Семестриално контролно по "Дискретни структури" за специалност "Компютърни науки", I курс, II поток – СУ, ФМИ, зимен семестър на 2018/2019 уч. г.

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	1	2	3	4	5	6	Общо
получени точки							
максимум точки	*20*	*20*	*20*	*20*	*20*	*20*	*120*

Забележка: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно!*

Задача 1. Всеки три върха на правилен $(2n+1)$-ъгълник образуват триъгълник. Колко от тези триъгълници не съдържат центъра на правилния $(2n+1)$-ъгълник?

Задача 2. Да се докаже тъждеството

$$\binom{n}{1}\binom{n}{2k} + \binom{n}{3}\binom{n}{2k-2} + \binom{n}{5}\binom{n}{2k-4} + \cdots + \binom{n}{2k+1}\binom{n}{0} = \frac{1}{2}\binom{2n}{2k+1}.$$

Задача 3. Докажете, че за всички множества A и B важи равенството

$$\big(A \cup B\big) \cap \overline{A \cap B} = \big(A \setminus B\big) \cup \big(B \setminus A\big).$$

Задача 4. Разглеждаме безкрайна числова редица, определена по следния начин:

$$a_0 = 7, \quad a_{n+1} = \sqrt{5\,a_n + 31} \quad \text{за всяко цяло неотрицателно число } n.$$

Докажете, че всички членове на редицата са по-малки от 10.

Задача 5. В множеството на целите положителни числа определяме две бинарни релации ρ и R по следния начин:

$$x \rho y \iff \exists n \in \mathbb{N}: \ x < 10^n \leq y;$$

$$x R y \iff \neg \big(x \rho y \vee y \rho x\big).$$

а) Докажете, че R е релация на еквивалентност. **(10 точки)**

б) Опишете класовете на еквивалентност на R възможно най-просто и ясно. **(5 точки)**

в) Нека M е множеството от класовете на еквивалентност на R.
Какво множество е M — крайно, изброимо безкрайно или неизброимо? **(5 точки)**

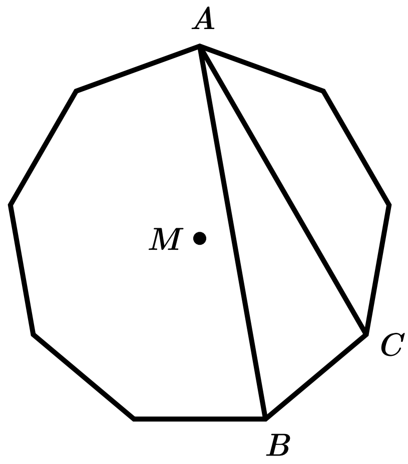
Задача 6. Пермутацията без повторение a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_{2n} на числата $1, 2, 3, \ldots, 2n$ наричаме приятна, ако $\left| a_q - a_{q+1} \right| = n$ за някое q от 1 до $2n-1$ включително.

а) Пресметнете броя на приятните пермутации. **(10 точки)**

б) Докажете, че поне половината от всички пермутации са приятни. **(10 точки)**

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Нека M е центърът на правилния $(2n+1)$-ъгълник. Броят на върховете е нечетен, затова т. M не лежи на никой диагонал на многоъгълника. Следователно за всеки триъгълник, образуван от три върха на правилния многоъгълник, т. M е или вътрешна, или външна, но не и контурна. Търси се за колко триъгълника т. M е външна.



Нека $\triangle ABC$ е някой триъгълник от този вид. Завъртаме многоъгълника, докато някой от върховете на триъгълника (например A) застане точно над M. Наричаме A *горен връх* на $\triangle ABC$. Правата AM дели останалите върхове на многоъгълника на два вида — n леви и n десни върха.

