

ДОМАШНО № 2 ПО ДИСЦИПЛИНАТА “ДИСКРЕТНИ СТРУКТУРИ”
ЗА СПЕЦИАЛНОСТ “КОМПЮТЪРНИ НАУКИ”, I КУРС, II ПОТОК,
ЗИМЕН СЕМЕСТЪР НА 2018/2019 УЧ. Г. В СУ, ФМИ

Име: Факултетен № Група:

Задача	1	2	3	ОБЩО
получени точки				
максимум точки	25	25	50	100

Забележка 1: Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.

Забележка 2: Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно:
идентичните решения ще бъдат анулирани!

Задача 1. В международно състезание участват 1985 души. Измежду всеки трима от тях има поне двама, които говорят един и същ език. Всеки участник владее не повече от пет езика. Да се докаже, че има поне двеста души, които знаят един и същ език.

Задача 2. Нека \mathcal{F} е семейство от подмножества на $\{1, 2, \dots, n\}$ със следните свойства:

– Ако $A \in \mathcal{F}$, то $|A| = 3$.

– Ако $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$ и $A \neq B$, то $|A \cap B| \leq 1$.

Да се докаже, че $|\mathcal{F}| \leq \frac{n^2 - n}{6}$ за всяко цяло $n \geq 3$.

Задача 3. Да се докажат тъждествата:

а)
$$\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} 2^{n-k} + \sum_{k=0}^m \binom{n+k}{k} 2^{m-k} = 2^{m+n+1}; \quad (25 \text{ точки})$$

б)
$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} 2^{2n-2k} = \binom{4n}{2n}. \quad (25 \text{ точки})$$

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Разглеждаме два случая за участниците в състезанието.

Първи случай: Всеки двама участници имат поне един общ език. Нека A е някой участник. По условие A знае най-много пет езика и има общ език с всеки от другите 1984 състезатели. От принципа на Дирихле следва, че съществува поне един език, на който състезателят A може да общува с най-малко $\left\lceil \frac{1984}{5} \right\rceil = 397$ други състезатели. Заедно с A те образуват множество от $398 > 200$ души, които знаят един и същ език.

Втори случай: Някои двама участници A и B нямат общ език. Всеки друг състезател има общ език с A или B (по условие). От принципа на Дирихле следва, че поне единият от двамата, например A , има общ език с най-малко $\left\lceil \frac{1983}{2} \right\rceil = 992$ от останалите 1983 състезатели. Но A знае не повече от пет езика, затова (пак от принципа на Дирихле) измежду тези 992 състезатели има поне $\left\lceil \frac{992}{5} \right\rceil = 199$, говорещи с A на един и същ език. Въпросните 199 участници заедно с A образуват множество от 200 души, които знаят един и същ език.

Задача 2. По условие всяко множество от \mathcal{F} има три елемента, затова притежава три на брой двуелементни подмножества. Тъй като (отново по условие) различните множества от \mathcal{F} имат най-много един общ елемент, то техните двуелементни подмножества са две по две различни. Ето защо двуелементните подмножества на всички множества от \mathcal{F} са общо $3|\mathcal{F}|$ на брой. От друга страна, те са не повече от всички двуелементни подмножества на $\{1, 2, \dots, n\}$, тоест

$$3|\mathcal{F}| \leq C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2},$$

следователно

$$|\mathcal{F}| \leq \frac{n^2 - n}{6}.$$

Задача 3.

а) Тъждеството

$$\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} 2^{n-k} + \sum_{k=0}^m \binom{n+k}{k} 2^{m-k} = 2^{m+n+1}$$

е равносилно на

$$\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{m} 2^{n-k} + \sum_{k=0}^m \binom{n+k}{n} 2^{m-k} = 2^{m+n+1}.$$

То може да се докаже с помощта на комбинаторни разсъждения. Нека множеството M се състои от естествените числа между 1 и $m+n+1$ включително. Колко са подмножествата на M с поне $m+1$ елемента? Очевидно $(m+1)$ -ият по големина елемент на такова подмножество (ако броенето върви от най-малкия към най-големия елемент) е цяло число от вида $m+k+1$ за някое цяло $k \in [0; n]$. Елементите на подмножеството, по-малки от $m+k+1$, са m на брой измежду числата 1, 2, \dots , $m+k$, затова могат да бъдат избрани по $C_{m+k}^m = \binom{m+k}{m}$ начина. Другите елементи на подмножеството са измежду числата $m+k+2$, $m+k+3$, \dots , $m+n+1$ ($n-k$ на брой), затова могат да бъдат избрани по 2^{n-k} начина.

