Всеки от тях има поне един връх и по-малко от n върха, така че индуктивното предположение е в сила и за двата. Следователно, в G' има маршрут $p' = a' \cdots z'$, съдържащ всеки негов връх точно веднъж, и в G'' има маршрут $p'' = a'' \cdots z''$, съдържащ всеки негов връх точно веднъж. Нещо повече, в G има ребро $e_1 = (z', u)$ и ребро (u, a''). Очевидно $p' e_1 u e_2 p''$ е маршрут в G, съдържащ всички върхове на G.

Зад. 4 Нека $S = \{0, 1, 2, \ldots, 49, 50\}$ и нека $R \subseteq S \times S$ е релацията:

$$aRb \leftrightarrow (b - a \equiv 0 \pmod 3) \wedge (a - b \geqslant 0)$$

а) Докажете, че R е релация на частична наредба (**10 т.**).

б) Намерете максималните и минималните елементи на R (**10 т.**).

Решение:

а) За да докажем, че R е релация на частична наредба , трябва да проверим, че тя е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна:

Рефлексивност: $(a, a) \in R$, защото $a - a \equiv 0 (\bmod 3) \land a - a = 0 \geqslant 0$
Антисиметричност: Ако $(a, b) \in R$ и $a \neq b$, то $a - b > 0$, но тогава $b - a < 0$. Следователно $(b, a) \notin R$.
Транзитивност: Ако $(a, b) \in R$ и $(b, c) \in R$,то от транзитивността на $\geqslant$ и $\equiv$ следва, че и $(a, c) \in R$.

б) Елементът a е минимален елемент по отношение на R, ако не съществува друг елемент b, за който $(b, a) \in R$. Очевидно това са елементите 50,49 и 48. Аналогично a е максимален по отношение на R, ако не съществува друг елемент b, за който $(a, b) \in R$. Това са елементите 0,1,2.

Зад. 5 Нека $\mathcal{G}$ е множеството от обикновените графи. За всеки $x \in \mathcal{G}$, нека $V(x)$ означава множеството от върховете на x. Нека $\mathcal{V}$ е множеството от всички върхове на графи. Тогава $\mathcal{V}$ е безкрайно множество, а всеки граф $x \in G$ е вярно, че $V(x) \subset \mathcal{V}$.

Дадени са три едноместни предиката $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$, и трите с домейн $\mathcal{G}$, дефинирани по следния начин:

$\forall x \in \mathcal{G} : P(x)$ е “x е двуделен.”
$\forall x \in \mathcal{G} : Q(x)$ е “x има Хамилтонов цикъл.”
$\forall x \in \mathcal{G} : R(x)$ е “x има нечетен брой върхове.”

Даден е триместен предикат $S(x, y, z)$ с първи домейн $\mathcal{G}$, втор домейн $\mathcal{V}$ и трети домейн $\mathbb{N}$, дефиниран по следния начин:

$\forall x \in \mathcal{G}\ \forall y \in \mathcal{V}\ \forall z \in \mathbb{N} : S(x, y, z)$ е “y е връх в x и степента на y в x е z.”

Докажете следните две твърдения:

а) $\forall x \in \mathcal{G} \left(P(x) \land R(x) \to \neg Q(x)\right)$ (**10 т.**).

б) $\forall x \in \mathcal{G}\ \forall y \in \mathcal{V} \left(S(x, y, 1) \to \exists y' \in \mathcal{V}\ \exists z \in \mathbb{N} \left(y' \neq y \land S(x, y', 2z + 1)\right)\right)$ (**10 т.**).

Решение:

а) На български език, твърдението е “Ако граф е двуделен и има нечетен брой върхове, то този граф не е Хамилтонов”. Но това следва веднага от доказаното на лекции твърдение, че граф е двуделен тстк няма нечетни цикли и факта, че дължината на Хамилтонов цикъл е равна на броя на върховете.

б) На български език, твърдението е “Ако граф има висящ връх, то той има друг връх, чиято степен е нечетна”. Допускаме, че има висящ връх, но няма други върхове с нечетна степен. От тука следва, че сумата от степените на всички върхове е нечетно число. Но ние знаем, че в неориентиран граф сумата от степените на върховете винаги е четно число. От тук следва, че съществува поне още един връх с нечетна степен.

Зад. 6 Докажете или опровергайте, че следното множеството от булеви функции е пълно:

$$\{\vee, \wedge, \rightarrow\}$$

Решение: Това множество не е пълно. Да си представим произволна схема от функционални елементи, всеки от които е конюнкция, дизюнкция или импликация. Лесно е да се съобрази, че ако на входовете на схемата бъдат подадени само единици, на изхода ще излезе също единица. Следователно това множество не е пълно.