Горния връх на $\triangle ABC$ избираме по такъв начин, че другите два върха на триъгълника да бъдат десни. (Например A е горен връх, а B и C са десни върхове за триъгълника, изобразен на чертежа вдясно.) Целта на това изискване е горният връх на $\triangle ABC$ да бъде определен еднозначно. (За триъгълника от чертежа: т. B не може да бъде избрана за горен връх, защото A и C ще бъдат леви върхове; т. C също не може да бъде избрана за горен връх, защото тогава A и B ще бъдат съответно ляв и десен връх, а не два десни върха.)

Еднозначната определеност на горния връх на триъгълника се доказва в общия случай така: трите му върха делят окръжността, описана около многоъгълника, на три дъги. Понеже т. M лежи вън от триъгълника, то една (и само една) от дъгите е по-голяма от 180°. Ако ориентираме споменатата дъга обратно на посоката на движение на часовниковата стрелка, началото на дъгата ще бъде търсеният горен връх.

За триъгълниците, съдържащи т. M, изискването за избор на горен връх не може да се спази: както и да избираме горния връх на такъв триъгълник, другите два върха ще бъдат ляв и десен.

И тъй, дотук доказахме, че всеки триъгълник, несъдържащ центъра M на многоъгълника, се определя еднозначно от избора на един горен и два десни върха.

За горен връх можем да изберем кой да е от върховете на многоъгълника, следователно разполагаме с $2n+1$ възможности.

При всеки избор на горен връх (например A) има n десни върха, от които избираме два (на чертежа това са B и C). Те трябва да бъдат различни ($B \neq C$), за да се получи триъгълник. Редът им няма значение (ABC и ACB са един и същи триъгълник). Възможностите за избор на два различни десни върха без определен ред са *комбинации без повторение* на n елемента от втори клас.

От правилото за умножение намираме броя на триъгълниците, несъдържащи точката M:

$$(2n+1)\, C_n^2 \;=\; \frac{(2n+1)\, n\,(n-1)}{2}\,.$$

Задача 2 може да се реши поне по два начина.

Първи начин: В биномната формула на Нютон

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \cdots + \binom{n}{n} x^n$$

заместваме x със $-x$:

$$(1-x)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 - \binom{n}{3} x^3 + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} x^n.$$

Изваждаме и събираме двете равенства; унищожават се ту четните степени, ту нечетните:

$$\frac{(1+x)^n-(1-x)^n}{2} = \binom{n}{1}x+\binom{n}{3}x^3+\binom{n}{5}x^5+\binom{n}{7}x^7+\cdots$$

$$\frac{(1+x)^n+(1-x)^n}{2} = \binom{n}{0}\quad+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{4}x^4+\binom{n}{6}x^6+\cdots$$

Умножаваме последните две равенства:

$$\frac{(1+x)^{2n}-(1-x)^{2n}}{4} = \left[\binom{n}{1}x+\binom{n}{3}x^3+\binom{n}{5}x^5+\cdots\right]\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{4}x^4+\cdots\right].$$

Това е тъждество относно x, следователно коефициентите пред еднаквите степени са равни. В дясната страна коефициентът пред x^{2k+1} е равен на

$$\binom{n}{1}\binom{n}{2k}+\binom{n}{3}\binom{n}{2k-2}+\binom{n}{5}\binom{n}{2k-4}+\cdots+\binom{n}{2k+1}\binom{n}{0}.$$

В лявата страна коефициентът пред x^{2k+1} е равен на

$$\frac{1}{4}\left[\binom{2n}{2k+1}-(-1)^{2k+1}\binom{2n}{2k+1}\right] = \frac{1}{4}\left[\binom{2n}{2k+1}+\binom{2n}{2k+1}\right] = \frac{2}{4}\binom{2n}{2k+1} = \frac{1}{2}\binom{2n}{2k+1}.$$

Като приравним двата коефициента, получаваме желаното тъждество.

Втори начин: с комбинаторни разсъждения.

Имаме n червени предмета $r_1, r_2, \ldots, r_n$ и n сини предмета $b_1, b_2, \ldots, b_n$, които се различават по цвят и номер. По колко начина можем да изберем $2k+1$ предмета, сред които да има нечетен брой сини (и четен брой червени)?