Следователно $\binom{m+k}{m} 2^{n-k}$ е броят на подмножествата на M , чийто $(m+1)$ -и елемент е равен на $m+k+1$. След сумиране по възможните стойности на k (от 0 до n вкл.) следва, че $\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{m} 2^{n-k}$ е броят на подмножествата на M с поне $m+1$ елемента.

Аналогично, $\sum_{k=0}^m \binom{n+k}{n} 2^{m-k}$ е броят на подмножествата на M с поне $n+1$ елемента.

Поради биекцията между подмножествата и техните допълнения тази сума представлява също броят на подмножествата на M с не повече от $(m+n+1) - (n+1) = m$ елемента.

Всяко подмножество на M има или поне $m+1$ елемента, или не повече от m елемента. Следователно сборът

$$\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{m} 2^{n-k} + \sum_{k=0}^m \binom{n+k}{n} 2^{m-k}$$

е равен на 2^{m+n+1} , колкото е броят на всички подмножества на M .

б) Ще използваме обобщението на биномната формула на Нютон:

$$(x+y+z)^{2n} = \sum_{i+j+k=2n} \binom{2n}{i, j, k} x^i y^j z^k,$$

където сумирането е по всички цели неотрицателни числа i, j, k със сбор $2n$,

$$\binom{2n}{i, j, k} = \frac{(2n)!}{i!j!k!}$$

е мултиномният коефициент. Във формулата полагаме $x=1$, $y=u^2$, $z=\frac{1}{4u^2}$:

$$\left(1+u^2+\frac{1}{4u^2}\right)^{2n} = \sum_{i+j+k=2n} \binom{2n}{i, j, k} \frac{u^{2(j-k)}}{4^k},$$

$$\left[\left(u+\frac{1}{2u}\right)^2\right]^{2n} = \sum_{i+j+k=2n} \frac{(2n)!}{i!j!k!4^k} u^{2(j-k)},$$

$$\left(u+\frac{1}{2u}\right)^{4n} = \sum_{i+j+k=2n} \frac{(2n)!}{i!j!k!4^k} u^{2(j-k)}.$$

Развиваме лявата страна според биномната формула:

$$\sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k} u^k \left(\frac{1}{2u}\right)^{4n-k} = \sum_{i+j+k=2n} \frac{(2n)!}{i!j!k!4^k} u^{2(j-k)},$$

$$\sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{4n-k} u^{2k-4n} = \sum_{i+j+k=2n} \frac{(2n)!}{i!j!k!4^k} u^{2(j-k)}.$$

Това равенство е твърдение относно u . Затова коефициентите пред съответните степени на u са равни. Сравняваме свободните членове, тоест членовете с нулев степенен показател на u .

В лявата страна нулев показател се получава при $2k-4n=0 \iff k=2n$, поради което свободният член отляво е равен на $\binom{4n}{2n} \left(\frac{1}{2}\right)^{4n-2n} = \binom{4n}{2n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \binom{4n}{2n} \frac{1}{4^n}$.

В дясната страна показателят е нула при $j = k$, тогава $i = 2n - 2k$ и k се мени от 0 до n .
Ето защо свободният член отдясно е равен на

$$\sum_{k=0}^n \frac{(2n)!}{(2n-2k)!k!k!4^k} = \sum_{k=0}^n \frac{(2n)!}{(2n-2k)!(2k)!} \cdot \frac{(2k)!}{k!k!} \cdot \frac{1}{4^k} = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} \frac{1}{4^k}.$$

Свободните членове в лявата и дясната страна на тъждеството са равни, тоест

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} \frac{1}{4^k} = \binom{4n}{2n} \frac{1}{4^n}.$$

Умножаваме това равенство с 4^n и получаваме

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} 4^{n-k} = \binom{4n}{2n},$$

тоест

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} 2^{2n-2k} = \binom{4n}{2n},$$

което трябваше да се докаже.

Домашното съдържа задачи от материалите на международното жури по провеждането на Балканската олимпиада по математика.