Решаваме тази комбинаторна задача чрез двукратно преброяване. Можем да изберем:

— един син и $2k$ червени предмета по $C_n^1\,C_n^{2k} = \binom{n}{1}\binom{n}{2k}$ начина;

— три сини и $2k-2$ червени предмета по $C_n^3\,C_n^{2k-2} = \binom{n}{3}\binom{n}{2k-2}$ начина;

— пет сини и $2k-4$ червени предмета по $C_n^5\,C_n^{2k-4} = \binom{n}{5}\binom{n}{2k-4}$ начина;

....

— само сини предмети ($2k+1$ на брой) по $C_n^{2k+1}\,C_n^0 = \binom{n}{2k+1}\binom{n}{0}$ начина.

Общо всички начини са

$$\binom{n}{1}\binom{n}{2k}+\binom{n}{3}\binom{n}{2k-2}+\binom{n}{5}\binom{n}{2k-4}+\cdots+\binom{n}{2k+1}\binom{n}{0},$$

което е точно лявата страна на доказваното тъждество.

Същевременно има точно $C_{2n}^{2k+1} = \binom{2n}{2k+1}$ начина да изберем $2k+1$ от $2n$ предмета. Едни комбинации са с четен, а други — с нечетен брой сини предмети. Съществува биекция между двата вида комбинации: едновременната промяна на цветовете на всички предмети превръща комбинациите от единия вид в комбинации от другия вид. Например комбинацията $\left\{r_3, r_8, r_{15}, b_4, b_7\right\}$ се превръща във $\left\{b_3, b_8, b_{15}, r_4, r_7\right\}$ и обратно. Щом има биекция, то комбинациите от двата вида са равен брой. Затова комбинациите с нечетен брой сини предмети са половината от всички, тоест $\frac{1}{2}\binom{2n}{2k+1}$. Остава да сравним двата получени израза.

Задача 3. Прилагаме табличния метод.

A	B	$A \cap B$	$\overline{A \cap B}$	$A \cup B$	$(A \cup B) \cap \overline{A \cap B}$	$A \setminus B$	$B \setminus A$	$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	0	1	0	0	0	0

Стълбовете със сив фон съответстват на лявата и дясната страна на доказваното равенство. Тези стълбове съвпадат, следователно равенството е тъждество.

Задача 4. В задачата се иска да докажем, че $a_n < 10$ за всяко цяло число $n \geq 0$. За тази цел ще използваме математическа индукция.

База: $n = 0$. По условие $a_0 = 7$. Тъй като $7 < 10$, то $a_0 < 10$, тоест неравенството $a_n < 10$ е изпълнено при $n = 0$.

Индуктивна стъпка: Нека $a_n < 10$ за някое цяло $n \geq 0$. Ще докажем, че и $a_{n+1} < 10$. Действително, от рекурентното уравнение следва, че

$$a_{n+1} = \sqrt{5\,a_n + 31} < \sqrt{5\,.\,10 + 31} = \sqrt{81} = 9 < 10,$$

тоест $a_{n+1} < 10$, което трябваше да се докаже.

Задача 5 се решава лесно, ако първо изтълкуваме смисъла на релациите ρ и R. Това става, като преобразуваме формулировките на двете релации (първо ρ, после R).

$x \rho y$

$\Updownarrow$ (по определение)

$\exists n \in \mathbb{N}: \;\; x < 10^n \leq y$

$\Updownarrow$ (нека $d(z)$ е броят на цифрите на естественото число z в десетичната бройна система)

$\exists n \in \mathbb{N}: \;\; d(x) < n + 1 \leq d(y)$

$\Updownarrow$ (в посока надолу изводът следва от транзитивността на неравенството; в посока нагоре полагаме $n = d(y) - 1$)

$d(x) < d(y)$

$\Updownarrow$ (преминаваме към словесна формулировка)

числото x има по-малко цифри от числото y.

$x R y$

$\Updownarrow$ (по определение)

$\neg\,(x \rho y \,\vee\, y \rho x)$

$\Updownarrow$ (закон на Де Морган)

$\neg\, x \rho y \,\wedge\, \neg\, y \rho x$

$\Updownarrow$ (според доказаното за ρ)

$d(x) \geq d(y) \;\wedge\; d(y) \geq d(x)$

$\Updownarrow$ (от антисиметричността на неравенството)

$d(x) = d(y)$

$\Updownarrow$ (словесна формулировка)

числата x и y имат равен брой цифри.

а) От $\forall x: \; d(x) = d(x)$ следва $\forall x: \; x R x$. Следователно релацията R е рефлексивна.
Понеже $x R y \implies d(x) = d(y) \implies d(y) = d(x) \implies y R x$, то релацията R е симетрична.
R е транзитивна: $x R y \,\wedge\, y R z \implies d(x) = d(y) \,\wedge\, d(y) = d(z) \implies d(x) = d(z) \implies x R z$.
R е релация на еквивалентност, защото е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

б) Всеки клас на еквивалентност на релацията R се състои от всички цели положителни числа с равен брой цифри в десетичната бройна система.

в) $M = \left\{ A_n : \; n \in \mathbb{N}^+ \right\}$, където A_n е множеството на n-цифрените цели положителни числа.
Изображението $A_n \mapsto n$ е биекция между M и $\mathbb{N}^+$, т.е. множеството M е изброимо безкрайно.

Задача 6. За всяко $j \in \left\{ 1,\ 2,\ 3,\ \dots\ ,\ n \right\}$ означаваме с A_j множеството на пермутациите на числата $1,\ 2,\ 3,\ \dots\ ,\ 2n$, в които числата j и $j+n$ са едно до друго. По определение една пермутация е приятна, ако и само ако съдържа поне една двойка съседи с разлика n. Тоест множеството на приятните пермутации съвпада с обединението $A_1 \cup A_2 \cup\ \dots\ \cup A_n$.

а) Мощността на това обединение може да се намери чрез принципа за включване и изключване. Можем да изберем k от тези множества по C_n^k начина; това число е точно броят на събираемите в едно включване или изключване. Мощността на сечението на избраните k множества е броят на пермутациите, съдържащи поне k съседа с разлика n — по-точно, онези k двойки, които съответстват на избраните k множества. Всяка от споменатите двойки разглеждаме като един пакет. Пермутациите от сечението на избраните k множества пораждат пермутации без повторение на $2n-k$ елемента — образуваните k пакета и непакетираните $2n-2k$ числа. Две числа в пакет могат да се разместят по два начина, общо 2^k начина за цялата пермутация. От правилото за умножение следва, че мощността на всяко сечение е $2^k . P_{2n-k} = (2n-k)!\, 2^k$. Тези сечения са C_n^k на брой. Заместваме мощностите в принципа за включване и изключване:

$$\left| A_1 \cup A_2 \cup\ \dots\ \cup A_n \right| \;=\; \sum_{k\,=\,1}^{n} (-1)^{k+1} . C_n^k . 2^k . P_{2n-k} \;=\; -\sum_{k\,=\,1}^{n} \frac{n!(2n-k)!}{k!(n-k)!}\,(-2)^k .$$

Това е броят на приятните пермутации.

б) Че поне половината от всички пермутации са приятни, може да се докаже най-малко по два различни начина — със или без използване на резултата от предишното подусловие.

Първи начин: Следните неравенства се доказват като принципа за включване и изключване:

$$\left| A_1 \cup A_2 \cup\ \dots\ \cup A_n \right| \;\leq\; \sum_{p\,=\,1}^{n} \left| A_p \right| ;$$

$$\left| A_1 \cup A_2 \cup\ \dots\ \cup A_n \right| \;\geq\; \sum_{p\,=\,1}^{n} \left| A_p \right| - \sum_{i\,=\,1}^{n-1}\ \sum_{j\,=\,i+1}^{n} \left| A_i \cap A_j \right| ;$$

и тъй нататък (всеки път се обръща посоката на неравенството). Прилагаме второто неравенство към разсъжденията от предишното подусловие:

$$\left| A_1 \cup A_2 \cup\ \dots\ \cup A_n \right| \;\geq\; -\sum_{k\,=\,1}^{2} \frac{n!(2n-k)!}{k!(n-k)!}\,(-2)^k \;=\; 2\,\frac{n!(2n-1)!}{(n-1)!} \;-\; 2\,\frac{n!(2n-2)!}{(n-2)!} \;=$$

$$=\; (2n-1)!(2n) \;-\; (2n-2)!(2n)(n-1) \;=\; (2n)! \;-\; (2n)!\,\frac{n-1}{2n-1} \;=\; (2n)!\left(1 \;-\; \frac{n-1}{2n-1}\right) \;=$$

$$=\; (2n)!\,\frac{n}{2n-1} \;\geq\; (2n)!\,\frac{n}{2n} \;=\; \frac{(2n)!}{2} .$$

Доказаното неравенство

$$\left| A_1 \cup A_2 \cup\ \dots\ \cup A_n \right| \;\geq\; \frac{(2n)!}{2}$$

означава тъкмо това: че поне половината от всички пермутации са приятни.

Втори начин: Това, че поне половината от всички пермутации са приятни, е равносилно на твърдението, че приятните пермутации са поне колкото неприятните. За да докажем това, е достатъчно да построим инекция от неприятните към приятните пермутации.

Нека $a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ \dots\ ,\ a_{2n}$ е някоя неприятна пермутация на числата $1,\ 2,\ 3,\ \dots\ ,\ 2n$. За всяка пермутация (приятна или не) има единствен индекс k между 1 и $2n-1$ включително, за който $\left| a_k - a_{2n} \right| = n$. Понеже дадената пермутация е неприятна, то въпросният индекс k е различен от числото $2n-1$, тоест $1 \leq k \leq 2n-2$. Разместваме $(k+1)$-ия и $(2n)$-ия член; сега $\left| a_k - a_{k+1} \right| = n$, тоест новата пермутация е приятна. Така получената приятна пермутация съпоставяме на дадената неприятна пермутация. Ще докажем, че това съответствие е инекция.

Наистина, нека a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_{2n} е приятна пермутация на числата $1, 2, 3, \ldots, 2n$. Търсим индекс k между 1 и $2n-2$ вкл., за който $\left| a_k - a_{k+1} \right| = n$. Има няколко случая:

— Няма такъв индекс. Тогава $\left| a_{2n-1} - a_{2n} \right| = n$ и дадената приятна пермутация не е образ на никоя неприятна пермутация (това следва от разсъжденията на предишната страница).

— Има единствен индекс k с желаното свойство. Тогава съществува единствен кандидат за първообраз на дадената приятна пермутация — това е пермутацията, която се получава след разместването на $(k+1)$-ия и $(2n)$-ия член. Ако след описаното разместване се получи неприятна пермутация, то тя е търсеният първообраз (и той е единствен). Ако след разместването се получи приятна пермутация, тоест $\left| a_{k+1} - a_{k+2} \right| = n$, то поради липсата на други кандидати следва, че дадената пермутация няма първообраз в множеството на неприятните пермутации.

— Има поне два индекса k с желаното свойство. Тогава дадената приятна пермутация има два или повече кандидата за първообраз. Всички те обаче по определение се получават от нея с едно разместване, което унищожава най-много една двойка съседи с разлика n. Следователно остава поне още една такава двойка елементи, тоест всеки от кандидатите е приятна пермутация. Ето защо дадената пермутация няма първообраз в множеството на неприятните пермутации.

Изброените случаи изчерпват всички възможности. Обобщавайки направените наблюдения, стигаме до извода, че всяка приятна пермутация притежава не повече от един първообраз в множеството на неприятните пермутации. Следователно въведеното от нас изображение от неприятните към приятните пермутации представлява инекция, което трябваше да се докаже.

Подусловие “б” на задача 6 е дадено на XXX МОМ — ФРГ, 1989 г.